МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1985

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИЗОТРОПНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

МЕХТИЕВ М. Ф.

В [1–3] методом однородных решений были исследованы вынужденные колебания изотропного полого цилиндра под действием осесимметричных нагрузок, приложенных к торцам цилиндра. В зависимости от частоты вынуждающих сил изучена возможная форма волнообразования в полом цилиндре. Изучено асимптотическое поведение решения трехмерной динамической задачи теории упругости при стремлении параметра тонкостенности к нулю.

В публикуемой работе предлагается асимптотический процесс для нахождения частот свободных осесимметричных колебаний изотропного полого цилиндра. Подробно асимптотический процесс строится для шарнирно опертого в торцах цилиндра со свободными боковыми поверхностями.

1. Рассматривается осесимметричная задача о собственных колебаниях изотропного полого цилиндра при следующих граничных условиях:

$$\sigma_r=0,\ \tau_{rz}=0 \ \text{при}\ r=R_n\ \ (n=1,2) \tag{1.1}$$

$$u_r=0,\quad \sigma_z=0\quad \text{при}\quad z=\pm l \tag{1.2}$$

Решение строим в виде (R_0 — радиус срединной поверхности оболочки):

$$u_r=a(\rho)\sin p\xi e^{i\omega t},\qquad u_z=b(\rho)\cos p\xi e^{i\omega t}$$
$$\rho=r/R_0,\qquad \xi=z/R_0,\qquad p=\pi k/l \tag{1.3}$$

Учитывая систему дифференциальных уравнений Ламе, граничные условия (1.2) и используя результаты [1], для $a(\rho)$, $b(\rho)$ окончательно получим

$$a=-aJ_1(\alpha\rho)C_1-\alpha Y_1(\alpha\rho)C_2+pJ_1(\gamma\rho)C_3+pY_1(\gamma\rho)C_4$$
$$b=pJ_0(\alpha\rho)C_1+pY_0(\alpha\rho)C_2+\gamma J_0(\gamma\rho)C_3+\gamma Y_0(\gamma\rho)C_4$$
$$\alpha^2=[{}^1/_2(1-2\nu)\lambda^2]/(1-\nu)-p^2,\qquad \gamma^2=\lambda^2-p^2$$
$$\lambda^2=[2(1+\nu)m_0R_0{}^2\omega^2]/E$$

где ν — коэффициент Пуассона, m_0 — плотность материала оболочки, $J_k(x)$, $Y_k(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Учитывая граничные условия (1.1), относительно C_i получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений. Условие существования нетривиальных решений этой системы приводит к частотному уравнению относительно λ^2:

$$\Delta(\lambda^2,p,\rho_1,\rho_2)=-8\pi^{-2}\rho_1{}^{-1}\rho_2{}^{-1}p^2\delta^4-4^{-1}\rho_1{}^{-1}\rho_2{}^{-1}\lambda^4\alpha^2L_{11}(\alpha)L_{11}(\gamma)+$$
$$+2^{-1}\rho_1{}^{-1}\alpha^2\lambda^2p^2\gamma L_{10}(\gamma)L_{11}(\alpha)+2^{-1}\rho_2{}^{-1}\alpha^2\lambda^2p^2\gamma L_{01}(\gamma)L_{11}(\alpha)+$$
$$+2^{-1}\rho_1{}^{-1}\alpha\lambda^2\delta^4L_{10}(\alpha)L_{11}(\gamma)+2^{-1}\rho_2{}^{-1}\alpha\lambda^2\delta^4L_{01}(\alpha)L_{11}(\gamma)-\alpha^2\gamma^2p^4L_{00}(\gamma)L_{11}(\alpha)-$$
$$-\delta^8L_{00}(\alpha)L_{11}(\gamma)-\alpha\gamma p^2\delta^4[L_{01}(\alpha)L_{10}(\gamma)+L_{01}(\gamma)L_{10}(\alpha)]=0$$
$$\delta^2={}^1/_2\lambda^2-p^2,\qquad L_i(\psi)=J_i(\psi\rho_1)Y_i(\psi\rho_2)-J_i(\psi\rho_2)Y_i(\psi\rho_1)$$
$$L_{ij}(\psi)=J_i(\psi\rho_1)Y_j(\psi\rho_2)-J_j(\psi\rho_2)Y_i(\psi\rho_1)\quad (i,j=0,1)$$

Левая часть уравнения (1.5) как трансцендентная целая функция параметра λ^2 имеет счетное множество нулей с точкой сгущения на бесконечности, асимптотическое поведение которого будет рассмотрено.

2. Проведем анализ нулей частотного уравнения (1.5). Для эффективного изучения корней частотного уравнения, как и в [1], сделаем некоторые предположения относительно геометрических параметров цилиндра. Положим

$$\rho_1=1-\varepsilon,\quad \rho_2=1+\varepsilon,\ 2\varepsilon=(R_2-R_1)/R_0=2h/R_0 \tag{2.1}$$

Считаем, что ε — малый параметр. Подставляя (2.1) в уравнение (1.5), получим

$$D(\lambda^2,\ p,\ \varepsilon)=\Delta(\lambda^2,\ p,\ \rho_1,\ \rho_2)=0 \tag{2.2}$$

Случай $p=0$ рассматривается отдельно.

Относительно нулей $D(\lambda^2,\ p,\ \varepsilon)$ можно сформулировать следующее утверждение: для любого конечного p ($p=O(\varepsilon^\beta)$, $\beta\geqslant 0$ при $\varepsilon\to 0$) функция $D(\lambda^2,\ p,\ \varepsilon)$ имеет конечное число нулей со следующими асимптотическими свойствами $\Lambda_k=O(\varepsilon^q)$, $q\geqslant 0$ ($\Lambda^2=(m_0\omega^2R_0^2)/E$).

Приведем схему доказательства этого утверждения. Для этого разложим $D(\lambda^2,\ p,\ \varepsilon)$ в ряд по ε:

$$\begin{aligned}D(\lambda^2,\ p,\ \varepsilon)=16(1+\nu)^2(1-\nu)^{-2}\Lambda^4\varepsilon^2\langle-(1-\nu^2)^2\Lambda^4+\\ +(1-\nu^2)\Lambda^2p^2+(1-\nu^2)\Lambda^2-(1-\nu^2)p^2+{}^1/_3\{-p^6+\\ +[2(1+\nu)(3-2\nu)\Lambda^2-4(1-\nu^2)]p^4-[(1+\nu)^2(4\nu^2-16\nu+11)\Lambda^4+\\ +2(1+\nu)(2\nu^2+9\nu-9)\Lambda^2+9(1-\nu^2)]p^2+2(1-\nu^2)(1+\nu)^2(3-4\nu)\Lambda^6-\\ -2(1+\nu)^2(6\nu^2-14\nu+7)\Lambda^4+9(1-\nu^2)\Lambda^2\}\varepsilon^2+{}^1/_{45}(-8p^8+\ldots)\varepsilon^4+\ldots\rangle=0\end{aligned} \tag{2.3}$$

Допустим, что главные члены асимптотики Λ_k и p имеют вид

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}\varepsilon^q,\quad p=p_0\varepsilon^\beta,\quad \Lambda_{k0}=O(1),\quad p_0=O(1)\quad (q\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3), из условия непротиворечивости построенного асимптотического процесса получаем, что здесь возможен только случай $q=0$ и $q=\beta$.

Отметим, что здесь и в дальнейшем иногда основной интервал изменения параметров q и β будем разбивать на подынтервалы, так как в зависимости от того, на каком интервале находятся q и β, нули функции $D(\lambda^2,\ p,\ \varepsilon)$ имеют различные асимптотические представления.

В первом случае ($q=0$, $p=p_0\varepsilon^\beta$, $\beta>0$) ищем Λ_k ($k=1$) в виде

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon^{2\beta}\Lambda_{k1}+\ldots \tag{2.5}$$

После подстановки (2.5) в (2.3) получаем

$$\begin{aligned}&\Lambda_{k0}^2=1/(1-\nu^2),\quad \Lambda_{k2}=\nu^2p_0^2/[2(1-\nu^2)\Lambda_{k0}]\quad (0<\beta<1)\\ &\Lambda_{k2}=1/[2(1-\nu^2)\Lambda_{k0}][\nu^2p_0^2+(3\nu+1)/3(1-\nu)]\quad (\beta=1)\\ &\Lambda_{k2}=(3\nu+1)/[6(1-\nu)(1-\nu^2)\Lambda_{k0}]\quad (\beta>1)\end{aligned} \tag{2.6}$$

Во втором случае ($q=\beta$) отыскиваем Λ_k ($k=2$) в виде

$$\Lambda_k=\varepsilon^\beta(\Lambda_{k0}+\Lambda_{k2}\varepsilon^{2\beta}+\ldots) \tag{2.7}$$

Тогда из (2.3) получим

$$\Lambda_{k0}^2=p_0^2,\quad \Lambda_{k2}=-{}^1/_2\nu^2p_0^4/\Lambda_{k0} \tag{2.8}$$

Эти частоты являются частотами так называемых сверхнизкочастотных колебаний.

Наконец, рассмотрим случай, когда $q=\beta=0$. Ищем Λ_k в виде

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon^2\Lambda_{k2}+\ldots\quad (k=1,\ 2) \tag{2.9}$$

$$\Lambda_{k0}^2=2^{-1}(1-\nu^2)^{-1}[p^2+1-(-1)^k\sqrt{(p^2-1)^2+4\nu p^2}] \tag{2.10}$$

$$\Lambda_{k2}=6^{-1}\Lambda_{k0}^{-1}[p^2+1-2(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2]^{-1}\{p^6+[4(1-\nu^2)-$$
$$-2(1+\nu)(3-2\nu)\Lambda_{k0}^2]p^4+[(1+\nu)^2(4\nu^2-16\nu+11)\Lambda_{k0}^4+$$
$$+2(1+\nu)(2\nu^2+9\nu-9)\Lambda_{k0}^2+9(1-\nu^2)]p^2-2(1+\nu)^2(1-\nu^2)(3-4\nu)\Lambda_{k0}^6+$$
$$+2(1+\nu)^2(6\nu^2-14\nu+7)\Lambda_{k0}^4-9(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2\}$$

Итак, доказано, что при фиксированных конечных p имеется две частоты собственных колебаний.

Рассмотрим случай, когда p безгранично растет при $\varepsilon\to 0$. Здесь будем рассматривать только следующие предельные случаи: $p\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$; $p\varepsilon\to\mathrm{const}$ при $\varepsilon\to 0$.

Определим вначале такие Λ_k $(k=1, 2)$, когда $p\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Для этого опять используем разложения (2.3). Допустим, что главные члены асимптотики Λ_k и p имеют вид

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}\varepsilon^{-q},\quad p=p_0\varepsilon^{-\beta},\quad \Lambda_{k0}=O(1),\quad p_0=O(1) \tag{2.11}$$
$$(0\leqslant q<1,\ 0<\beta<1)$$

Нетрудно доказать, что $q\leqslant\beta$. Здесь отдельно будем рассматривать случаи, когда $q=0$ и $q=\beta$.

В первом случае из разложения (2.3) получаем, что $0<\beta<{}^1/_2$. Случай $\beta={}^1/_2$ рассматривается отдельно. Отыскиваем Λ_k $(k=1)$ в виде

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon^{\beta}\Lambda_{k1}+\varepsilon^{2\beta}\Lambda_{k2}+\ldots\quad (0<\beta\leqslant{}^1/_3) \tag{2.12}$$

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon^{\beta}\Lambda_{k1}+\varepsilon^{2-4\beta}\Lambda_{k2}+\ldots\quad ({}^1/_3<\beta<{}^1/_2) \tag{2.13}$$

После подстановки этих разложений в (2.3) получаем

$$\Lambda_{k0}^2=1,\quad \Lambda_{k1}=0,\quad \Lambda_{k2}=-{}^1/_2\nu^2p_0^{-2}/\Lambda_{k0}\quad (\beta\neq{}^1/_3) \tag{2.14}$$
$$\Lambda_{k2}={}^1/_6p_0^4/[(1-\nu^2)\Lambda_{k0}]-{}^1/_2\nu^2p_0^{-2}/\Lambda_{k0}\quad (\beta={}^1/_3)$$

$$\Lambda_{k0}^2=1,\quad \Lambda_{k1}=0,\quad \Lambda_{k2}={}^1/_6p_0^4/[(1-\nu^2)\Lambda_{k0}] \tag{2.15}$$

В случае, когда $q=0$, $\beta={}^1/_2$, получаем

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon\Lambda_{k1}+\ldots,\quad \Lambda_{k0}^2=1+{}^1/_3p_0^4/(1-\nu^2) \tag{2.16}$$
$$\Lambda_{k1}=10^{-1}(7\nu-17)(1+\nu)\Lambda_{k0}^3/p_0^2-$$
$$-10^{-1}(24\nu^2-10\nu-29)\Lambda_{k0}/p_0^2-{}^6/_5(1-\nu^2)/(\Lambda_{k0}p_0^2)$$

Аналогично в случае $q=\beta$ из (2.3) получаем

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}\varepsilon^{-\beta}+\Lambda_{k1}+\Lambda_{k2}\varepsilon^{\beta}+\ldots\quad (k=1, 2),\quad (0\leqslant\beta\leqslant{}^1/_2) \tag{2.17}$$
$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}\varepsilon^{-\beta}+\Lambda_{k1}+\Lambda_{k2}\varepsilon^{2-3\beta}+\ldots\quad (k=1, 2),\quad ({}^1/_2<\beta<1)$$
$$\Lambda_{k0}^2=p_0^2/(1-\nu^2),\quad \Lambda_{k1}=0$$
$$\Lambda_{k2}=2^{-1}\nu^2/[(1-\nu^2)\Lambda_{k0}]\quad (\beta\neq{}^1/_2)$$
$$\Lambda_{k2}={}^1/_2[1+3^{-1}p_0^4/(1-\nu)^2]\nu^2/[(1-\nu^2)\Lambda_{k0}]\quad (\beta={}^1/_2)$$
$$\Lambda_{k0}^2=p_0^2/(1-\nu^2),\quad \Lambda_{k1}=0$$
$$\Lambda_{k2}=6^{-1}\nu^2p_0^4/[(1-\nu^2)(1-\nu)^2\Lambda_{k0}]$$

В случае $q\neq 0$, $q<\beta$, подставив (2.11) в (2.3) и сохраняя только главные члены, для Λ_{k0} получаем следующие предельные уравнения:

$$D(\lambda^2, p, \varepsilon)=16(1+\nu)^2(1-\nu)^{-2}\varepsilon^{\alpha_1}\Lambda_{k0}^4\langle[(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2p_0^2+ \tag{2.18}$$
$$+O(\varepsilon^{\alpha_2})]\varepsilon^{\alpha_3}+{}^1/_3\{-p_0^6+O[\max(\varepsilon^{\alpha_4}, \varepsilon^{\alpha_5})]\}\varepsilon^{\alpha_6}\rangle=0$$
$$\alpha_1=2-4q,\quad \alpha_2=2(\beta-q),\quad \alpha_3=-2(q+\beta)$$
$$\alpha_4=4-2\beta,\quad \alpha_5=2-2q-2\beta,\quad \alpha_6=2-6\beta$$

Отсюда получаем $q=2\beta-1$. А из условия $q>0$ имеем $\beta>{}^1/_2$. Таким образом, ${}^1/_2<\beta<1$. Отыскиваем теперь Λ_k в виде

$$\Lambda_k=\varepsilon^{1-2\beta}(\Lambda_{k0}+\varepsilon^{2(1-\beta)}\Lambda_{k2}+\ldots)\quad(k=1) \tag{2.19}$$

После подстановки в (2.3) получаем

$$\Lambda_{k0}{}^2={}^1/_3 p_0{}^4/(1-\nu^2),\quad \Lambda_{k2}=10^{-1}(7\nu-17)(1+\nu)\Lambda_{k0}{}^3/p_0{}^2 \tag{2.20}$$

$$\Lambda_{k2}=10^{-1}(7\nu-17)(1+\nu)\Lambda_{k0}{}^3/p_0{}^2+2^{-1}/\Lambda_{k0}\quad(\beta={}^2/_3)$$

Рассмотрим второй случай, когда $p\varepsilon\to\mathrm{const}$ при $\varepsilon\to0$ ($\lambda\varepsilon\to\mathrm{const}$ при $\varepsilon\to0$). Отыскиваем λ_n ($n=k-2$, $k=3, 4, \ldots$) в виде

$$\lambda_n=\delta_n/\varepsilon+O(\varepsilon),\quad p=p_0\varepsilon^{-1}\quad(n=1, 2, \ldots) \tag{2.21}$$

После подстановки (2.21) в (1.5) и преобразования его с помощью асимптотических разложений функций $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ при больших значениях аргумента для δ_n получаем уравнение

$$\begin{gathered}[(\delta_n{}^2-2p_0{}^2)^2\sin\alpha_n\cos\gamma_n+\\ +4\alpha_n\gamma_n p_0{}^2\cos\alpha_n\sin\gamma_n][(\delta_n{}^2-2p_0{}^2)^2\cos\alpha_p\sin\gamma_n+\\ +4\alpha_n\gamma_n p_0{}^2\sin\alpha_n\cos\gamma_n]=0\end{gathered} \tag{2.22}$$

$$\alpha_n{}^2={}^1/_2(1-2\nu)\delta_n{}^2/(1-\nu)-p_0{}^2,\qquad \gamma_n=\delta_n{}^2-p_0{}^2.$$

При заданных p_0 трансцендентное уравнение (2.22) определяет счетное множество λ_n. Следует отметить, что уравнение (2.22) фактически совпадает с частотным уравнением Релея — Лэмба для упругого слоя [4].

В принципе возможен случай

$$p=p_0\varepsilon^{-1},\quad \lambda=O(1)\quad(p\gg\lambda)\ \text{при}\ \varepsilon\to0 \tag{2.23}$$

В этом случае

$$\alpha=i\alpha^*,\quad \gamma=i\gamma^*,\quad J_\nu(\alpha x)=J_\nu(i\alpha^*x) \tag{2.24}$$

$$Y_\nu(\alpha x)=Y_\nu(i\alpha^*x),\ J_\nu(\gamma x)=J_\nu(i\gamma^*x),\ Y_\nu(\gamma x)=Y_\nu(i\gamma^*x)$$

$$\alpha^*=\sqrt{p^2-2^{-1}(1-2\nu)\lambda^2/(1-\nu)},\quad \gamma^*=\sqrt{p^2-\lambda^2}$$

После подстановки (2.23), (2.24) в уравнение (1.5) и преобразования его с помощью асимптотических разложений функций $J_\nu(ix)$, $Y_\nu(ix)$ при больших значениях аргумента для $D(\lambda^2, p, \varepsilon)$ в первом члене асимптотики получаем

$$D(\lambda^2, p, \varepsilon)=\mathrm{sh}^2\,2p_0-4p_0{}^2+O(\varepsilon) \tag{2.25}$$

Вещественный параметр p не может быть решением уравнения $\mathrm{sh}^2\,2p_0-4p_0{}^2=0$, так как это уравнение имеет только комплексные нули. Поэтому в этом случае $D(\lambda^2, p, \varepsilon)\neq0$. Таким образом, в указанном случае колебаний не существует.

Как было отмечено, в случае $p=0$ краевая задача разбивается на две:

$$u_r=a_0(\rho)e^{i\omega t},\quad u_z\equiv0\quad(\tau_{rz}\equiv0) \tag{2.26}$$

$$u_r\equiv0,\quad u_z=b_0(\rho)e^{i\omega t}\quad(\sigma_r=\sigma_\varphi=\sigma_z\equiv0) \tag{2.27}$$

Подставляя (2.26) и (2.27) в уравнение Ламе и граничные условия (1.1), соответственно, получаем

$$a_0''+(1/\rho)a_0'+(\alpha_0{}^2-1/\rho^2)a_0=0,\quad \alpha_0{}^2=2^{-1}(1-2\nu)\lambda^2/(1-\nu) \tag{2.28}$$

$$(1-\nu)a_0'+(\nu/\rho)a_0=0\quad\text{при}\ \rho=\rho_s\quad(s=1, 2) \tag{2.29}$$

$$b_0''+(1/\rho)b_0'+\lambda^2b_0=0 \tag{2.30}$$

$$b_0'=0\quad\text{при}\ \rho=\rho_s \tag{2.31}$$

Общие решения уравнений (2.28) и (2.30) имеют вид

$$a_0=C_1J_1(\alpha_0\rho)+C_2Y_1(\alpha_0\rho),\quad b_0=D_1J_0(\lambda\rho)+D_2Y_0(\lambda\rho) \tag{2.32}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.29) и (2.31), получаем частотные уравнения соответствующих задач:

$$D_1^0(\alpha_0,\ \varepsilon)=\alpha_0^2L_{11}(\alpha_0)/\rho_1\rho_2-\rho_1^{-1}\alpha_0\lambda^2L_{10}(\alpha_0)- \\ -\rho_2^{-1}\alpha_0\lambda^2L_{01}(\alpha_0)+4^{-1}\lambda^4L_{00}(\alpha_0)=0 \tag{2.33}$$

$$D_2^0(\lambda,\ \varepsilon)=L_{11}(\lambda)=0 \tag{2.34}$$

Можно показать, что уравнение (2.34) при $\varepsilon\to0$ имеет один ограниченный нуль $\lambda=0$, которому соответствует решение $b_0=1$, описывающее движение как твердого тела.

Уравнение (2.33) при $\varepsilon\to0$ имеет один ограниченный нуль со следующими асимптотическими свойствами:

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon^2\Lambda_{k2}+\ldots \tag{2.35}$$

Из (2.33) получаем

$$\Lambda_{k0}^2=1/(1-\nu^2),\quad \Lambda_{k2}=6^{-1}(3\nu+1)/[(1-\nu)(1-\nu^2)\Lambda_{k0}] \tag{2.36}$$

Ищем $\lambda_n^{(i)}$ в виде разложения

$$\lambda_n^{(i)}=s_n^{(i)}/\varepsilon+O(\varepsilon) \tag{2.37}$$

где $i=1$ соответствует уравнению (2.33), а $i=2$ – уравнению (2.34). После подстановки (2.37) в уравнения (2.33) и (2.34) получаем

$$s_n^{(1)}={}^1/_2\sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}\,n\pi,\qquad s_n^{(2)}={}^1/_2n\pi \tag{2.38}$$

Следуя терминологии [4], такие частоты будем называть частотами запирания. Решения, соответствующие частотам, определяемым из формул (2.35) и в первой (2.38), описывают радиальные колебания, а частоты, определяемые из второй формулы (2.38), чисто продольные колебания.

Отметим, что дисперсионное уравнение (2.2) имеет еще группу нулей со следующими асимптотическими свойствами:

$$\lambda=\lambda_0\varepsilon^{-1},\quad p=p_0\varepsilon^{-\beta}\quad (0<\beta<1) \tag{2.39}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае в первом члене асимптотики получаем частоту, определяемую формулой (2.35) и (2.37).

3. Теперь для сравнения приведем частотные уравнения, получаемые по теории Кирхгофа – Лява. Частотное уравнение имеет вид

$$(1-\nu^2)^2\Lambda^4-(1-\nu^2)\Lambda^2p^2-(1-\nu^2)\Lambda^2+ \\ +p(1-\nu^2)+{}^1/_3(p^6-p^4)\varepsilon^2=0 \tag{3.1}$$

Проведем асимптотический анализ частотного уравнения Кирхгофа – Лява для наиболее характерных случаев.

Из (3.1) можно получить следующие группы нулей:

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon^2\Lambda_{k1}+\ldots\quad (q=0,\ \beta=0) \tag{3.2}$$

$$\Lambda_{k0}^2=2^{-1}(1-\nu^2)^{-1}[p^2+1-(-1)^k\sqrt{(p^2-1)^2+4\nu p^2}]$$

$$\Lambda_{k1}=6^{-1}(1-\nu^2)^{-1}[p^2+1-2(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2]\Lambda_{k0}^{-2}(p^6-p^4)$$

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon\Lambda_{k1}+\ldots\quad (q=0,\ \beta={}^1/_2) \tag{3.3}$$

$$\Lambda_{k0}^2=1+{}^1/_3p_0^4/(1-\nu^2),\qquad \Lambda_{k1}=2^{-1}p_0^{-2}\Lambda_{k0}^{-1}[(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^4-2\Lambda_{k0}^2+1]$$

$$\Lambda_k=\varepsilon^{1-2\beta}(\Lambda_{k0}+\varepsilon^{2-2\beta}\Lambda_{k1}+\ldots)\quad (q\neq0,\ q<\beta) \tag{3.4}$$

$$\Lambda_{k0}^2 = {}^1/_3 p_0^4/(1-\nu^2)$$

$$\Lambda_{k1} = 2^{-1} p_0^{-2} \Lambda_{k0} [(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2 - 1]$$

$$\Lambda_{k1} = 2^{-1} p_0^{-2} \Lambda_{k0}^{-1} [(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^4 - \Lambda_{k0}^2 + p_0^2]$$

Сравнивая (3.2), (3.3), (3.4) с точным разложением (2.9), (2.16), (2.19), получаем, что первые члены разложения совпадают, последующие же члены существенно отличаются. Что касается частот собственных колебаний, определяемых формулами (2.22) и (2.37), то они в прикладной теории оболочек отсутствуют.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мехтиев М. Ф.* Асимптотический анализ динамической задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины.– Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1982, № 5, с. 62–67.
2. *Мехтиев М. Ф.* Асимптотическое исследование напряженно-деформированного состояния динамической задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины.– Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1982, № 6, с. 28–32.
3. *Мехтиев М. Ф.* Сверхвысокочастотные колебания изотропного полого цилиндра.– Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1983, № 4, с. 50–54.
4. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
5. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.

Баку

Поступила в редакцию
29.X.1984