МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1985

УДК 539.3

О ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ КРУГЛОГО БРУСА, ОСЛАБЛЕННОГО ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ РАЗРЕЗОМ

КУЛИЕВ С. А.

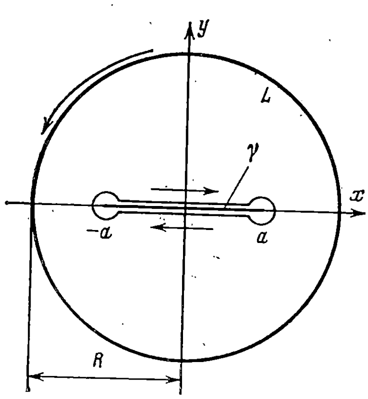
Рассматривается задача об определении поля напряжений в скручиваемом круглом брусе, продольно ослабленном симметрично расположенной прямолинейной щелью. Сечение бруса представляет собой двухсвязную область S, ограниченную извне окружностью L, радиусом R, а изнутри – прямолинейным разрезом γ с концевыми точками $z=\pm a$ (фигура). Решение получено с использованием теории функций комплексного переменного.

1. Определение напряжений, как известно [1], сводится к отысканию функции $\varphi(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$, регулярной в области S и удовлетворяющей следующим граничным условиям:

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=t\bar{t}+C_1 \text{ на } L, \quad \varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=t\bar{t}+C_2 \text{ на } \gamma \tag{1.1}$$

где t – аффикс точки границы областей, C_1 и C_2 – некоторые вещественные постоянные.

Так как на окружности L имеем $t\bar{t}=R^2$, а на разрезе γ $t\bar{t}=t^2$ (щель направлена вдоль действительной оси так, что $t=\bar{t}$), то граничные условия (1.1) представимы в виде



$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=2C \text{ на } L; \quad 2C=C_1+R^2 \tag{1.2}$$

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=t^2 \text{ на } \gamma \tag{1.3}$$

где постоянная $C_2=0$.

Введем на окружности L чисто мнимую функцию $\omega(t)$, удовлетворяющую условию [1]

$$\varphi(t)-\overline{\varphi(t)}=2\omega(t) \text{ на } L \tag{1.4}$$

Сложив почленно равенства (1.2) и (1.4), получим

$$\varphi(t)=\omega(t)+C \text{ на } L \tag{1.5}$$

На основе свойств интеграла типа Коши на окружности имеем

$$\omega(t_1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{L\\ z\to t_1^-}}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{L\\ z\to t_1^+}}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt \tag{1.6}$$

где t_1^- соответствует подходу изнутри, а t_1^+ – извне.

Выражение (1.5) для функции $\varphi(t)$ на основе последней формулы

[1] Следует отметить, что вспомогательная функция $\omega(t)$ была введена в [2].

принимает вид

$$\varphi(t_1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{L\\ z\to t_1-}}\frac{\omega(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{L\\ z\to t_1+}}\frac{\omega(t)}{t-z}dt+C \qquad (1.7)$$

Введем в области S (ограниченной окружностью и разрезом γ) новую регулярную в ней функцию $\psi(z)$ по формуле (где $z\to t_1$ изнутри L):

$$\psi(z)=\varphi(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-z}dt-C \qquad (1.8)$$

На границе круга L функция $\psi(z)$ в силу (1.7) имеет следующее значение (где $z\to t_1$ извне L):

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-z}dt \qquad (1.9)$$

Поскольку интеграл Коши справа представляет функцию, регулярную вне L, то стоящая слева функция $\psi(z)$ также продолжима и регулярна вне круга L. Таким образом, введенная функция $\psi(z)$ является регулярной всюду вне разреза γ, а на бесконечности (согласно (1.9)) равна нулю ($\psi(\infty)=0$).

Функцию $\varphi(z)$ определим (в той же области S) из (1.8) в соответствии с формулой

$$\varphi(z)=\psi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-z}dt+C \qquad (1.10)$$

Выражение (1.10) принимает при $z\to t_1$ на окружности вид

$$\varphi(t_1)=\psi(t_1)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-t_1}dt+C+\frac{1}{2}\omega(t_1) \qquad (1.11)$$

Выражение, сопряженное с последним (учитывая, что функция $\omega(t)$ чисто мнимая), следующее:

$$\varphi(t_1)=\psi(t_1)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{\bar t-\bar t_1}d\bar t+C-\frac{1}{2}\omega(t_1) \qquad (1.12)$$

Преобразуем выражение $d\bar t/\bar t-\bar t_1$, учитывая, что на окружности $\bar L$ справедливы равенства $t\bar t=R^2$ и $t_1\bar t_1=R^2$.

Будем иметь

$$d\bar t/(\bar t-\bar t_1)=d(R^2/t)/(R^2/t-R_2/t_1)=dt/(t-t_1)-dt/t \qquad (1.13)$$

На основе (1.11), (1.12) и (1.13) граничное условие (1.4) на окружности L приводится к виду

$$\omega(t_1)=\psi(t_1)-\overline{\psi(t_1)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t}dt \text{ на } L \qquad (1.14)$$

Граничное условие (1.3) на разрезе γ с учетом (1.10) имеет вид на верхнем берегу разреза

$$\psi^+(t_0)+\psi^+(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-t_0}dt+2C=t_0^2 \qquad (1.15)$$

на нижнем берегу разреза

$$\psi^-(t_0)+\psi^-(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-t_0}dt+2C=t_0^2 \qquad (1.16)$$

или, учитывая, что на обоих берегах разреза вид формул одинаков, запишем

$$\psi(t_0)+\overline{\psi(t_0)}=f(t_0) \quad \text{на} \quad \gamma \tag{1.17}$$

$$f(t_0)=t_0^2-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t-t_0}dt-2C$$

Функцию $\psi(z)$ будем разыскивать вне разреза γ в виде интеграла типа Коши

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\delta(t)}{t-z}dt \tag{1.18}$$

где плотность $\delta(t)$ — некая чисто мнимая функция, которая находится дальше.

Функция $\psi(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза определяется формулой

$$\psi(t_0)=\pm\frac{1}{2}\delta(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\delta(t)}{t-t_0}dt \quad \text{на} \quad \gamma \tag{1.19}$$

Учитывая (1.19) и сопряженное с ним равенство, граничное условие (1.17) на разрезе γ приведем к виду (t_0 — аффикс точки, лежащей на γ)

$$\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\delta(t)}{t-t_0}dt=f(t_0) \tag{1.20}$$

Из этого особого уравнения значение $\delta(t_0)$ на γ определяется равенством [1]

$$\delta(t_0)=\frac{1}{\pi i\sqrt{t_0^2-a^2}}\int_\gamma \frac{f(t)\sqrt{t^2-a^2}}{t-t_0}dt+\frac{C_1'}{\sqrt{t_0^2-a^2}} \tag{1.21}$$

В (1.18) переменную z устремим на окружность L к лежащей на ней точке с некоторым аффиксом t_1, тогда

$$\psi(t_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\delta(t)}{t-t_1}\times dt \quad \text{на} \quad L \tag{1.22}$$

Сопряженное с последним равенство будет иметь вид

$$\overline{\psi(t_1)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\delta(t)}{t-t_1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\delta(t)}{t-R^2/t_1}dt \quad \text{на} \quad L \tag{1.23}$$

Учитывая два последних равенства в граничном условии (1.14) на окружности L, получим

$$\omega(t_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \delta(t)\left[\frac{1}{t-t_1}-\frac{1}{t-R^2/t_1}\right]dt+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t}dt \quad \text{на} \quad L \tag{1.24}$$

Подставляя выражения для $f(t)$ и $\delta(t)$ из (1.17) и (1.21) в равенство (1.24), приведем граничное условие на окружности L к виду

$$\omega(t_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{1}{\pi i\sqrt{t^2-a^2}}\int_\gamma \frac{\sqrt{t_*^2-a^2}}{t_*-t}\left(t_*^2-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t_2)}{t_2-t_*}dt_2-2C\right)dt_*+\right.$$
$$\left.+\frac{C_1'}{\sqrt{t^2-a^2}}\right]\left[\frac{1}{t-t_1}-\frac{1}{t-R^2/t_1}\right]dt+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t}dt \tag{1.25}$$

Изменяя порядок интегрирования в (1.25), после несложных выкладок получаем для функции $\omega(t_1)$ уравнение Фредгольма второго рода

$$\omega(t_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{{}^1/_4a^2t-t^3+2ct}{\sqrt{t^2-a^2}}+\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t_2)\sqrt{t_2^2-a^2}}{t_2-t}dt_2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\frac{1}{\pi i}\int_L\omega(t_2)\,dt_2\right]\frac{dt}{t-t_1}+\frac{C_1'}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\frac{dt}{t-t_1}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{{}^1/_4a^2t-t^3+2ct}{\sqrt{t^2-a^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t_2)\sqrt{t_2^2-a^2}}{t_2-t}dt_2-\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\frac{1}{\pi i}\int_L\omega(t_2)\,dt_2\right]\frac{dt}{t-R^2/t_1}-$$

$$-\frac{C_1'}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\frac{dt}{t-R^2/t_1}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)}{t}dt \text{ на } L \qquad (1.26)$$

2. Вычислим интеграл

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\left[\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t_2)\sqrt{t_2^2-a^2}}{t_2-t}\,dt_2\right]\frac{dt}{t-t_1}$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$J=-\frac{1}{\pi i}\int_L\omega(t_2)\sqrt{t_2^2-a^2}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\frac{dt}{(t-t_1)(t-t_2)}\right]dt_2. \qquad (2.1)$$

Сначала вычислим интеграл, содержащийся в квадратных скобках

$$J_*=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\frac{dt}{(t-t_1)(t-t_2)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\left(\frac{A}{t-t_1}+\frac{B}{t-t_2}\right)dt \qquad (2.2)$$

где A и B находим из условия $1=A(t-t_2)+B(t-t_1)$, т. е. $A=1/(t_1-t_2)$, $B=1/(t_2-t_1)$. Тогда получим

$$J_*=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\frac{1}{t_2-t_1}\left(\frac{1}{t-t_2}-\frac{1}{t-t_1}\right)dt=\frac{1}{2\pi i(t_2-t_1)}\int_\gamma\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}(t-t_2)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i(t_2-t_1)}\int_\gamma\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}(t-t_1)} \qquad (2.3)$$

Для вычисления $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}(t-z)}$ рассмотрим интеграл в замкнутой области. Тогда будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{G_\gamma}\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}(t-z)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{G_R}\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}(t-z)}=\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}} \qquad (2.4)$$

Здесь контур G_γ состоит из обоих берегов разреза, а G_R — окружность сколь угодно большого радиуса. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{G_R\to\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}(t-z)}=0$$

так как при достаточно большем по модулю t:

$$\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}=\frac{1}{t}\left(1-\frac{a^2}{t^2}\right)^{-1/2}=\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}C_{-1/2}^{k}(-1)^{k}\frac{a^{2k}}{t^{2k}}=0_{t\to\infty} \tag{2.5}$$

Таким образом, равенство (2.4) приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{G_\gamma}\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}\,(t-z)}=\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}} \tag{2.6}$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{G_\gamma}\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}\,(t-z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}\,(t-z)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{-a}\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}\,(t-z)}=2\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}\,(t-z)}$$

то из (2.6) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}\,(t-z)}=\frac{1}{2\sqrt{z^2-a^2}}$$

Устремляя z к точке t_2, лежащей на окружности L, находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}\,(t-t_2)}=\frac{1}{2\sqrt{t_2^2-a^2}}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}\,(t-t_1)}=\frac{1}{2\sqrt{t_1^2-a^2}}$$

Таким образом, интеграл J_* будет равен

$$J_*=\frac{1}{2(t_2-t_1)}\left[\frac{1}{\sqrt{t_2^2-a^2}}-\frac{1}{\sqrt{t_1^2-a^2}}\right] \tag{2.7}$$

Учитывая формулу (2.7), из равенства (2.1) получаем

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\omega(t_2)}{t_2-t_1}\left[\frac{\sqrt{t_2^2-a^2}}{\sqrt{t_1^2-a^2}}-1\right]dt_2$$

Как видно, выражение под знаком интеграла справа является непрерывной функцией.

После несложных выкладок (заменяя t_2 на t) имеем

$$J=\frac{1}{2\pi i\sqrt{t_1^2-a^2}}\int_{L}\frac{(t+t_1)\,\omega(t)}{\sqrt{t^2-a^2}+\sqrt{t_1^2-a^2}}\,dt \tag{2.8}$$

Преобразуя аналогично остальные интегралы, выражения для функции $\omega(t_1)$ приведем к виду

$$\omega(t_1)=\frac{1}{\sqrt{t_1^2-a^2}}[a^2t_1/8-t_1^3/2+Ct_1+C_1'/2]-\frac{1}{\sqrt{(R^2/t_1)^2-a^2}}[a^2R^2/8t_1-$$

$$-{}^1/_2(R^2/t_1)^3+CR^2/t_1+{}^1/_2C_1']+\frac{1}{2\pi i\sqrt{t_1^2-a^2}}\int_{L}\frac{t+t_1}{\sqrt{t^2-a^2}+\sqrt{t_1^2-a^2}}\,\omega(t)\,dt-$$

$$-\left[\frac{1}{\sqrt{t_1^2-a^2}}-\frac{1}{\sqrt{(R^2/t_1)^2-a^2}}\right]\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \omega(t)\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)}{t}\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi i\sqrt{(R^2/t_1)^2-a^2}}\int\limits_L \frac{(t+R^2/t_1)\,\omega(t)}{\sqrt{(R^2/t_1)^2-a^2}+\sqrt{t^2-a^2}}\,dt \qquad (2.9)$$

Постоянные C и C_1' находятся из условия непрерывности искомого решения. На разрезе $t_1=\pm a$ коэффициенты при $(t_1^2-a^2)^{-1/2}$ должны быть равны нулю.

Подставляя в (2.9) вместо t_1 ее значения $\pm a$ и приравнивая коэффициенты при $(t_1^2-a^2)$ нулю, получаем выражения

$$C=\frac{3a^2}{8}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)}{\sqrt{t^2-a^2}}\,dt \qquad (2.10)$$

$$C_1'=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \omega(t)\,dt-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{t}{\sqrt{t^2-a^2}}\,\omega(t)\,dt$$

Учитывая значения C и C_1', для $\omega(t)$ получим зависимость

$$\omega(t_1)=\frac{1}{\sqrt{t_1^2-a^2}}\left[{}^1/_2 a^2 t_1-{}^1/_2 t_1^3-\frac{t_1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{\sqrt{t^2-a^2}}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{t\omega(t)}{\sqrt{t^2-a^2}}\,dt\right]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(R^2/t_1)^2-a^2}}\left[a^2R^2/(2t_1)-(R^2/(2t_1))^3-\frac{R^2}{2\pi i t_1}\int\limits_L \frac{\omega(t)}{\sqrt{t^2-a^2}}\,dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{t\omega(t)}{\sqrt{t^2-a^2}}\,dt\right]+\frac{1}{2\pi i\sqrt{t_1^2-a^2}}\int\limits_L \frac{t+t_1}{\sqrt{t^2-a^2}+\sqrt{t_1^2-a^2}}\,\omega(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi i\sqrt{(R^2/t_1)^2-a^2}}\int\limits_L \frac{t+R^2/t_1}{\sqrt{(R^2/t_1)^2-a^2}+\sqrt{t^2-a^2}}\,\omega(t)\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)}{t}\,dt \qquad (2.11)$$

Как видно, определение $\omega(t)$ сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода (его ядро является непрерывными функциями от независимых переменных). Разрешив это уравнение, найдем $\omega(t_1)$, а затем искомую регулярную функцию $\varphi(z)$, зная которую, согласно известным формулам [1], определим компоненты касательных напряжений в характерных точках сечения $\tau_{xz}-i\tau_{yz}=\mu\tau i[\varphi'(z)-\bar{z}]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. *Шерман Д. И.* О напряжениях в скручиваемом круговом брусе, ослабленном призматической полостью.– Изв. АН СССР. ОТН, 1951, № 7, с. 969–995.

Баку

Поступила в редакцию
26.III.1984