МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1985

УДК 531.383

ПОЛНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ТИПА

ГОРЕЛОВА Е. Я., СТРЫГИН В. В.

Излагается способ полного разделения движения в некоторых механических системах на асимптотически больших отрезках времени.

1. Известно [1], что большой класс механических систем описывается уравнениями вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+[HG(x)+B(x)]\frac{dx}{dt}=f_0(x)+f\left(x,\frac{dx}{dt}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $HG(x)$ — матрица гироскопических сил, зависящая от большого параметра H, $B(x)$ — симметрическая положительно-определенная матрица, характеризующая диссипативные силы, $f_0(x)$, $f(x, dx/dt)$ — слагаемые, характеризующие потенциальные и другие силы системы, причем $f(x, dx/dt)$ имеет порядок не ниже второго по координатам dx/dt, т. е.

$$f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\in N\\ k_1+k_2+\ldots+k_n=2}}^{\infty} f_{k_1k_2\ldots k_n}(x,t)\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^{k_1}\ldots\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^{k_n}$$

Задача Коши для систем типа (1.1) изучалась в ряде работ. Схема метода регуляризации [2] реализована в [3] для систем более общего вида, чем (1.1), на конечном отрезке времени. В [4] построено разложение решения задачи Коши для систем вида (1.1) в ряды Ляпунова. На асимптотически больших отрезках времени решение задачи Коши для (1.1) может быть найдено приближенно методом усреднения по известной схеме В. М. Волосова [5]. Этот подход нашел отражение в работе [6] и других.

В публикуемой работе предлагается алгоритм построения асимптотического разложения решения задачи Коши для системы вида (1.1), равномерно пригодного на отрезке $t\in[0, TH]$, где T — положительное число. При этом систему (1.1) удобно представить в виде

$$\frac{dx}{dt}=y,\qquad \varepsilon\frac{dy}{dt}=-[G(x)+\varepsilon B(x)]y+\varepsilon\sum_{s\in S}\rho_s(x)[y]^s \tag{1.2}$$

Здесь $\varepsilon=1/H$, n — целое положительное число, x, y — n-мерные векторы, причем $x\in D$, где D — ограниченная область в R^n, $G(x)$ — вещественная кососимметрическая $n\times n$-матрица при всех $x\in D$, $B(x)$ — диагональная $n\times n$-матрица с положительными элементами $b_j(x)$ $(j=1,\ldots,n)$ на главной диагонали, $t\in[0, T/\varepsilon]$; через S обозначено множество таких n-мерных целочисленных векторов $s=(s_1,\ldots,s_n)$ с неотрицательными координатами s_j $(j=1,\ldots,n)$, что $|s|=\sum_{j=1}^{n}s_j\leqslant N_0$, $|s|\neq1$; при каждом

$s \in S$ $\rho_s(x)$ — вектор-функция со значениями в R^n, а $[y]^s = (y_1)^{s_1} \ldots (y_n)^{s_n}$.

Предполагается, что при $x \in D$ все собственные значения $g_j(x)$ ($j = 1, \ldots, n$) матрицы $G(x)$ различны и отличны от нуля.

Через $T(x)$ обозначим вещественную ортогональную матрицу, приводящую $G(x)$ к канонической кососимметрической форме [7], через U — блочно-диагональную матрицу

$$U = \operatorname{diag}\left\{\left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{matrix} \right\|, \ldots, \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{matrix} \right\|\right\}$$

Тогда матрица $H(x) = T(x)U$ будет приводить матрицу $G(x)$ к диагональной форме $\Lambda(G)$.

Пусть матрицы $G(x)$, $B(x)$, $T(x)$, $T^{-1}(x)$ и вектор-функции $\rho_s(x)$ ($s \in S$) бесконечно дифференцируемы в области $x \in D$.

Далее рассматривается алгоритм построения асимптотики решения системы (1.2), удовлетворяющего начальным условиям

$$x(0, \varepsilon) = \alpha, \quad y(0, \varepsilon) = \varepsilon\beta, \quad \alpha \in D, \quad \beta \in R^n \tag{1.3}$$

Как показано в [8], при некоторых предположениях у системы (1.2) существует устойчивое интегральное многообразие $y = h(x, \varepsilon)$, на котором осуществляется медленное давление, которое приближенно отыскивается в виде $X = v(\xi) + \varepsilon v_1(\xi)$, $Y = \varepsilon y_1(\xi) + \varepsilon^2 y_2(\xi)$, $\xi = \varepsilon t$. Для нахождения v, v_1, y_1, y_2 следует подставить X и Y в (1.2), разложить правые части (1.2) в ряды по степеням ε в окрестности $\varepsilon = 0$ и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε. При этом получаются уравнения

$$dv/d\xi = y_1 = G^{-1}(v)\rho_0(v), \quad \rho_0(v) = \rho_{(0, 0, \ldots, 0)}(v) \tag{1.4}$$

$$dv_1/d\xi = y_2 = G^{-1}(v)[-G_x(v)v_1y_1 + \rho_{0x}(v)v_1 - B(v)y_1] \tag{1.5}$$

Пусть решение $v(\xi)$ уравнения (1.4) с начальным условием $v(0) = \alpha$ определено и принадлежит области D при всех $\xi \in [0, T]$, а решение $v_1(\xi)$ линейного уравнения (1.5), удовлетворяющее начальному условию $v_1(0) = 0$, существует и ограничено при всех $\xi \in [0, T]$.

Введем обозначения $L(\xi) \equiv B(v(\xi)) + G_x(v(\xi))v_1(\xi)$, $M(\xi, \varepsilon) \equiv G(v(\xi)) + \varepsilon L(\xi)$.

Для любой квадратной матрицы V символ $d(V)$ будет обозначать диагональную матрицу, главная диагональ которой совпадает с главной диагональю матрицы V. Пусть

$$B_1(\xi) = d(H^{-1}(v(\xi))L(\xi)H(v(\xi))), \quad \Lambda(M(\xi, \varepsilon)) = \Lambda(G(v(\xi))) + \varepsilon B_1(\xi)$$

$$Z = \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Lambda(M(\varepsilon\tau, \varepsilon))\,d\tau\right\}$$

N — некоторое натуральное число ($N \geqslant 2$). Через P обозначается множество n-мерных целочисленных векторов $p = (p_1, \ldots, p_n)$ с неотрицательными координатами, таких, что $2 \leqslant |p| = \Sigma p_j \leqslant N$ ($j = 1, \ldots, n$). Наконец, для всякой диагональной матрицы D введем вектор-столбец D_c, координаты которого совпадают с элементами главной диагонали матрицы D, а символ z_p обозначает скалярную функцию $z_p = [Z_c]^p$, $p \in P$.

Непосредственная проверка показывает, что вещественные части всех элементов диагональной матрицы $B_1(\xi)$ положительны при всех $\xi \in [0, T]$, откуда следует, что нормы матрицы Z, вектора Z_c и функции z_p убывают как $\exp(-\eta t)$ с некоторым $\eta > 0$.

Приближенное решение задачи Коши (1.2), (1.3) на отрезке $t \in [0, T/\varepsilon]$ предлагается искать в виде

$$x_N = v(\xi) + \varepsilon v_1(\xi) + \sum_{m=2}^{N} \varepsilon^m \left[v_m(\xi) + X_m(\xi)Z_c + \sum_{p \in P} x_{mp}(\xi)z_p\right] \tag{1.6}$$

$$y_N = \varepsilon(y_1(\xi)+Y_1(\xi)Z_c)+\sum_{m=2}^{N}\varepsilon^m\Big[y_m(\xi)+Y_m(\xi)Z_c+\sum_{p\in P}y_{mp}(\xi)z_p\Big]$$

Здесь $v(\xi)$, $v_1(\xi)$, $y_1(\xi)$, $y_2(\xi)$ — n-мерные вектор-функции, определенные из (1.4), (1.5), $v_m(\xi)$, $x_{mp}(\xi)$, $y_m(\xi)$, $y_{mp}(\xi)$, $m\geqslant 2$, $p\in P$ — n-мерные вектор-функции $\xi\in[0, T]$, $X_m(\xi)$, $Y_m(\xi)$ — $n\times n$-матрицы. Чтобы определить коэффициенты разложений (1.6), нужно функции x_N, y_N подставить в систему (1.2), правые части системы разложить в ряды по степеням ε, затем приравнять соответствующие слагаемые, зависящие только от ξ, слагаемые вида $A(\xi)Z_c$ ($A(\xi)$ — $n\times n$-матрица) и слагаемые вида $a(\xi)z_p$ ($a(\xi)$ — n-мерная вектор-функция). Для вектор-функций $v_m(\xi)$, $m\geqslant 1$ приходим к линейным задачам Коши. Коэффициенты $y_m(\xi)$, $X_m(\xi)$ определяются из алгебраических уравнений. Для определения матрицы $Y_m(\xi)$ при каждом $m\geqslant 1$ получается уравнение

$$Y_m\Lambda(G(v))-G(v)Y_m=F \tag{1.7}$$

Такие уравнения изучались в [2, 9]. Решение Y_m уравнения (1.7) имеет вид $Y_m=H(v(\xi))[D_m(\xi)+C_m(\xi)]$, где $D_m(\xi)$ — диагональная матрица, $C_m(\xi)$ — матрица с нулевой главной диагональю. Элементы матрицы $C_m(\xi)$ находятся из алгебраических уравнений, а элементы диагонали $D_m(\xi)$ — из линейной задачи Коши, которая вытекает из условия разрешимости уравнения для Y_{m+2}. Для $x_{mp}(\xi)$ при каждом $m\geqslant 2$, $p\in P$ получается уравнение вида

$$\begin{gathered} x_{mp}=-\varkappa_{-1p}(\xi)y_{mp}-\varkappa_{0p}(\xi)y_{m-1p}+ \\ +\varphi_{mp}(\xi, x_{m-1p},\dots,x_{2p}, y_{m-2p},\dots,y_{2p}) \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь $\varkappa_{-1p}$, $\varkappa_{0p}, \dots$ — коэффициенты разложения по степеням ε в ряд Лорана $1/(p, \Lambda(M)_c)$: $1/(p, \Lambda(M)_c)=(1/\varepsilon)\varkappa_{-1p}(\xi)+\varkappa_{0p}(\xi)+\varepsilon,\dots$, φ_{mp} — известная функция своих аргументов. При нахождении коэффициента x_{mp}, $m\geqslant 2$, $p\in P$ существенно различаются два случая: коэффициент $\varkappa_{-1p}(\xi)\equiv 0$ и $\varkappa_{-1p}(\xi)\neq 0$, $\xi\in[0, T]$. Поэтому в множестве P естественно выделить подмножества $P_0=\{p\in P\colon \varkappa_{-1p}(\xi)\equiv 0,\ \xi\in[0, T]\}$ и $P_{-1}=\{p\in P\colon \varkappa_{-1p}(\xi)\neq 0,\ \xi\in[0, T]\}$.

Предположим, что $P=P_0\cup P_{-1}$. Совместно с уравнением (1.8) следует рассмотреть уравнение для коэффициентов y_{mp}. Чтобы это уравнение разрешалось относительно y_{mp} при каждом $p\in P$, достаточно, чтобы была обратима матрица $M(\xi, \varepsilon)-(p, \Lambda(M)_c)E$.

Пусть выполняется одно из условий $(p, \Lambda(G(v))_c)\equiv g_j(\xi)$, $\xi\in[0, T]$ $(j=1,\dots,n)$, либо $(p, \Lambda(G(v))_c)\neq g_j(\xi)$, $\xi\in[0, T]$ $(j=1,\dots,n)$, а матрица $M(\xi, \varepsilon)-(p, \Lambda(M)_c)E$ обратима при всех $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$, $\xi\in[0, T]$, $p\in P$ и $[M(\xi, \varepsilon)-(p, \Lambda(M)_c)E]^{-1}=\varepsilon^{-1}\Gamma_{-1p}(\xi)+\Gamma_{0p}(\xi)+\varepsilon\Gamma_{1p}(\xi)+\varepsilon^2\dots$

При выполнении этих условий y_{mp} определяется в виде

$$\begin{gathered} y_{mp}=\Gamma_{0p}[\rho_{0x}(v)-(G(v)y_1)_x]x_{m-1p}+ \\ +\sum_{\substack{q\in P\\ |q|\leqslant|p|}} f_{mp}(y_{m-1q},\dots,y_{2q}, Y_{m-1},\dots,Y_1, x_{m-2q},\dots,x_{2q},\xi) \end{gathered} \tag{1.9}$$

где f_{mp} — известная функция своих аргументов. Функцию y_{mp} в виде (1.9) следует подставить в (1.8) и определить тем самым x_{mp}.

Теорема. Пусть N — целое положительное число, $N\geqslant 2$. Пусть выполнены все указанные выше предположения. Тогда существует такое $\varepsilon_0>0$, что задача Коши (1.2), (1.3) имеет единственное решение x, y на отрезке $t\in[0, T/\varepsilon]$, причем для некоторого $C(N)>0$ имеет место оценка $|x-x_N|\leqslant C\varepsilon^{N+1}$, $|y-y_N|\leqslant C\varepsilon^{N+1}$, равномерная по $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$, $t\in[0, T/\varepsilon]$.

Предложенный алгоритм может быть использован для асимптотического интегрирования систем более общего вида. Например, можно считать, что матрица $G(x)$ имеет n различных чисто мнимых отличных от нуля собственных значений и элементы главной диагонали матрицы $H^{-1}(v(\xi))L(\xi)H(v(\xi))$ имеют положительные вещественные части при всех $\xi\in[0, T]$.

2. В качестве приложения рассматривается следующая задача. Пусть твердое тело имеет сферическую полость радиуса a, в которой находится другое твердое тело сферической формы радиуса, близкого к a, распределение масс в котором обладает сферической симметрией. В узком зазоре между сферой и стенками полости действуют силы вязкого трения. Толщина зазора считается постоянной и малой. Такая модель была предложена М. А. Лаврентьевым как модель для описания движения твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью (см. также работу [10]).

Пусть O_1 — центр инерции системы с демпфером, $O_1x_1x_2x_3$ — декартова система координат, связанная с главными осями тензора инерции J системы относительно точки O_1. Обозначим E_0 — единичный тензор, J_0 — тензор инерции системы относительно точки O_1 при условии, что вся масса демпфера сосредоточена в его центре, тогда $J_0=J-IE_0$, где I — момент инерции демпфера относительно его диаметра. Пусть ω и ω_1 — угловые скорости тела и демпфера, соответственно, в инерциальной системе координат $O_1y_1y_2y_3$. Тогда уравнения движения свободного твердого тела с демпфером имеют вид [10]:

$$J_0\cdot\omega^{\cdot}+\omega\times(J_0\cdot\omega)=k(\omega_1-\omega) \tag{2.1}$$
$$I\omega_1^{\cdot}+I\omega\times\omega_1=-k(\omega_1-\omega),\qquad k>0$$

точка означает производную вектора в системе координат $O_1x_1x_2x_3$. Далее вводятся следующие обозначения. Проекции векторов ω и ω_1 на оси O_1x_1, O_1x_2, O_1x_3 обозначим p, q, r и p_1, q_1, r_1 соответственно, а главные значения тензора инерции J_0 в этих же осях — A_0, B_0, C_0. Пусть $I=1$, $B_0=C_0$, $A_0>B_0$, $p=Hs$, $p_1=Hs_1$, где H — большой положительный параметр. При этих предположениях система (2.1) примет вид

$$\begin{aligned}
&s^{\cdot}=k(s_1-s)/A_0 && \varepsilon r^{\cdot}=[(A_0-B_0)sq+\varepsilon k(r_1-r)]/B_0\\
&s_1^{\cdot}=k(s-s_1)+\varepsilon(q_1r-r_1q) && \varepsilon q_1^{\cdot}=sr_1-rs_1+\varepsilon k(q-q_1)\\
&\varepsilon q^{\cdot}=[(B_0-A_0)rs+\varepsilon k(q_1-q)]/B_0 && \varepsilon r_1^{\cdot}=qs_1-sq_1+\varepsilon k(r-r_1)
\end{aligned} \tag{2.2}$$
$$\varepsilon=1/H$$

Пусть

$$x=\begin{Vmatrix} s\\ s_1\end{Vmatrix},\quad y=\begin{Vmatrix} q\\ r\\ q_1\\ r_1\end{Vmatrix},\quad P=\begin{Vmatrix} -\dfrac{1}{A_0} & \dfrac{1}{A_0}\\ 1 & -1\end{Vmatrix},\quad f(y)=\begin{Vmatrix} 0\\ rq_1-qr_1\end{Vmatrix}$$

$$G(x)=\begin{Vmatrix} 0 & (A_0-B_0)s/B_0 & 0 & 0\\ (B_0-A_0)s/B_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & s_1 & 0 & -s\\ -s_1 & 0 & s & 0\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} B_0^{-1} & 0 & -B_0^{-1} & 0\\ 0 & B_0^{-1} & 0 & -B_0^{-1}\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{Vmatrix}$$

$$k=\gamma\varepsilon,\qquad \gamma>0$$

Тогда систему (2.2) можно записать в виде

$$x^{\cdot}=\varepsilon\gamma Px+\varepsilon f(y),\qquad \varepsilon y^{\cdot}=-G(x)y-\varepsilon^2\gamma By \tag{2.3}$$

Начальные условия зададим в виде

$$x(0,\varepsilon)=\alpha,\qquad y(0,\varepsilon)=\varepsilon\beta \tag{2.4}$$

где $\alpha\in R^2$, $\beta\in R^4$ — постоянные векторы. Матрица $G(x)$ не является кососимметрической. Однако собственные значения $g_j(x)$ матрицы $G(x)$ являются чисто мнимыми: $g_{1,2}(x)=\pm is$, $g_{3,4}(x)=\pm i(A_0-B_0)s/B_0$. Условие $g_j\neq g_k$, $j\neq k$ выполняется, если $(A_0-B_0)/B_0\neq\pm 1$ при

$$A_0\neq 2B_0 \tag{2.5}$$

В соответствии с алгоритмом вводится переменная $\xi=\varepsilon t$ и решение задачи Коши (2.3), (2.4) ищется в виде

$$x=x_0(\xi)+\varepsilon^3,\ldots,\qquad y=[\varepsilon Y_1(\xi)+\varepsilon^2 Y_2(\xi)+\varepsilon^3\ldots]Z_c \tag{2.6}$$

Здесь x_0 — 2-мерный вектор, Y_1, $Y_2,\ldots$ — 4×4-матрицы, B_1 — неизвестная пока диагональная матрица

$$Z=\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t[\Lambda(G(\varepsilon\tau))+\varepsilon^2\gamma B_1(\tau\varepsilon)]d\tau\right\}$$

Выражения (2.6) нужно подставить в систему (2.3) и формально приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получающаяся при этом задача Коши для $x_0(\xi)$:

$$dx_0/d\xi=\gamma Px_0,\qquad x_0(0)=\alpha=(s^0,\ s_1{}^0)^T \tag{2.7}$$

имеет решение

$$s(\xi)=\frac{(s^0-s_1{}^0)e^{a\xi}+A_0s^0+s_1{}^0}{A_0+1}$$

$$s_1(\xi)=\frac{A_0(s_1{}^0-s^0)e^{a\xi}+A_0s^0+s_1{}^0}{A_0+1},\qquad a=-\frac{\gamma}{A_0+1} \tag{2.8}$$

Для $Y_1(\xi)$ получается уравнение $-Y_1\Lambda(G(x_0))=-G(x_0)Y_1$, решение которого $Y_1(\xi)=H(\xi)D_1(\xi)$. Здесь $H(\xi)$ — матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $G(x_0(\xi))$, $D_1(\xi)$ — диагональная матрица. Приравнивая во втором из уравнений в (2.3) коэффициенты при ε^3, нетрудно получить уравнение

$$-Y_1\gamma B_1-Y_3\Lambda(G)-dY_1/d\xi=-GY_3-\gamma BY_1 \tag{2.9}$$

Уравнения такого типа описаны в п. 1. Его решение записывается в виде $Y_3(\xi)=H(\xi)(D_3(\xi)+C_3(\xi))$, где $D_3(\xi)$ — диагональная матрица, $C_3(\xi)$ — матрица с нулевой главной диагональю. После преобразований уравнение (2.9) примет вид $\Lambda(G)C_3-C_3\Lambda(G)=\gamma H^{-1}BHD_1+dD_1/d\xi-\gamma D_1B_1-$ $-H^{-1}dH/d\xi D_1$. Для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы $d(\gamma H^{-1}BHD_1+dD_1/d\xi-\gamma D_1B_1-H^{-1}dH/d\xi D_1)=0$.

Если положить $B_1=d(H^{-1}BH)$, это условие эквивалентно равенству $dD_1/d\xi=d(H^{-1}dH/d\xi)D_1$. Нетрудно убедиться в том, что $d(H^{-1}dH/d\xi)=0$, так как

$$H=\begin{Vmatrix}1&1&0&0\\ i&-i&0&0\\ \varkappa&\varkappa&1&1\\ i\varkappa&-i\varkappa&-i&i\end{Vmatrix},\qquad H^{-1}=\begin{Vmatrix}1/2&-i/2&0&0\\ 1/2&i/2&0&0\\ -\varkappa/2&-i\varkappa/2&1/2&i/2\\ -\varkappa/2&i\varkappa/2&1/2&-i/2\end{Vmatrix}$$

где $\varkappa=s_1B_0/sA_0$. В результате для $D_1(\xi)$ получается уравнение $dD_1(\xi)/d\xi=$ $=0$, откуда $D_1(\xi)=D_1(0)$. Из условия $Y_1(0)Z_c(0)=\beta$ находится $D_{1c}(0)=$ $=H^{-1}(0)\beta$. Итак, определены функции

$$x=x_0(\xi),\qquad y=\varepsilon H(\xi)D_1(0)Z_c,\qquad \xi=\varepsilon t \tag{2.10}$$

удовлетворяющие системе (2.3) с точностью до $O(\varepsilon^3)$. Теперь остается выяснить, при выполнении каких условий норма матрицы Z (или норма вектора Z_c) убывает как $\exp(-\delta t)$ с некоторым $\delta>0$. Очевидно, для этого достаточно, чтобы все элементы матрицы

$$B_1=d(H^{-1}BH)=\operatorname{diag}\left\{\frac{1-\varkappa}{B_0},\frac{1-\varkappa}{B_0},\frac{s_1}{sA_0}+1,\frac{s_1}{sA_0}+1\right\}$$

были положительны, т. е.

$$-A_0<s_1(\xi)/s(\xi)>A_0/B_0 \qquad (2.11)$$

Обратимся к задаче Коши (2.7), которая в скалярной форме имеет вид $ds/d\xi=\gamma(s_1-s)/A_0$, $ds_1/d\xi=\gamma(s-s_1)$, $s(0)=s^0$, $s_1(0)=s_1^0$.

Если первое уравнение умножить на s_1/s^2, второе — на $1/s$, и из второго вычесть первое, то получится дифференциальное уравнение для функции $w=s_1/s$ вида

$$dw/d\xi=\gamma(1-w)(1+w/A_0) \qquad (2.12)$$

Можно убедиться в том, что $w=1$ — асимптотически устойчивое положение равновесия (2.12), а $w=-A_0$ — неустойчивое положение равновесия этого уравнения. При этом $dw/d\xi>0$, если $w\in(-A_0, 1)$, и $dw/d\xi<0$, если $w\in(-\infty, -A_0)\cup(1, +\infty)$. Поэтому для выполнения неравенства (2.11) необходимо и достаточно, чтобы

$$-A_0<(s_1^0/s^0)<(A_0/B_0) \qquad (2.13)$$

Таким образом, при выполнении условий (2.5), (2.13) и рассмотренных предположений приближенное решение задачи Коши (2.3), (2.4) представимо в виде (2.10) при t, изменяющемся на асимптотически большом промежутке $[0, T/\varepsilon]$. Это приближенное решение стремится к некоторому положению равновесия при $t\to+\infty$.

Авторы благодарят А. Б. Васильеву, А. И. Кобрина, Ю. Г. Мартыненко за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
2. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.
3. *Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г.* Асимптотическое решение слабо нелинейной системы.– Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 6, с. 1008–1019.
4. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 317 с.
5. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
6. *Sethna P. R., Balachandra M. Balu.* On Nonlinear Gyroscopic Systems.– In: Mechanics Today. V. 3. N. Y.: Pergamon Press, 1976, p. 191–242.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
8. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Метод интегральных многообразий в задаче о приемлемости решения прецессионных уравнений гироскопических систем.– В кн.: Проблемы устойчивости движения аналитической механики и управления движением. Новосибирск: Наука, 1979, с. 38–43.
9. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
10. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию
26.X.1983