

УДК 539.214

ВНЕДРЕНИЕ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКУЮ ТРУБУ

ЗАДОЯН М. А.

Предлагается класс решения пространственной задачи идеальной пластичности в цилиндрических координатах и приводится его приложение при соосном внедрении жесткого цилиндрического тела в трубу из идеально пластического материала.

Подобная картина пластического деформирования встречается при клинопрессовой сварке разнородных труб [1]. Технологическая схема такой сварки представляет собой предварительный нагрев и соосное впрессовывание трубы из более твердого материала с монотонно возрастающим по оси внешним диаметром в трубу из более мягкого материала, помещенную в плотную недеформируемую цилиндрическую пресс-форму. Процесс соединения материалов происходит в твердой фазе, причем физический контакт образуется за счет пластической деформации более мягкого материала, вызывающей пластические деформации в приповерхностном весьма тонком слое трубы из более твердого материала. Заметных объемных изменений этой трубы в процессе впрессовывания не наблюдается.

Исследованию неоднородного пластического течения цилиндрических тел, основанному на интегралах общих уравнений теории идеально пластического течения, посвящены работы [2-7]. Осесимметричное течение идеального жесткопластического материала внутри шероховатой цилиндрической втулки исследовано в [2]. Существенное обобщение этого решения получено в [3, 4]. В [4] в цилиндрических координатах дается решение более общей задачи пространственного течения пластической массы при учете температурного воздействия и массовых сил. Предельное состояние цилиндрической трубы при различных внешних силовых воздействиях рассмотрено в [5-7]. Пространственному течению цилиндрического слоя, подверженного совместному влиянию поперечного изгиба и продольного растяжения, посвящена работа [8].

Характерной особенностью указанных решений является одномерность тензора скоростей деформаций и его независимость от продольной координаты. Для описания процесса двумерного пластического деформирования, рассматриваемого в публикуемой работе, необходимо, чтобы в искомом решении тензор скоростей деформаций являлся функцией от радиальной и продольной координат.

1. Класс решения пространственной задачи теории идеально пластического течения. 1. Общие соотношения теории идеального жесткопластического течения в цилиндрических координатах в принятых обозначениях имеют следующий вид:

дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

зависимости между скоростями перемещений, скоростями деформаций и напряжений

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad 2\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (1.2)$$

$$2\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_{ij} = \Lambda(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma)$$

условие пластичности Губера — Мизеса

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + \sigma(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{rz}^2) = \sigma \quad (1.3)$$

Здесь компоненты напряжений отнесены к пластическому постоянному k .

2. Компоненты напряжений и скоростей перемещений представим через произвольные функции $f(r)$ и $\varphi(r)$ в следующем виде:

$$\sigma_r = -2A - 2Bz - 2C_\theta + \int_a^r \left[4\mu\varphi' - \lambda \left(f' - \frac{f}{r} \right) \right] \Omega \frac{dr}{r}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + [4\mu\varphi' - \lambda(f' - f/r)]\Omega, \quad \sigma_z = \sigma_r + [2\mu\varphi' - \lambda(2f' + f/r)]\Omega,$$

$$\tau_{\theta z} = [\lambda(r\varphi' - (\mu/2r^2)(rf)')] \Omega$$

$$\tau_{r\theta} = C + D/r^2, \quad \tau_{rz} = B_r + E/r \quad (1.4)$$

$$u = (\lambda f - 2\mu\varphi) \exp(\lambda z + \mu\theta), \quad v = 2(r\varphi)' \exp(\lambda z + \mu\theta) + Gr$$

$$w = -\frac{1}{r}(rf)' \exp(\lambda z + \mu\theta) + H$$

$$\Omega = \sqrt{1 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2} \left\{ (\lambda f' - 2\mu\varphi')^2 - \frac{\lambda}{r}(\lambda f' - 2\mu\varphi')(rf)' + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^2}{r^2}(rf)'^2 + \left[\lambda(r\varphi)' - \frac{\mu}{2r^2}(rf)' \right]^2 \right\}^{-1/2}$$

где буквы латинского алфавита здесь и в дальнейшем обозначают произвольные постоянные; λ , μ , a — заданные постоянные.

Приведенные выражения (1.4) будут решением системы уравнений (1.1) — (1.3), если функции $f(r)$ и $\varphi(r)$ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \left(\lambda^2 + \frac{1}{r^2} \right) f + 2\lambda\mu\varphi + \frac{2\tau_{rz}}{\sqrt{1 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2}} \left\{ (\lambda f' - 2\mu\varphi')^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda}{r}(\lambda f' - 2\mu\varphi')(rf)' + \frac{\lambda^2}{r^2}(rf)'^2 + \left[\lambda(r\varphi)' - \frac{\mu}{2r^2}(rf)' \right]^2 \right\}^{1/2} = 0 \quad (1.5)$$

$$\varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' - \frac{1 + \mu^2}{r^2}\varphi + \frac{\lambda\mu}{2r^2}f - \frac{\tau_{r\theta}}{r\sqrt{1 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2}} \left\{ (\lambda f' - 2\mu\varphi')^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda}{r}(\lambda f' - 2\mu\varphi')(rf)' + \frac{\lambda^2}{r^2}(rf)'^2 + \left[\lambda(r\varphi)' - \frac{\mu}{2r^2}(rf)' \right]^2 \right\}^{1/2} = 0$$

Характер течения пластической массы на граничных поверхностях тела определяет краевые условия для этой системы, а из условий, накладываемых на указанные касательные напряжения на этих поверхностях, находятся произвольные постоянные, содержащиеся в этих выражениях. Гидростатическая постоянная A определяется из условия равновесия тела в продольном направлении. Решение (1.4) может представить, в частности, пространственное деформирование пластического материала между

шероховатыми жесткими сближающимися поверхностями $R_i=r_i \pm a_i \exp(\lambda z + \mu \theta)$, где r_i и a_i — положительные заданные постоянные.

3. В случае осесимметричного деформирования $C = \mu = 0$. Вводя обозначение $(r\varphi)' = \psi(r)$, для компонентов напряжений из (1.4) находим

$$\sigma_r = -2A - 2Bz - \kappa \int_a^r \left(f' - \frac{f}{r} \right) \frac{\omega}{r} dr, \quad \kappa = \text{sign } \lambda$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r - \kappa (f' - f/r) \omega, \quad \sigma_z = \sigma_r - \kappa (2f' + f/r) \omega \quad (1.6)$$

$$\tau_{\theta z} = \kappa \psi \omega, \quad \tau_{r\theta} = D/r^2, \quad \tau_{rz} = Br + E/r$$

$$\omega = \sqrt{1 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2} / (f'^2 + f'f/r + f^2/r^2 + \psi^2)^{1/2} \quad (1.7)$$

Компоненты скоростей перемещений, соответственно, примут вид

$$u = \lambda f e^{\lambda z}, \quad v = 2\psi e^{\lambda z} + Gr, \quad w = -(rf)' e^{\lambda z} / r + H \quad (1.8)$$

Вместо (1.5) будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \left(\lambda^2 + \frac{1}{r^2} \right) f + \frac{2\kappa\lambda\tau_{rz}}{(1 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2)^{1/2}} \sqrt{f'^2 + \frac{1}{r} f'f + \frac{1}{r^2} f^2 + \psi^2} = 0 \quad (1.9)$$

$$\psi' - \frac{1}{r} \psi - \frac{\kappa\lambda\tau_{r\theta}}{(1 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2)^{1/2}} \sqrt{f'^2 + \frac{1}{r} f'f + \frac{1}{r^2} f^2 + \psi^2} = 0$$

4. При отсутствии вращательного движения пластической массы имеем $\varphi(r) = G = D = 0$. Тогда в формулах (1.6)–(1.8) следует положить $\omega = (1 - \tau_{r\theta}^2)^{1/2} / (f'^2 + f'f/r + f^2/r^2)^{1/2}$, $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = v = 0$. Второе дифференциальное уравнение (1.9) превращается в тождество, а первое принимает вид

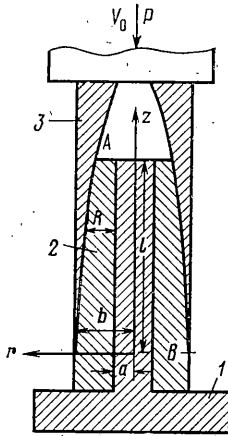
$$f'' + \frac{1}{r} f' - \left(\lambda^2 + \frac{1}{r^2} \right) f + \frac{2\kappa\lambda\tau_{rz}}{(1 - \tau_{rz}^2)^{1/2}} \sqrt{f'^2 + \frac{1}{r} f'f + \frac{1}{r^2} f^2} = 0$$

Будем отличать внутреннее и внешнее внедрение в зависимости от впрессовывания жесткого элемента (с внутренней или с внешней стороны) по отношению к элементу из более мягкого материала.

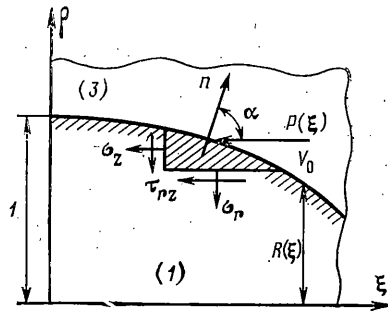
2. Внутреннее внедрение. Пусть в абсолютно жесткой цилиндрической пресс-форме (1) плотно помещена цилиндрическая труба (2) из идеально пластического материала (алюминиевый сплав) с внутренним и внешним радиусами a и b , соответственно, а в нее соосно впрессовывается, совершая одновременно вращательное движение вокруг своей оси, цилиндрическая труба (3) из значительно более твердого материала (стальной сплав) с переменным внешним радиусом $R = a + u_1 \exp(vz/b)$, где v и u_1 — заданные положительные постоянные (фиг. 1). Материал этой трубы считаем недеформируемым.

Цилиндрическую систему координат закрепляем с жесткой трубой так, чтобы плоскость $z=0$ прошла через входное торцевое сечение, а положительное направление оси z — по оси труб против направления движения. Полагаем, что вращение жесткой трубы происходит в сторону возрастания полярной координаты θ и материал деформируемой трубы по всей толщине в области $z > 0$ переходит в чисто пластическое состояние, а торцевая $z=l$ этой трубы считаем свободным от внешних сил.

1. Введем обозначения: $u_0 = u_1/b$, $\lambda = v/b$, $\rho_0 = a/b$, безразмерные координаты $\rho = r/b$, $\xi = z/b$ и функции $f(r) = b^2 f_*(\rho)$, $\psi(r) = b \psi_*(\rho)$, $R(z) = b R_*(\xi)$, $R_*(\xi) = \rho_0 + u_0 \exp(v\xi)$. После преобразования формул (1.6),



Фиг. 1



Фиг. 2

(1.7), опуская в дальнейшем звездочку в нижних индексах, для компонентов напряжений получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r(\rho, \xi) &= -2A - 2B\xi - \int_{\rho_0}^{\rho} \left(f' - \frac{f}{\rho} \right) \frac{\omega}{\rho} d\rho \\ \sigma_\theta &= \sigma_r - (f' - f/\rho)\omega, \quad \sigma_z = \sigma_r - (2f' + f/\rho)\omega \\ \tau_{\theta z} &= \psi\omega, \quad \tau_{r\theta} = D/\rho^2, \quad \tau_{rz} = B\rho + E/\rho \\ \omega &= \sqrt{1 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2} / (f'^2 + f'f/\rho + f^2/\rho^2 + \psi^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Компоненты скоростей перемещений в новых обозначениях будут

$$u = v f(\rho) e^{v\xi}, \quad v = 2\psi(\rho) e^{v\xi} + G\rho, \quad w = -(\rho f)' e^{v\xi} / \rho + H \quad (2.2)$$

Здесь и в дальнейшем скорости перемещений отнесены к b .

Система дифференциальных уравнений (1.9) в новых переменных перепишется в виде

$$f'' + \frac{1}{\rho} f' - \left(v^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) f + \frac{2v\tau_{rz}}{(1 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2)^{1/2}} \sqrt{f'^2 + \frac{1}{\rho} f'f + \frac{1}{\rho^2} f^2 + \psi^2} = 0 \quad (2.3)$$

$$\psi' - \frac{1}{\rho} \psi - \frac{v\tau_{r\theta}}{(1 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2)^{1/2}} \sqrt{f'^2 + \frac{1}{\rho} f'f + \frac{1}{\rho^2} f^2 + \psi^2} = 0$$

Принимая за нормальную скорость перемещения на поверхности $\rho = R(\xi)$ радиальную скорость перемещения $u(\rho_0, \xi)$ и $\cos \alpha \approx R'(\xi)$, где α — угол между нормалью к поверхности $\rho = R(\xi)$ и осью z , для функции $f(\rho)$ будем иметь граничные условия (V_0 — скорость внедрения):

$$f(\rho_0) = u_0 V_0 = u_*, \quad f(1) = 0 \quad (2.4)$$

Степени шероховатости контактных поверхностей принимаем одинаковыми по всем направлениям и равными, соответственно, m_1 и m_2 . Тогда можно положить $\tau_{r\theta} = -m_1 v / (v^2 + w^2)^{1/2}$, $\tau_{rz} = m_2 w / (v^2 + w^2)^{1/2}$ при $\rho = \rho_0, 1$. Считая $G = H = 0$ и учитывая выражения для $\tau_{r\theta}$ и τ_{rz} в (2.1), из формул (2.2) находим

$$B = \frac{1}{2(1 - \rho_0^2)} \left\{ \frac{\rho_0 m_1 [f'(\rho_0) + u_*/\rho_0]}{\sqrt{\psi^2(\rho_0) + 1/4 [f'(\rho_0) + u_*/\rho_0]^2}} - \frac{m_2 f'(1)}{\sqrt{\psi^2(1) + 1/4 f'^2(1)}} \right\} \quad (2.5)$$

$$E = -\frac{1}{2(1-\rho_0^2)} \left\{ \frac{m_1 [f'(\rho_0) + u_*/\rho_0]}{\sqrt{\psi^2(\rho_0) + 1/4 [f'(\rho_0) + u_*/\rho_0]^2}} - \frac{\rho_0 m_2 f'(1)}{\sqrt{\psi^2(1) + 1/4 f'^2(1)}} \right\}$$

$$D = -\frac{m_1 \rho_0^2 \psi(\rho_0)}{\sqrt{\psi^2(\rho_0) + 1/4 [f'(\rho_0) + u_*/\rho_0]^2}} = -\frac{m_2 \psi(1)}{\sqrt{\psi^2(1) + 1/4 f'^2(1)}} \quad (2.6)$$

Последнее равенство и (2.4) являются граничными условиями для системы уравнений (2.3). Торце деформируемой трубы $\xi = \xi_0 = l/b$ свободен от нормальных сил, следовательно

$$\int_{\rho_0}^1 \sigma_z(\rho, \xi_0) \rho d\rho = 0 \quad (2.7)$$

Подставляя σ_z из (2.1) и производя интегрирование по частям в полученном двукратном интеграле, найдем

$$A = -B\xi_0 - \frac{3}{2(1-\rho_0^2)} \int_{\rho_0}^1 \left[\left(1 + \frac{1}{3\rho^2} \right) f' + \left(1 - \frac{1}{3\rho^2} \right) \frac{f}{\rho} \right] \omega \rho d\rho$$

Таким образом, определяя функции $f(\rho)$ и $\psi(\rho)$ из системы дифференциальных уравнений (2.3) при граничных условиях (2.4), (2.6) на ЭВМ, находим компоненты напряжений и скоростей перемещений.

Используя выражения компонентов скоростей перемещений, легко проверить, что условие сохранения количества масс выполняется тождественно

$$\rho_0 \int_0^{\xi} u(\rho_0, \xi) d\xi = \int_{\rho_0}^1 [w(\rho, \xi) - w(\rho, 0)] \rho d\rho$$

2. Определим силу и момент впрессовывания. Из условия равновесия элемента на контактной поверхности трубы $\rho = R(\xi)$ (фиг. 2) для абсолютного значения давления по оси имеем $p(\xi) = -\sigma_z(\rho_0, \xi) \cos \alpha + \tau_{rz}(\rho_0) \sin \alpha$, $\sin \alpha = 1/(1+R'^2)^{1/2}$, $\cos \alpha = R'/(1+R'^2)^{1/2}$. Суммарная осевая сила, приходящаяся на эту поверхность, т. е. сила впрессовывания, будет

$$P = 2\pi b^2 \int_0^{\xi_0} R(\xi) \sqrt{1+R'^2(\xi)} p(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

Подставляя в (2.8) выражения для $R(\xi)$ и $p(\xi)$ и производя интегрирование, находим

$$P/(\pi b^2) = 2\rho_0 \xi_0 m_1 + 2(u_0/v) [\exp(v\xi_0) - 1] (m_1 + v\rho_0 S) + u_0^2 [\exp(2v\xi_0) - 1] S + 4B\rho_0 (u_0/v) [1 + \exp(v\xi_0) (v\xi_0 - 1)] + B(u_0^2/v) [1 + \exp(2v\xi_0) (2v\xi_0 - 1)], \quad S = T - 2B\xi_0 \quad (2.9)$$

$$T = -\frac{3}{1-\rho_0^2} \int_{\rho_0}^1 \left[\left(1 + \frac{1}{3\rho^2} \right) f' + \left(1 - \frac{1}{3\rho^2} \right) \frac{f}{\rho} \right] \omega \rho d\rho + \left[2f'(\rho_0) + \frac{u_0}{\rho_0} \right] \omega(\rho_0)$$

Разлагая в степенной ряд экспоненциальные функции, входящие в (2.9), и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$P = 2\pi b^2 \xi_0 (\rho_0 + u_0) (m_1 + v u_0 T) \quad (2.10)$$

Вращающий момент определится по формуле

$$M = \frac{4\pi b^3 m_1 \psi(\rho_0)}{\sqrt{4\psi^2(\rho_0) + [f'^2(\rho_0) + u_*^2/\rho_0]^2}} \int_0^{\xi} (\rho_0 + u_0 e^{v\xi})^2 \sqrt{1 + v^2 u_0^2 \exp(2v\xi)} d\xi \quad (2.11)$$

3. В случае отсутствия вращения жесткой трубы $\psi(\rho) = G = D = 0$ из (2.1) и (2.5) получаем

$$\sigma_r = -\frac{2(\rho_0 m_1 - m_2)}{1 - \rho_0^2} (\xi_0 - \xi) + \frac{3}{1 - \rho_0^2} \int_{\rho_0}^1 \left[\left(1 + \frac{1}{3\rho^2} \right) f' + \left(1 - \frac{1}{3\rho^2} \right) \frac{f}{\rho} \right] \omega \rho d\rho - \int_{\rho_0}^{\rho} \left(f' - \frac{f}{\rho} \right) \frac{\omega}{\rho} d\rho \quad (2.12)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r - (f' - f/\rho) \omega, \quad \sigma_z = \sigma_r - (2f' + f/\rho) \bar{\omega} \\ \omega = \sqrt{1 - \tau_{rz}^2} / (f'^2 + f'f/\rho + f^2/\rho^2)^{1/2} \quad (2.13)$$

$$\tau_{rz} = \frac{m_1 - \rho_0 m_2}{1 - \rho_0^2} \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{\rho_0 m_1 - m_2}{1 - \rho_0^2} \rho, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \\ u = v f(\rho) e^{v\xi}, \quad w = -(\rho f)' e^{v\xi} / \rho + H, \quad v = 0$$

Второе дифференциальное уравнение (2.3) превращается в тождество, а первое запишется в виде

$$f'' + \frac{1}{\rho} f' - \left(v^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) f + \frac{2v\tau_{rz}}{\sqrt{1 - \tau_{rz}^2}} \sqrt{f'^2 + \frac{1}{\rho} f' f + \frac{1}{\rho^2} f^2} = 0$$

После решения этого дифференциального уравнения при краевых условиях (2.4) по формулам (2.12) и (2.13) находим компоненты напряжений и скорости перемещения, а по (2.9) или по (2.10) — силу впрессовывания.

4. При весьма малых значениях v в системе уравнений (2.3), принимая $v=0$, приходим к двум отдельным дифференциальным уравнениям

$$f'' + f'/\rho - f/\rho^2 = 0, \quad \psi' - \psi/\rho = 0 \quad (2.14)$$

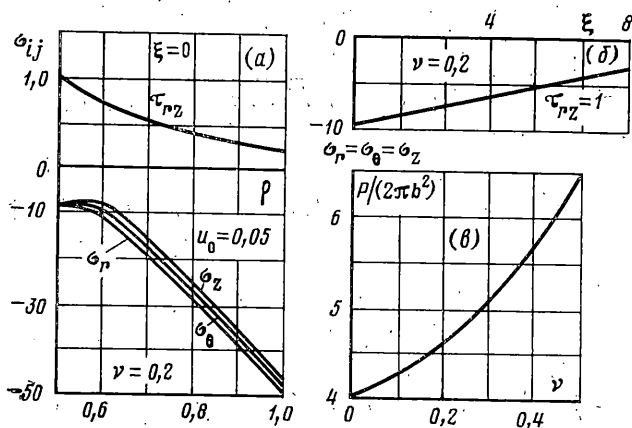
решение которых при краевых условиях (2.4) и (2.6), соответственно, будет

$$f = \rho_0 u_* (1/\rho - \rho) / (1 - \rho_0^2), \quad \psi = \beta \rho$$

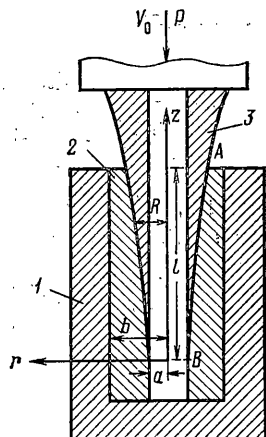
$$\beta = \frac{u_*}{1 - \rho_0^2} \sqrt{\frac{m_2^2 - \rho_0^6 m_1^2}{\rho_0^4 m_1^2 - m_2^2}}, \quad \rho_0^3 < \frac{m_2}{m_1} < \rho_0^2$$

Подставляя (2.14) в формулы напряжений (2.1), получим

$$\sigma_r = -\frac{2(\rho_0 m_1 - m_2)}{1 - \rho_0^2} (\xi_0 - \xi) - \frac{2\sqrt{3}}{1 - \rho_0^2} \int_{\rho_0}^1 \left(1 + \frac{1}{3\rho^4} \right) \omega_0 \rho d\rho + \\ + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\omega_0}{\rho^3} d\rho, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\omega_0}{\rho^2} \\ \sigma_z = \sigma_r + \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{3\rho^2} \right) \omega_0, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\sqrt{m_2^2 - \rho_0^6 m_1^2}}{(1 - \rho_0^2)^{1/2}} \frac{1}{\rho^2} \quad (2.15)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\tau_{rz} = \frac{m_1 - \rho_0 m_2}{1 - \rho_0^2} \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{\rho_0 m_1 - m_2}{1 - \rho_0^2} \rho, \quad \tau_{\theta z} = \beta \rho \omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{1 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2} / (1 + \beta^2 \rho^2 + 1/3 \rho^4)^{1/2}$$

Скорости перемещений согласно (2.2) будут равны

$$u = \frac{\nu \rho_0 u_*}{1 - \rho_0^2} \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right) e^{\nu \xi}, \quad v = 2\beta \rho e^{\nu \xi}, \quad w = \frac{2u_* \rho_0}{1 - \rho_0^2} e^{\nu \xi} \quad (2.16)$$

Сила впредсвивания и момент вращения определяются по (2.10) и (2.11), причем значение T находится по формуле

$$T = -\sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{3\rho_0^2} \right) \omega_0(\rho_0) + \frac{2\sqrt{3}}{1 - \rho_0^2} \int_{\rho_0}^1 \left(1 + \frac{1}{3\rho^4} \right) \omega_0 \rho d\rho$$

При отсутствии вращения $\psi(\rho) = M = 0$. Тогда в формулах (2.15), (2.16) следует положить $\omega_0 = \sqrt{3} \rho^2 (1 - \tau_{rz}^2)^{1/2} / (1 + 3\rho^4)^{1/2}$, $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = v = 0$.

На основании численных расчетов, выполненных на ЭВМ ЕС-1022 по формулам (2.12), (2.15) и (2.10), на фиг. 3 построены графики напряжений и силы впредсвивания ($\rho = \rho_0 = 0,5$ для фиг. 3, б).

3. Внешнее внедрение. Пусть теперь цилиндрическая труба (2) с внутренним и внешним радиусами a и b , соответственно, из идеально пластического материала (алюминиевый сплав) плотно насажена на недеформируемую трубу (1) (пресс-форму), на которую с наружной стороны соосно впредсвивается, одновременно вращаясь вокруг своей оси в положительном направлении, труба (3) из значительно более твердого материала (стальной сплав) с внутренним, монотонно возрастающим по оси трубы относительным радиусом $R = 1 - u_0 \exp(\nu \xi)$. Материал этой трубы считается абсолютно жестким, а координатную систему закрепляем с ним, как в случае внутреннего внедрения (фиг. 4). Принимаем, что деформируемая труба по всей толщине при $z > 0$ переходит в чисто пластическое состояние.

Заменяя в выражениях (2.1), (2.2) знак функции $f(\rho)$ на обратный, компоненты напряжений представим в виде

$$\sigma_r = -2A - 2B\xi + \int_{\rho_0}^{\rho} \left(f' - \frac{f}{\rho} \right) \frac{\omega}{\rho} d\rho$$

Разлагая в степенной ряд экспоненциальные функции и ограничиваясь первыми двумя членами, получаем

$$P/(\pi b^2) = 2\xi_0(1-u_0)(m_2 + \nu u_0 T) \quad (3.7)$$

Вращающий момент будет равен

$$M = \frac{4\pi b^3 m_2 \psi(1)}{\sqrt{f'^2(1) + 4\psi^2(1)}} \int_0^{\xi_0} (1 - u_0 e^{\nu \xi})^2 \sqrt{1 + \nu^2 u_0^2 e^{2\nu \xi_0}} d\xi$$

3. При отсутствии вращения жесткой трубы, полагая $\psi(\rho) = G = D = 0$, из (3.1), (3.2) и (2.5) получаем формулы для напряжений и скоростей перемещений

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -\frac{2(m_2 - \rho_0 m_1)}{1 - \rho_0^2} (\xi_0 - \xi) - \frac{3}{1 - \rho_0^2} \int_0^1 \left[\left(1 + \frac{1}{3\rho^2} \right) f' + \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{1}{3\rho^2} \right) \frac{f}{\rho} \right] \omega_0 \rho d\rho + \int_0^{\rho} \left(f' - \frac{f}{\rho} \right) \frac{\omega}{\rho} d\rho \\ \sigma_\theta = & \sigma_r + (f' - f/\rho) \omega, \quad \sigma_z = \sigma_r + (2f' + f/\rho) \omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\rho_0 m_1 - m_2}{1 - \rho_0^2} \rho - \frac{m_1 - \rho_0 m_2}{1 - \rho_0^2} \frac{\rho_0}{\rho}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$$

$$\omega = \sqrt{1 - \tau_{rz}^2 / (f'^2 + f'f/\rho + f^2/\rho^2)}^{1/2}$$

$$u = -\nu f(\rho) e^{\nu \xi}, \quad w = (\rho f)' e^{\nu \xi} / \rho + H, \quad v = 0 \quad (3.9)$$

Второе дифференциальное уравнение (3.3) превращается в тождество, а первое переписывается в виде

$$f'' + \frac{1}{\rho} f' - \left(\nu^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) f - \frac{2\nu \tau_{rz}}{(1 - \tau_{rz}^2)^{1/2}} \sqrt{f'^2 + \frac{1}{\rho} f'f + \frac{1}{\rho^2} f^2} = 0$$

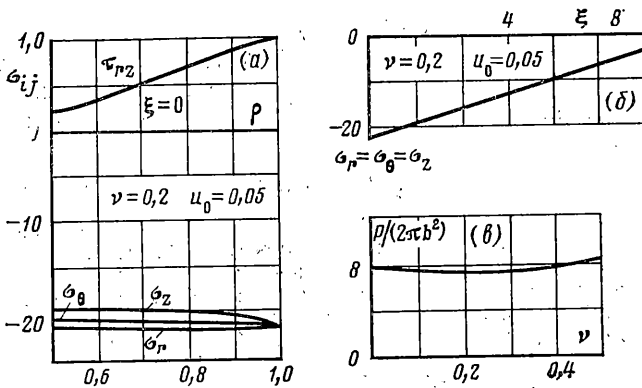
4. При весьма малых значениях ν система (3.3) сводится к дифференциальным уравнениям (2.14), решения которых при граничных условиях (3.4), (2.6) будут $f = \rho_0 u_*(\rho/\rho_0 - \rho_0/\rho)/(1 - \rho_0^2)$, $\psi = \beta \rho$. Формулы напряжений (3.8) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -2 \frac{m_2 - \rho_0 m_1}{1 - \rho_0^2} (\xi_0 - \xi) - \frac{2\sqrt{3}}{1 - \rho_0^2} \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\rho_0^2}{\rho^4} \right) \omega_0 \rho d\rho + \\ & + \frac{2}{\sqrt{3}} \rho_0^2 \int_0^{\rho} \frac{\omega_0}{\rho^3} d\rho, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \omega_0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) \omega_0, \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{1 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2}}{(1 + \beta^2 \rho^2 + 1/3 \rho_0^4 / \rho^4)^{1/2}}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sqrt{m_2 - \rho_0^6 m_1^2}}{(1 - \rho_0^2)^{1/2}} \frac{1}{\rho^2}, \quad \tau_{\theta z} = \beta \rho \omega_0$$

$$\tau_{rz} = \frac{(\rho_0 m_1 - m_2) \rho}{1 - \rho_0^2} - \frac{(m_1 - \rho_0 m_2) \rho_0}{(1 - \rho_0^2) \rho}$$



Фиг. 6

Скорости перемещений, соответственно, будут

$$u = -\frac{\nu u_* \rho_0}{1 - \rho_0^2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{\rho_0}{\rho} \right) e^{\nu \xi}, \quad v = -2\beta \rho e^{\nu \xi}, \quad w = \frac{2u_*}{1 - \rho_0^2} e^{\nu \xi} \quad (3.11)$$

Сила впрессовывания определится по формуле (3.7), причем

$$T = \frac{2\sqrt{3}}{1 - \rho_0^2} \int_{\rho_0}^1 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\rho_0^2}{\rho^4} \right) \omega_0 \rho d\rho - \frac{2}{\sqrt{3}} \rho_0^2 \int_{\rho_0}^1 \frac{\omega_0(\rho)}{\rho^3} d\rho - \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{3} \rho_0^2 \right) \frac{\sqrt{1 - m_2^2}}{(1 + \beta^2 + 1/3\rho_0^4)^{1/2}}$$

При отсутствии вращения $\beta = M = 0$ в формулах (3.10), (3.11) следует положить $\omega_0 = \sqrt{3} \rho^2 (1 - \tau_{rz}^2)^{1/2} / (\rho_0^4 + 3\rho^4)^{1/2}$, $\tau_{r\theta} = \tau_{rz} = \nu = 0$.

На фиг. 6 показаны результаты численных расчетов, выполненных на ЭВМ-1022 по формулам (3.10), (3.7) для напряжений и силы впрессовывания (на фиг. 6, б $\tau_{rz}(1) = -1$, $\rho = 1$).

4. Случай цилиндрических слоев. Полученные в предыдущих пунктах результаты можно применять при внедрении разнородных цилиндрических слоев. Пусть цилиндрический слой из идеально пластического материала (алюминиевый сплав) плотно помещен в пресс-форму, состоящую из недеформируемой цилиндрической поверхности $r = b$ и идеально гладких жестких осевых плоскостей $\theta = \pm \theta_0$; в него соосно впрессовывается цилиндрический слой из значительно более твердого материала (стальной сплав) с наружным относительным радиусом $R = \rho_0 + u_0 e^{\nu \xi}$ и ограниченный осевыми сечениями $\theta = \pm \theta_0$. Напряженное состояние и поле скоростей перемещений деформируемого слоя определяются согласно формулам (2.12), (2.13) или (2.15), (2.16), а сила впрессовывания будет $\theta_0 P / \pi$, где P находится по формуле (2.9) или (2.10).

При внешнем внедрении полагаем, что цилиндрический слой из мягкого материала помещен в пресс-форму, которая ограничена недеформируемой поверхностью $r = a$, жесткими, идеально гладкими осевыми плоскостями $\theta = \pm \theta_0$, и в него соосно вдавливаются цилиндрический слой из значительно более твердого материала с внутренним относительным радиусом $R = 1 - u_0 e^{\nu \xi}$ и с осевыми сечениями $\theta = \pm \theta_0$. Напряжения и скорости перемещений в этом случае определяются по формулам (3.8), (3.9) или (3.10), (3.11), а сила впрессовывания будет равна $\theta_0 P / \pi$, где P дается согласно (3.6) или (3.7).

Отметим, что все окончательные выражения для компонентов напряжений следует умножить на $k = \sigma_s / \sqrt{3}$ (σ_s — предел текучести материала при одноосном растяжении), а выражения для скоростей перемещений — на b .

Автор благодарит проф. С. С. Григоряна за обсуждение работы и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шоршоров М. Х., Колесниченко В. А., Алексин В. П.* Клинопрессовая сварка давлением разнородных металлов. М.: Металлургия, 1982. 112 с.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
3. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
4. *Ивлев Д. Д.* Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах. — Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 6, с. 988–990.
5. *Zyczkowski M.* The limit load of a thick-walled tube in a general circularly symmetrical case. — Arch. mech. stosowanej, 1956, t. 8. No. 2, p. 155–178.
6. *Paparalli J. E., Hodge P. G., Jrn.* Interaction of pressure, end load and twisting moment for a rigid-plastic circular tube. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1963, v. 30, No. 3, p. 396–400.
7. *Задоян М. А.* Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности. — Докл. АН АрмССР, 1964, т. 39, № 5, с. 265–269.
8. *Задоян М. А.* О двух задачах теории идеальной пластичности. — Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук, 1964, т. 17, № 6, с. 73–81.

Ереван

Поступила в редакцию
3.X.1984