МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1985

УДК 539.3

ЗАКРИТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОЙ СФЕРЫ

ЗЕЛЕНИН А. А., ЗУБОВ Л. М.

Исследуется ветвление форм равновесия толстостенной замкнутой сферической оболочки, нагруженной равномерным давлением. Проблема рассматривается в точной трехмерной постановке на основе уравнений нелинейной теории упругости. При построении решений, мало отличающихся от докритического радиально симметрического состояния равновесия, применен метод Ляпунова – Шмидта в операторной форме. Для сферы из полулинейного материала найдены собственные функции линеаризованной задачи, вычислены коэффициенты уравнения разветвления, определены критические значения внешнего давления, число ответвляющихся решений и даны их асимптотические представления при нагрузках, близких к критической.

1. Рассмотрим равновесие упругого полого шара, нагруженного по внешней поверхности равномерным следящим давлением интенсивности q. Дифференциальные уравнения равновесия при отсутствии массовых сил имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{P}=0,\qquad \nabla=\mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e}_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta}+\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{P}$ — несимметричный тензор напряжений Пиолы, r, θ, φ — сферические координаты в недеформированном состоянии тела, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ — единичные векторы, касательные к координатным линиям. Граничные условия поставленной задачи таковы

$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{P}|_{r=r_1}=0,\quad \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{P}|_{r=r_0}=-qJ\mathbf{e}_r\cdot(\mathbf{C}^T)^{-1}$$
$$J=\det\mathbf{C},\quad \mathbf{C}=\nabla\mathbf{R} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки деформированного тела, $\mathbf{C}$ — градиент деформации, r_0 и r_1 — внешний и внутренний радиусы шара.

В качестве определяющего соотношения принимается модель полулинейного материала [1—3]:

$$\mathbf{P}=2\mu[\nu s_1(1-2\nu)^{-1}-1)U^{-1}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{C}]$$
$$\mathbf{U}=(\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^T)^{1/2},\qquad s_1=tr\mathbf{U}-3 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{U}$ — тензор искажения, μ, ν — постоянные. В области малых деформаций μ и ν имеют смысл, соответственно, модуля сдвига и коэффициента Пуассона.

Краевая задача (1.1)—(1.3) имеют следующее радиально симметричное решение [1—3]:

$$\mathbf{R}^0=(Q_1\eta+Q_2\eta^{-2})\mathbf{e}_r,\quad Q_2={}^1/_2\nu_1k_1(Q_1-1)$$
$$Q_1=1-\frac{2\nu_1(1-k_1+pk_1)+4p-2\sqrt{\nu_1(1-k_1)[4p+\nu_1(1-k_1+2pk_1)]}}{p(2+\nu_1k_1)^2} \tag{1.4}$$
$$\nu_1=(1+\nu)/(1-2\nu),\quad p={}^1/_2q/\mu,\quad k_1=r_1^3/r_0^3,\quad \eta=r/r_0$$

Отыщем осесимметричные формы равновесия, близкие к решению (1.4), т. е. положим

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}^0+u(\eta,\theta)\mathbf{e}_r+v(\eta,\theta)\mathbf{e}_\theta \tag{1.5}$$

Подставив (1.5) в (1.1)—(1.3), получим нелинейную краевую задачу относительно $u(\eta,\theta)$, $v(\eta,\theta)$:

$$l(x,D)w(x)=f(x,w) \tag{1.6}$$

$$b(x,D)w(x)=F(x,w) \text{ при } \eta=1,\ \eta=k \tag{1.7}$$

$$x=(\eta,\theta),\quad w=(u,v),\quad f=(f_1,f_2),\quad F=(F_1,F_2)$$

$$k=r_1/r_0,\quad l(x,D)w(x)\equiv[l_{11}(x,D)u(x)+$$
$$+l_{12}(x,D)v(x),\ l_{21}(x,D)u(x)+l_{22}(x,D)v(x)]$$

$$b(x,D)w(x)\equiv[b_{11}(x,D)u(x)+b_{12}(x,D)v(x),\ b_{21}(x,D)u(x)+b_{22}(x,D)v(x)]$$

$$l_{11}(x,D)=\partial_1(\partial_1+2\eta^{-1})+\gamma\eta^{-2}(\partial_2+\operatorname{ctg}\theta)\partial_2$$

$$l_{12}(x,D)=(1-\gamma)\eta^{-1}(\partial_2+\operatorname{ctg}\theta)\partial_1+(1+\gamma)\eta^{-2}(\partial_2+\operatorname{ctg}\theta)$$

$$l_{21}(x,D)=(1-\gamma)\eta^{-1}\partial_1\partial_2+\eta^{-1}(d\gamma/d\eta)\partial_2+2\eta^{-2}\partial_2$$

$$l_{22}(x,D)=\eta^{-2}\partial_2(\partial_2+\operatorname{ctg}\theta)+\gamma(\partial_1+2\eta^{-1})\partial_1+(d\gamma/d\eta)(\partial_1+\eta^{-1})$$

$$f_1=\nu_2^{-1}\{\nu_3(Q-M)\eta^{-1}-HQ^{-1}[\partial_1M-\eta^{-1}(\partial_2N-M+Q+$$
$$+N\operatorname{ctg}\theta)]-\varkappa_3\varkappa_1^{-1}\eta^{-1}(\partial_2N+N\operatorname{ctg}\theta)-(MQ^{-1}-1)\partial_1H+N\eta^{-1}(Q^{-1}\partial_2H-M_2)+MM_1\}$$

$$f_2=\nu_2^{-1}\{\nu_3(Q-M)\eta^{-1}\operatorname{ctg}\theta-HQ^{-1}[\partial_1N+\eta^{-1}(\partial_2M+N)+$$
$$+\eta^{-1}(M-Q)\operatorname{ctg}\theta]+\varkappa_3\varkappa_1^{-1}(\partial_1N+\eta^{-1}N)+M\eta^{-1}M_2-$$
$$-\eta^{-1}(MQ^{-1}-1)\partial_2H+N[\varkappa_1^{-1}(d\varkappa_3/d\eta)-Q^{-1}\partial_1H]+$$
$$+NM_1-N\varkappa_3\varkappa_1^{-2}(d\varkappa_1/d\eta)\}$$

$$b_{11}(x,D)=\nu_3(\partial_1+2\eta^{-1})+\partial_1+2p_1\varkappa_2\eta^{-2}$$

$$b_{12}(x,D)=(\nu_3\eta^{-1}+p_1\varkappa_2\eta^{-2})(\partial_2+\operatorname{ctg}\theta)$$

$$b_{22}(x,D)=(\nu_2\gamma-1)(\partial_1+\eta^{-1})+\partial_1+p_1\varkappa_2\eta^{-2}$$

$$b_{21}(x,D)=\eta^{-1}(1-\nu_2\gamma-p_1\varkappa_2\eta^{-1})\partial_2$$

$$F_1=H(1-MQ^{-1})+p\eta^{-2}(\partial_2v+u)(u+v\operatorname{ctg}\theta)$$

$$F_2=N(\varkappa_3\varkappa_1^{-1}-HQ^{-1})+p\eta^{-2}(\partial_2u-v)(u+v\operatorname{ctg}\theta)$$

$$\partial_1=\partial/\partial\eta,\quad \partial_2=\partial/\partial\theta,\quad \varkappa_1=2Q_1-Q_2\eta^{-3}$$

$$\nu_2=(1-\nu)/(1-2\nu),\quad \nu_3=\nu/(1-2\nu),\quad \varkappa_2=Q_1\eta+Q_2\eta^2$$

$$\varkappa_3=\nu_3\varkappa_2-\nu_1,\quad \gamma=[3\nu Q_1-\nu-1+\varkappa_1(1-2\nu)](1-\nu)^{-1}\varkappa_1^{-1}$$

$$N=\partial_1v+\eta^{-1}(v-\partial_2u),\quad M=\partial_1u+\eta^{-1}(u+\partial_2v)+\varkappa_1$$

$$H=\nu_3\eta^{-1}(u+v\operatorname{ctg}\theta)+\varkappa_3,\quad Q=(M^2+N^2)^{1/2}$$

$$M_1=HQ^{-3}(M\partial_1M+N\partial_1N),\quad M_2=HQ^{-3}(M\partial_2M+N\partial_2N),$$

$$p_1=p(\eta=1),\quad p_1=0\ (\eta=k)$$

Дифференциальные выражения l и b в левой части (1.6), (1.7) являются линейными, а f и F не содержат линейных составляющих. Это означает, что если положить $u=\varepsilon u^0$, $v=\varepsilon v^0$, то формальное разложение выражений f и F по степеням параметра ε будет начинаться с членов второго порядка.

В качестве параметра в краевую задачу (1.6), (1.7) входит безразмерное давление p.

2. Можно показать, что при $\nu=0{,}5$ система (1.6) правильно эллиптическая, а граничные условия (1.7) являются дополнительными [4]. Это дает возможность использовать результаты теории эллиптических систем. Поставим в соответствие левым частям уравнения (1.6), (1.7) линейный оператор $Aw\equiv(lw,bw)$, который определим на банаховом пространстве $E_1\equiv W_2^2(G)\oplus W_2^2(G)$, где $G:(k\leqslant\eta\leqslant1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$; тогда область значений

этого оператора принадлежит банахову пространству $E_2 \equiv L_2(G) \oplus L_2(G) \oplus \oplus W_2^{1/2}(\Gamma) \oplus W_2^{1/2}(\Gamma)$, где $\Gamma : (0 \leq \theta \leq \pi, \eta = 1, \eta = k)$. Здесь $W_2^2(G)$ — пространство Соболева, $L_2(G)$ — пространство Лебега, $W_2^{1/2}(\Gamma)$ — пространство Слободецкого; знаком $\oplus$ определена прямая сумма пространств.

Предположим, что искомые функции u, v принадлежат пространству $W_2^4(G)$. Тогда можно показать, что правые части уравнений (1.6), (1.7) принадлежат E_2. Это позволяет записать краевую задачу (1.6), (1.7) в операторном виде

$$Aw = \tau, \quad \tau \equiv (f, F) \tag{2.1}$$

Выпишем условие разрешимости уравнения (2.1), воспользовавшись результатами [4]. Можно проверить, что оператор A совпадает со своим формально сопряженным оператором, а граничные условия (1.7) являются T-нормальными, поэтому необходимым и достаточным условием существования решения уравнения (2.1) будет равенство

$$\int_G (f_1\varphi_r^1 + f_2\varphi_r^2)\, dG - \nu_2^{-1} \int_\Gamma (F_1\varphi_r^1 + F_2\varphi_r^2)\, d\Gamma = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, s) \tag{2.2}$$

Здесь φ_r^1, φ_r^2 — компоненты собственных вектор-функций φ_r оператора A, образующих базис подпространства нулей этого оператора, s — размерность этого подпространства.

3. Для нахождения критических давлений, при которых возникает бифуркация равновесия сферы, рассмотрим линеаризованную задачу

$$Aw = 0 \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) совпадает с уравнениями нейтрального равновесия для сферы, полученными в работах [1—3], следуя которым собственные функции задачи (3.1) будем искать в виде

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\eta) P_n(\cos\theta), \qquad v = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\eta) P_n^1(\cos\theta) \tag{3.2}$$

где $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, $P_n^1(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра. Подставив (3.2) в левую часть уравнения (1.6) и решив его относительно a_n, b_n при $f=0$, получаем

$$\begin{gathered} a_n(\eta) = (2n+1)^{-1}[(n+1)B_3\eta^{-n-2} - nB_1\eta^{n-1}]C_1 + \\ + (2n+1)^{-1}[(n+1)B_4\eta^{-n-2} - nB_2\eta^{n-1}]C_2 - n\eta^{n-1}C_3 + (n+1)\eta^{-n-2}C_4 \\ b_n(\eta) = (2n+1)^{-1}[B_1\eta^{n-1} + B_3\eta^{-n-2}]C_1 + (2n+1)^{-1}[B_2\eta^{n-1} + \\ + B_4\eta^{-n-2}]C_2 + \eta^{n-1}C_3 + \eta^{-n-2}C_4 \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$B_1 = \int_k^\eta (n+1)(\gamma^{-1} - 1) z\, dz, \qquad B_2 = \int_k^\eta [(n+1)\gamma^{-1} + n] z^{-2n} dz$$

$$B_3 = \int_k^\eta (n+1+n\gamma^{-1}) z^{2n+2} dz, \qquad B_4 = \int_k^\eta n(\gamma^{-1} - 1) z\, dz$$

где C_r $(r = 1, 2, 3, 4)$ — постоянные интегрирования. Подставляя (3.2) в граничные условия (1.7) с нулевыми правыми частями, получим с учетом (3.3) систему уравнений для определения C_r, которая после преобразования примет вид

$$\{\nu_2(2n+1)[k^{2n+3} + (p\varkappa_2 - 1)^{-1}] + (n+2)B_3\}C_1 + (n+2)B_4C_2 = 0 \tag{3.4}$$

$$(n-1)B_1C_1+\{(n-1)B_2-\nu_2(2n+1)[(p\varkappa_2-1)^{-1}+k^{1-2n}]\}C_2=0$$
$$\nu_2k^{1-2n}C_2+(n-1)C_3=0,\quad \nu_2k^{2n+3}C_1-(n+2)C_4=0\quad (n=1,2,\ldots)$$

Для каждого n, приравнивая определитель системы (3.4) нулю, придем к уравнению, определяющему собственные числа $p=p_0$ задачи (3.1), которые являются функциями от n и k. Случай $n=1$ не рассматривается, так как он соответствует движению сферы как абсолютно твердого тела.

Численное исследование этого уравнения показало, что собственные числа p_0 могут быть простыми и двукратными в зависимости от значений n и k. Если собственное значение p_0 простое, то ему соответствует определенная с точностью до постоянного множителя C_1 собственная функция

$$\varphi_n=(a_nP_n(\cos\theta),\ b_nP_n^1(\cos\theta)) \qquad (3.5)$$

а если p_0 — двукратное, то ему будут соответствовать две собственные функции φ_n, φ_m.

Критическое давление p_* является минимальным собственным значением из набора собственных чисел $p_0(n,k)$, где n принимает последовательно целые значения 2, 3, ... при фиксированном k. Отметим, что в случае, когда p_* двукратное, $m=n-1$ либо $m=n+1$. Ниже приведены критические давления p_*, полученные решением системы (3.4) и числа n, при которых они достигаются, а также критические давления p_*', найденные по формуле теории оболочек [5] для некоторых значений k при $\nu=0{,}3$ ($\Delta, \%=(|p_*-p_*'|/\min(p_*,p_*'))100\%$).

k	0,99	0,97	0,7	0,66438	0,4
p_*'	$1{,}58945\cdot10^{-4}$	$1{,}45969\cdot10^{-3}$	0,196	0,2559	0,1156
p_*	$1{,}59635\cdot10^{-4}$	$1{,}4745\cdot10^{-3}$	0,1877	0,2415	0,5986
n	18	10	3	2,3	2
$\Delta, \%$	0,43	1,01	4,45	6,0	93,15

Видно, что даже для достаточно толстой сферы ($k\approx0,7$) значения p_*' и p_* близки; при $k>0{,}66438$ число узлов искомых форм равновесия всегда будет равно двум.

4. Для построения новых форм равновесия используем теорию, изложенную в [6]. Пусть p_0 — собственное значение оператора A, λ — малый параметр ($|\lambda|<\varepsilon$). Тогда, полагая $p=p_0+\lambda$, (2.1) можно записать в виде

$$A_0w=\tau-Aw+A_0w\equiv h(w),\ h(w)\equiv(t,T),\ t=(f^1,f^2)$$
$$T=(F^1,F^2),\quad f^1=f_1+\eta^{-1}(\gamma-\gamma_0)(\partial_1N+N\operatorname{ctg}\theta) \qquad (4.1)$$
$$f^2=f_2-\eta^{-1}(\gamma-\gamma_0)N-\partial_1(\gamma N-\gamma_0N) \qquad (4.2)$$
$$F^1=F_1-\eta^{-2}p_2(2u+\partial_2v+v\operatorname{ctg}\theta),\quad \gamma_0=\gamma|_{p=p_0}$$
$$F^2=F_2+\eta^{-2}p_2(\partial_2u-v)-\nu_2(\gamma-\gamma_0)N$$
$$p_2=p\varkappa_2-p\varkappa_{20}\ (\eta=1),\ p_2=0\ (\eta=k),\ \varkappa_{20}=\varkappa_2|_{p=p_0}$$

где A_0 — оператор A, в котором p заменено на собственное значение p_0.

Как и в [6], обозначим E_1^s — подпространство нулей оператора A_0 размерности s, $E_1^{\infty-s}$ — дополнение подпространства E_1^s до E_1, A_0' — сужение оператора A_0 на $E_1^{\infty-s}$. В отличие от A_0 оператор A_0' будет иметь ограниченный обратный оператор $\Gamma_0=(A_0')^{-1}$, который используем при построении малых решений уравнений (4.1).

Рассмотрим случай простого собственного значения. Будем искать малые решения уравнения (4.1) в виде ряда

$$w=\xi\varphi_n+\sum_{i=2}^{\infty}w_{i0}\xi^i+\sum_{i=0}^{\infty}\xi^i\sum_{j=1}^{\infty}w_{ij}\lambda^j \qquad (4.3)$$
$$w_{ij}\equiv(u_{ij}(\eta,\theta),\ v_{ij}(\eta,\theta))$$

Здесь ξ — формальный параметр, $\varphi_n=(\varphi_n^1, \varphi_n^2)$ — собственная вектор-функция оператора A_0. Разлагая в правой части (4.1) выражения, содержащие u и v, в ряд по степеням u, v, а члены, содержащие p, — в ряд по степеням λ, получим, учитывая (4.3):

$$h(w)=\sum_{i+j\geqslant 0} h_{ij}\xi^i\lambda^j, \qquad h_{ij}\equiv(t_{ij}, T_{ij}) \tag{4.4}$$

$$t_{ij}\equiv(f_{ij}^1, f_{ij}^2), \quad T_{ij}\equiv(F_{ij}^1, F_{ij}^2)$$

где f_{ij}^1, f_{ij}^2, F_{ij}^1, F_{ij}^2 — коэффициенты разложения функций f^1, f^2, F^1, F^2, определенных соотношениями (4.2).

Подставляя (4.3) в (4.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\xi^i\lambda^j$, с учетом (4.4) получаем рекуррентную систему $A_0'w_{ij}=h_{ij}$ для нахождения w_{ij}, из которой следует $w_{01}=0$, $w_{11}=\Gamma_0 h_{11}$, $w_{20}=\Gamma_0 h_{20}, \ldots$ Для получения уравнения разветвления, определяющего величину ξ, подставим (4.3) в условие разрешимости (2.2) для уравнений (4.1). В результате получим

$$\sum_{i=2}^{\infty} L_{i0}\xi^i+\sum_{i=0}^{\infty}\xi^i\sum_{j=1}^{\infty} L_{ij}\lambda^j=0 \tag{4.5}$$

$$L_{ij}=\int_G (f_{ij}^1\varphi_n^1+f_{ij}^2\varphi_n^2)\,dG-\nu_2^{-1}\int_\Gamma (F_{ij}^1\varphi_n^1+F_{ij}^2\varphi_n^2)\,d\Gamma$$

Первые коэффициенты L_{ij} уравнения (4.5) будут иметь вид

$$L_{11}=2(2n+1)\left[n(n+1)\int_k^1 \eta\gamma_1 c_n^2\,d\eta+\gamma_2(1-p_0\varkappa_{20})^{-1}(a_n d_n+\gamma_0 n(n+1)b_n c_n)\,|_{\eta=1}\right]$$

$$\begin{aligned}L_{20}=\int_0^\pi \sin\theta[P_n(\cos\theta)]^3\,d\theta\Big\{3\int_k^1 \eta\varkappa_{10}^{-1}c_n(\gamma_3 a_n+{}^3/_2 n(n+1)b_n\gamma_3-\eta\varkappa_4\varkappa_{10}^{-1}d_n)\,d\eta+\\+(1-2\nu)p_0[6a_n^2 b_n+4a_n^3(n+1)^{-1}n^{-1}+3a_n b_n^2(1+{}^3/_2 n(n+1))+\\+3n(n+1)b_n^3]\,|_{\eta=1}\Big\}\,n(n+1)[4(1-\nu)]^{-1}, \qquad L_{01}=0, \qquad L_{02}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{30}=(1-\nu)^{-1}\Big\{\int_0^\pi\int_k^1 \eta^2\sin\theta\varkappa_{10}^{-1}N_{10}[2N_{20}(H_{10}\gamma_3-\varkappa_4\varkappa_{10}^{-1}R_{10})+N_{10}(H_{20}\gamma_3-\varkappa_4\varkappa_{10}^{-1}R_{20})-\\-2N_{10}\varkappa_{10}^{-1}(R_{10}-H_{10})(H_{10}\gamma_3-\varkappa_4\varkappa_{10}^{-1}R_{10})-\varkappa_4 N_{10}^3/(2\varkappa_{10}^2)]\,d\eta\,d\theta\Big\}-\\-\nu_2^{-1}p_0\int_0^\pi \sin\theta\{H_{20}[u_{10}(u_{10}+\partial_2 v_{10})-v_{10}(\partial_2 u_{10}-v_{10})+\\+H_{10}[u_{10}(u_{20}+\partial_2 v_{20})-v_{10}(\partial_2 u_{20}-v_{20})]\}\,|_{\eta=1}\,d\theta\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\gamma_1=(1+\nu)(Q_{10}-1)[2-k_1/(2\eta^3)]Q_{30}/[(1-\nu)\varkappa_{10}^2]$$

$$\gamma_2=Q_{10}+Q_{20}+p_0(Q_{10}-1)Q_{30}(1+{}^1/_2\nu_1 k_1)$$

$$\gamma_3=(3\nu Q_{10}-1-\nu)/\varkappa_{10}, \quad \varkappa_4=\nu\varkappa_{20}-1-\nu$$

$$c_n=\gamma_0^{-1}(C_1\eta^n+C_2\eta^{-n-1}), \quad d_n=(n+1)C_1\eta^n-C_2 n\eta^{-n-1}$$

$$N_{10}=\partial_1\varphi_n^2+\eta^{-1}\varphi_n^2-\eta^{-1}\partial_2\varphi_n^1, \quad N_{20}=\partial_1 v_{20}+\eta^{-1}v_{20}-\eta^{-1}\partial_2 u_{20}$$

$$H_{10}=\eta^{-1}(\varphi_n^1+\varphi_n^2\operatorname{ctg}\theta), \quad H_{20}=\eta^{-1}(u_{20}+v_{20}\operatorname{ctg}\theta)$$

$$R_{10}=\partial_1\varphi_n^1+\eta^{-1}\varphi_n^1+\eta^{-1}\partial_2\varphi_n^2+H_{10}, \quad R_{20}=\partial_1 u_{20}+\\+\eta^{-1}u_{20}+\eta^{-1}\partial_2 v_{20}+H_{20}$$

$$Q_{10}=Q_1|_{p=p_0},\quad Q_{20}=Q_2|_{p=p_0},\quad \varkappa_{10}=\varkappa_1|_{p=p_0}$$

$$Q_{30}=\frac{\nu_1(1-k_1)}{p_0\sqrt{\nu_1(1-k_1)[\nu_1(1-k_1)+2p_0(2+\nu_1k_1)]}}$$

Здесь C_1 — произвольная фиксированная постоянная, C_2 определяется из (3.4) с точностью до множителя C_1, φ_n^1, φ_n^2 — компоненты собственной вектор-функции φ_n.

Можно показать, что

$$\int\limits_0^\pi \sin\theta[P_n(\cos\theta)]^2P_k(\cos\theta)\,d\theta=\begin{cases}0, & \text{если}\quad k-\text{нечетное}\\ 0, & \text{если}\quad k>2n\\ \neq 0, & \text{если}\quad k-\text{четное и } k\leqslant 2n\end{cases}\qquad(4.7)$$

Из (4.7) и выражения для L_{20} в (4.6) следует, что $L_{20}=0$, когда n — нечетное, и $L_{20}\neq 0$, когда n — четное. Если n — четное, то приближенно уравнение разветвления (4.5) можно записать в виде $L_{20}\xi^2+L_{11}\xi\lambda\approx 0$; откуда следует, что $\xi=-L_{11}\lambda/L_{20}+o(\lambda)$, и решение (4.3) уравнения (4.1) запишется в форме

$$w=-L_{11}L_{20}^{-1}\varphi_n\lambda+L_{11}^2L_{20}^{-2}\lambda^2w_{20}-L_{11}L_{20}^{-1}\lambda^2w_{11}+o(\lambda^2)$$

Таким образом, в этом случае в полуокрестностях $(p_0-\varepsilon,p_0)$ и $(p_0,p_0+\varepsilon)$ возникает по одному новому решению.

Пусть теперь n — нечетное, тогда $L_{20}=0$, $L_{30}\neq 0$ и уравнение (4.5) примет вид $L_{30}\xi^3+L_{11}\xi\lambda\approx 0$. Отсюда следует, что $\xi=\pm(-\lambda L_{11}/L_{30})^{1/2}+o(\lambda)$ и решение (4.3) уравнения (4.1) запишется так:

$$w=\pm(-L_{11}\lambda/L_{30})^{1/2}\varphi_n-(L_{11}/L_{30})\lambda w_{20}\pm(-L_{11}\lambda/L_{30})^{1/2}\lambda w_{11}+o(\lambda)$$

В зависимости от знака выражения $(-L_{11}/L_{30})$ в одной из полуокрестностей $((p_0-\varepsilon,p_0)$ или $(p_0,p_0+\varepsilon))$ будет возникать два новых решения, а в другой — новых решений возникать не будет.

Численное исследование коэффициентов L_{11}, L_{30} в (4.6) для случая минимального собственного значения p_* при $\nu=0{,}3$ показало, что эти величины всегда отрицательны. Отсюда следует, что в полуокрестностях $(p_*-\varepsilon,p_*)$ возникает два новых решения, т. е. формы равновесия сферы, отличающиеся от радиально-симметричного состояния (1.4), существуют при давлении, меньшем p_*.

Рассмотрим случай двукратного собственного значения. Пусть собственному значению p_0 соответствуют две собственные вектор-функции φ_n, φ_m. Будем искать малые решения уравнения (4.1) в виде ряда

$$w=\xi_1\varphi_n+\xi_2\varphi_m+w_{001}\lambda+\sum_{i+j+k\geqslant 2}w_{ijk}\xi_1^i\xi_2^j\lambda^k\qquad(4.8)$$

Как и для случая однократного собственного значения, получаем уравнения разветвления

$$\sum_{i+j\geqslant 2}L_{ij0}^{(r)}\xi_1^i\xi_2^j+\sum_{i+j\geqslant 0}\xi_1^i\xi_2^j\sum_{k\geqslant 1}L_{ijk}\lambda^k=0\qquad(r=1,2)\qquad(4.9)$$

Для определенности считаем, что n — нечетное, m — четное. В этом случае первые коэффициенты L_{ijk} уравнения (4.9) имеют вид $L_{001}^{(1)}=0$, $L_{001}^{(2)}=0$, $L_{011}^{(2)}=L_{11}$ (с заменой n на m, φ_n на φ_m в (4.6)) $L_{200}^{(1)}=0$, $L_{020}^{(1)}=0$, $L_{020}^{(2)}=L_{20}$ (с заменой n на m, φ_n на φ_m в (4.6)):

$$L_{200}^{(2)}=(1-\nu)^{-1}\int\limits_0^\pi\sin\theta[P_n(\cos\theta)]^2P_m(\cos\theta)\,d\theta\left\{\int\limits_k^1\eta c_n\varkappa_{10}^{-1}[\gamma_3(a_nc_mm_1+\right.$$

$$c_m b_m m_2 + c_n a_m m_3 + {}^1/_2 c_n b_m m_2) - \eta \varkappa_4 \varkappa_{10}^{-1} (d_n c_m m_1 + c_n d_m m_3)]d\eta +$$

$$+(1-2\nu) p_0 [a_n^2 a_m + a_n b_n a_m n(n+1) + a_m b_n^2 (m_3 + {}^1/_2 m_2) + a_n^2 b_m m_1 + a_n b_m b_n m_2 +$$

$$\left. + a_n b_n b_m m_1 + b_n^2 b_m m_2] \,|_{\eta=1} \right\}, \qquad L_{101}^{(2)} = 0, \qquad L_{011}^{(1)} = 0$$

$$L_{101}^{(1)} = L_{11}, \qquad L_{110}^{(2)} = 0, \qquad L_{110}^{(1)} = 2L_{200}^{(2)}, \qquad m_1 = {}^1/_2 m(m+1)$$

$$m_2 = m_1 [2n(n+1) - m_1], \quad m_3 = {}^1/_2 [n(n+1) - m_1]$$

где a_n, b_n, c_n, d_n, $\varkappa_{10}$, $\varkappa_4$, L_{11}, L_{20} определены в (3.3), (4.6).

Уравнения разветвления (4.9) приближенно запишутся так:

$$L_{101}^{(1)} \xi_1 \lambda + L_{110}^{(1)} \xi_1 \xi_2 \approx 0, \qquad L_{011}^{(2)} \xi_2 \lambda + L_{020}^{(2)} \xi_2^2 + L_{200}^{(2)} \xi_1^2 \approx 0 \tag{4.10}$$

Решая (4.10) методом, изложенным в [6], получаем

$$\xi_1 = \alpha_i \lambda + o(\lambda), \quad \xi_2 = \beta_i \lambda + o(\lambda) \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = -\alpha_3 = \sqrt{\Delta} / (L_{110}^{(1)} L_{200}^{(2)}), \qquad \beta_1 = -L_{011}^{(2)} / L_{020}^{(2)}$$

$$\beta_2 = \beta_3 = -L_{101}^{(1)} / L_{110}^{(1)}, \qquad \Delta = L_{101}^{(1)} L_{200}^{(2)} (L_{110}^{(1)} L_{011}^{(2)} - L_{020}^{(2)} L_{101}^{(2)})$$

Отсюда следует, что если $\Delta > 0$, то в полуокрестностях $(p_0-\varepsilon, p_0)$ и $(p_0, p_0+\varepsilon)$ возникают три новых решения, асимптотическое представление которых с учетом того, что в данном случае $w_{001}=0$, примет вид $w_i = \alpha_i \varphi_n \lambda + \beta_i \varphi_m \lambda + o(\lambda)$ $(i=1, 2, 3)$.

Если $\Delta < 0$, то в полуокрестностях $(p_0-\varepsilon, p_0)$, $(p_0, p_0+\varepsilon)$ возникает по одному новому решению, асимптотическое представление которого будет $w = \beta_1 \varphi_m \lambda + o(\lambda)$. Численное исследование при $\nu=0{,}3$ для случая минимального собственного значения показало, что $\Delta < 0$ только при $k=0{,}8043$, когда $n=3$, $m=4$. Во всех остальных случаях $\Delta > 0$.

В случае тонкой сферы найденные число новых решений и окрестности точки p_0, где они возникают, совпадают с результатами, полученными в [7] при использовании уравнений теории оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости для полулинейного материала.– ПММ, 1968, т. 32, вып. 6, с. 1053–1069.
3. *Sensenig C. B.* Instability of thick elastic Solids.– Communs. Pure and Appl. Math., 1964, v. 17, No. 4, p. 451–491.
4. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения.– Матем. сб., 1969, т. 78, вып. 3, с. 446–472.
5. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
6. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
7. *Жуков М. Ю., Срубщик Л. С.* Поведение замкнутой сферической оболочки после потери устойчивости.– ПММ, 1971, т. 35, вып. 5, с. 870–847.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
19.IV.1984