МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1985

УДК 539.3

# НЕЛИНЕЙНАЯ УДАРНАЯ ВОЛНА В НАСЛЕДСТВЕННОЙ СРЕДЕ И ТОЧНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО ОПЕРАТОРА

ЛОКШИН А. А.

В работе устанавливается возможность разложения на множители одномерного нелинейного волнового оператора, коэффициенты которого не зависят от пространственной и временной переменных. Этот результат применяется к исследованию фронта ударной волны в нелинейном наследственном стержне для случая, когда наследственные эффекты слабы, а нелинейность определяется квадратичной функцией.

1. Пусть деформация $\varepsilon$ и напряжение $\sigma$ в однородном полубесконечном стержне, расположенном на полуоси $x\geqslant 0$, связаны определяющим соотношением [1]:

$$\varepsilon=\frac{1}{E}\left(\sigma+\alpha\sigma^2+k\int_{-\infty}^{t}\sigma(\tau,x)\exp\left\{-\frac{t-\tau}{\gamma}\right\}d\tau\right)\tag{1.1}$$

($E$, $\alpha$, $k$, $\gamma$ — положительные постоянные). Предположим также, что выполнены начальные и граничные условия:

$$\sigma(t,\ x)=0\quad\text{при}\quad x>0,\quad t\leqslant 0\tag{1.2}$$

$$\sigma(t,\ 0)=\sigma_0(t)\tag{1.3}$$

где функция $\sigma_0(t)$ дифференцируема на всей оси, равна нулю при $t\leqslant 0$ и при больших $t>0$.

Рассмотрим вопрос о времени возникновения ударной волны и эволюции ударного фронта.

В публикуемой работе поставленная задача решается лишь качественно, причем дополнительно предполагается, что напряжения не слишком велики, а положительные постоянные $\alpha$, $\beta$, $1/\gamma$ малы. Все дальнейшие рассуждения и вычисления по существу основываются на возможности точно факторизовать нелинейный волновой оператор (см. п. 4).

Запишем уравнения движения стержня в лагранжевых координатах:

$$\partial\sigma/\partial x=\rho\partial v/\partial t,\qquad \partial v/\partial x=\partial\varepsilon/\partial t\tag{1.4}$$

($\rho$ — плотность, $v$ — скорость материального элемента стержня). Из (1.1) и (1.4) следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sigma+\alpha\sigma^2+k\int_{-\infty}^{t}\sigma(\tau,x)\exp\left\{-\frac{t-\tau}{\gamma}\right\}d\tau\right)-\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}=0\tag{1.5}$$

Для любой основной функции $u(t)$ положим по определению

$$R^{\vee}u(t)\equiv\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\exp\left\{-\frac{t-\tau}{\gamma}\right\}d\tau$$

Непосредственным вычислением проверяется, что с точностью до $O(\alpha^2+k^2)$ уравнение (1.5) представимо в виде

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(1+\alpha\sigma+\frac{kR^{\vee}}{2}\right)-\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(1+\frac{\alpha\sigma}{2}+\frac{kR^{\vee}}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}\right\}\sigma=0 \tag{1.6}$$

(При перемножении здесь важен порядок действия сомножителей. Принимается, что раньше действует оператор, стоящий правее, например $\partial/\partial t(\sigma\cdot\sigma)\equiv\partial/\partial t(\sigma^2)$, а не $(\partial\sigma/\partial t)\sigma$.)

Очевидно, что если будет найдено решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma+\frac{\alpha\sigma^2}{2}+\frac{k}{2}\int\limits_{-\infty}^{t}\sigma(\tau,x)\exp\left\{-\frac{t-\tau}{\gamma}\right\}d\tau\right)+\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{\partial\sigma}{\partial x}=0 \tag{1.7}$$

то тем самым будет найдено решение и уравнения (1.6), а значит, получено искомое первое приближение к решению уравнения (1.5)[1].

Перепишем (1.7) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma+\frac{\alpha\sigma^2}{2}\right)+\frac{k\sigma}{2}-\frac{k}{2\gamma}\int\limits_{0}^{t}\sigma(\tau,x)\exp\left\{-\frac{t-\tau}{\gamma}\right\}d\tau+\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{\partial\sigma}{\partial x}=0 \tag{1.8}$$

В силу сделанных предположений о малости величин $k$ и $1/\gamma$ можно отбросить интегральное слагаемое в (1.8). В результате приходим к уравнению

$$\partial(\sigma+\alpha\sigma^2/2)/\partial t+k\sigma/2+\sqrt{E/\rho}\,\partial\sigma/\partial x=0 \tag{1.9}$$

Введем обозначения

$$a\equiv1/\sqrt{E/\rho},\qquad b\equiv\alpha/2\sqrt{E/\rho},\qquad c\equiv k/2\sqrt{E/\rho} \tag{1.10}$$

тогда (1.9) перепишется в виде

$$\partial\sigma/\partial x+a\partial\sigma/\partial t+b\partial\sigma^2/\partial t+c\sigma=0 \tag{1.11}$$

**2.** Сделаем в (1.11) замену неизвестной функции

$$\sigma=w\exp(-cx)/2b \tag{2.1}$$

и замену независимых переменных

$$x_1=(1-\exp(-cx))/c,\qquad t_1=t-ax \tag{2.2}$$

Тогда уравнение (1.11) перепишется в виде

$$w_{x_1}+ww_{t_1}=0 \tag{2.3}$$

(см. также [3]). Очевидно, что при отображении (2.2) $0\leqslant x_1\leqslant1/c$, так как $0\leqslant x<\infty$. Очевидно также, что при отображении (2.2) ось $t$ перейдет в ось $t_1$, причем положительное направление сохранится. Таким образом, для уравнения (2.3) ставится следующая задача Коши:

$$w|_{x_1=0}=w_0(t_1)\equiv2b\sigma_0(t_1) \tag{2.4}$$

Решение которой подробно изучено (см., например, [4]).

[1] Уравнение, аналогичное (1.8), из других соображений выводилось в [2]; см. также: *Нигул У. К.* Модифицированная теория вязкоупругости.— Препринт Ин-та кибернетики АН ЭССР. Таллин, 1983, № 309. 62 с.

Определим $x_1=x_1^0$, при котором происходит опрокидывание волны (возникает разрыв). Имеем (см., например, [4]): $x_1^c=-(dw_0(t)/dt)^{-1}|_{t=t^0}$, где $t^0$ — точка, в которой величина $-dw_0(t)/dt$ достигает максимума. Следовательно, разрыв возникает при

$$x=x^0=-\ln(1-cx_1^0)/c \tag{2.5}$$

Очевидно, что должно выполняться условие

$$1-cx_1^0>0 \tag{2.6}$$

иначе опрокидывания не произойдет ни при каком вещественном $x$. (Иным способом этот результат установлен в [4].)

3. Предположим теперь, что условие (2.6) выполнено, и исследуем поведение ударного фронта. Нетрудно показать, что в рассматриваемом приближении (т. е. с точностью до $O(\alpha^2+k^2+1/\gamma^2)$) из условий на разрыве для уравнений движения (переписанных в координатах $w$, $t_1$, $x_1$) следует, что

$$1/V=(w^+ + w^-)/2 \tag{3.1}$$

Здесь $V\equiv dx_1(t_1)/dt_1$ ($x_1=x_1(t_1)$ — уравнение ударного фронта в координатах $t_1$, $x_1$), $w^+$ и $w^-$ — значения $w$ перед и за фронтом соответственно. Из уравнения (2.3) и условия на разрыве (3.1) легко следует, что

$$\frac{d}{dx_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} w\,dt_1=0, \quad \text{т. е.} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} w\,dt_1=\mathrm{const} \tag{3.2}$$

Теперь для закона сохранения

$$w_{x_1}+(w^2/2)_{t_1}=0 \tag{3.3}$$

соответствующего (2.3), (3.1), приходим к хорошо изученной задаче о построении ударного фронта. Приведем уравнения, определяющие форму ударного фронта $t_1=S(x_1)$ (см. 4):

$$\frac{1}{2}\{w_0(\tau^*)+w_0(\tau^{**})\}(\tau^*-\tau^{**})=\int\limits_{\tau^{**}}^{\tau^*} w_0(\tau)\,d\tau$$

$$S(x_1)=\tau^*+w_0(\tau^*)x_1, \qquad S(x_1)=\tau^{**}+w_0(\tau^{**})x_1$$

Эти уравнения определяют при $x_1>x_1^c$ три функции от $x_1$: $S(x_1)$, $\tau^*(x_1)$, $\tau^{**}(x_1)$. В координатах $t$, $x$ уравнение фронта, очевидно, перепишется так: $t-ax=S\{(1-e^{-cx})/c\}$ $(x>x_0)$. При больших $x$ имеем

$$t\sim ax+S(1/c) \tag{3.4}$$

Величина разрыва $[w]\equiv w^+-w^-$ определяется равенством $[w]=w_0(\tau^*)-w_0(\tau^{**})$. В силу (2.1) величины разрывов $[\sigma]$ и $[w]$ связаны соотношением $[\sigma]=e^{-cx}[w]/2b$, но так как при $x\to\infty$ имеем $x_1\to 1/c$, то при больших $x$ справедливо соотношение

$$[\sigma]\sim e^{-cx}\{w_0(\tau^*(1/c))-w_0(\tau^{**}(1/c))\}/2b \tag{3.5}$$

Формулы (3.4) и (3.5) дают нам искомое качественное описание поведения решения на ударном фронте.

Другой подход исследования ударных фронтов приведен в [5].

4. Приближенная факторизация, проведенная в формуле (1.6), фактически основывается на возможности точно факторизовать нелинейное волновое уравнение

$$\partial^2 a(\sigma)/\partial t^2-\partial^2\sigma/\partial x^2 \tag{4.1}$$

*Теорема 1.* Справедливы равенства

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}\mp\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\pm\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) \tag{4.2}$$

Здесь, как и в п. 2, предполагается, что при перемножении раньше действует оператор, стоящий правее.

*Доказательство.* Перемножим скобки в правой части (4.2). Имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}\mp\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\pm\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}\cdot\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\pm$$

$$\pm\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\mp\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}$$

В силу принятого соглашения о порядке действия операторов при перемножении имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}\cdot\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\equiv\frac{\partial}{\partial t}a'(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(\sigma)$$

Поэтому остается установить, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

Однако предыдущее равенство вытекает из равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\sigma\sqrt{a'(\sigma)}\,d\sigma=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\sigma\sqrt{a'(\sigma)}\,d\sigma$$

Теорема доказана.

5. Уравнение (4.1), которое было факторизовано в п. 4, очевидно, описывает распространение напряжений в нелинейном однородном стержне единичной плотности с определяющим уравнением $\varepsilon=a(\sigma)$. Если обратить предыдущее соотношение, положив $\sigma=\varphi(\varepsilon)$, то придем к уравнению, описывающему распространение деформаций $\partial^2\varepsilon/\partial t^2-\partial^2\varphi(\varepsilon)/\partial x^2$, которое факторизуется аналогичным образом.

Наконец, уравнение для перемещений имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \tag{5.1}$$

*Теорема 2.* Положим

$$g(y)\equiv\int_0^y\sqrt{\varphi'(y)}\,dy$$

Тогда каждое решение любого из уравнений

$$\partial u/\partial t+g(\partial u/\partial x)=0 \tag{5.2}$$

$$\partial u/\partial t-g(\partial u/\partial x)=0 \tag{5.3}$$

является также решением уравнения (5.1).

*Доказательство.* Пусть $u(t,x)$ удовлетворяет, например, уравнению (5.3). Покажем, что тогда $u(t, x)$ удовлетворяет и уравнению (5.1). Имеем, подставляя $\partial u/\partial t$ из (5.3) в (5.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)=g'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}-$$

$$-\varphi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=g'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(g\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)-\varphi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=$$

$$=\left\{\left(g'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)^2-\varphi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

Теорема доказана.

Автор благодарит Н. В. Зволинского за постановку задачи и обсуждение результатов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
2. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
3. *Васильева О. А., Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В.* Взаимодействие нелинейных волн в средах без дисперсии. М.: Наука, 1983. 151 с.
4. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
5. *Гринфельд М. А.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в нелинейно-упругом материале.– ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 883–898.


Москва

Поступила в редакцию 5.X.1984