

УДК 539.3+624.078

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОЛСТОЙ ПЛИТЫ С УПРУГИМ СЛОЕМ БОЛЬШОЙ ТОЛЩИНЫ

АЛЕКСАНДРОВ В. М., ГРИШИН С. А., КОВАЛЕНКО Е. В.

Исследуется плоская контактная задача о вдавливании упругой плиты в поверхность упругого слоя большой толщины при отсутствии трения между ними. В случае плотного прилегания плиты к основанию строится приближенное решение, эффективное во всей области контакта. Метод основан на сращивании локальных решений, справедливых в окрестности кромок плиты, с глобальным, справедливым на некотором расстоянии от них. Глобальное решение находится при помощи интегрирования уточненных уравнений прикладной теории изгиба плит. Локальные решения получаются на основе изучения задачи о взаимодействии упругих четверть- и полуплоскости. Проводится численное исследование применимости метода для случая равномерной нагрузки.

1. В рамках плоской теории упругости (плоская деформация) рассмотрим задачу о цилиндрическом изгибе плиты ширины $2a$, лежащей без трения на упругом слое толщины H ($a/H \ll 1$). На плиту действует распределенная по верхней поверхности ($y=h$) нормальная нагрузка $p(x)$ и реактивное давление со стороны основания ($y=0$) $q(x)$ (фиг. 1). Обозначив $v_+(x)$ и $v_-(x)$ прогибы, соответственно, верхней и нижней граней плиты, выпишем уравнения уточненной прикладной теории изгиба плит

$$Dv_+^{IV} = p - q - \frac{h^2}{3}(p'' - q'') + \frac{11h^4}{240}(p^{IV} - q^{IV}) + \frac{h^4}{48}(p^{IV} + q^{IV}) \quad (1.1)$$

$$Dv_-^{IV} = p - q - \frac{h^2}{3}(p'' - q'') + \frac{11h^4}{240}(p^{IV} - q^{IV}) - \frac{h^4}{48}(p^{IV} + q^{IV}) \quad (1.2)$$

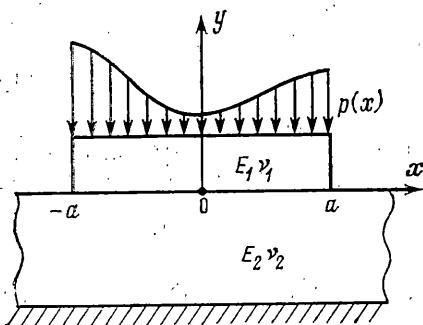
Здесь $D = G_1 h^3 / (6(1 - \nu_1))$, G_1 и ν_1 — упругие характеристики плиты. Если не оговорено специально, относим индекс один к величинам, связанным с плитой, а индекс два — с основанием. Уравнения (1.1), (1.2) могут быть получены [1] либо путем асимптотического анализа точного решения задачи теории упругости для полосы, либо путем асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. Заметим, что в отличие от классических теорий (Кирхгофа — Лява и Рейснера) изгиба плит [2] уравнения (1.1), (1.2) учитывают как деформацию поперечного изгиба плиты, так и деформацию ее поперечного сжатия, что важно при использовании указанных уравнений в контактных задачах.

Переходя в (1.2) к безразмерным величинам по формулам

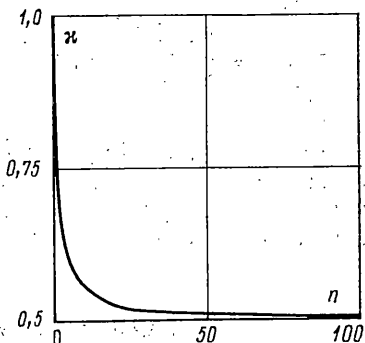
$$\begin{aligned} \lambda &= h/a, & x^* &= x/a, & v^*(x^*) &= v(x)/a, \\ q^*(x^*) &= q(x)a^3/D, & p^*(x^*) &= p(x)a^3/D \end{aligned} \quad (1.3)$$

и опуская всюду звездочку, получим

$$v_-^{IV} = p - q - \lambda^2(p'' - q'')/3 + \lambda^4 p^{IV}/40 - \lambda^4 q^{IV}/15 \quad (1.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Общее решение (1.4) имеет вид

$$v_-(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \frac{\lambda^4}{40} p(x) - \frac{\lambda^4}{15} q(x) + \frac{1}{12} \int_{-1}^1 (p(\xi) - q(\xi)) |\xi - x|^3 d\xi - \frac{\lambda^2}{6} \int_{-1}^1 (p(\xi) - q(\xi)) |\xi - x| d\xi \quad (1.5)$$

Четыре граничных условия свободного края [1]:

$$v_-''(\pm 1) = -\frac{\lambda^2}{3} (p(\pm 1) - q(\pm 1)) + \frac{\lambda^4}{40} p''(\pm 1) - \frac{\lambda^4}{15} q''(\pm 1) \quad (1.6)$$

$$v_-'''(\pm 1) = -\frac{\lambda^2}{3} (p'(\pm 1) - q'(\pm 1)) + \frac{\lambda^4}{40} p'''(\pm 1) - \frac{\lambda^4}{15} q'''(\pm 1)$$

дают лишь две константы $C_2 = C_3 = 0$. Достаточно удовлетворить условиям на одном краю, чтобы оставшиеся обратились в тождества. Перемещение плиты как твердого тела учтем в условии контакта, положим поэтому $C_0 = C_1 = 0$.

Для основания — упругого слоя большой толщины — функция Грина, как известно [3], может быть представлена в форме

$$v_2(x, 0) = P(-\ln|\xi - x| + C^*) / \pi \theta_2 \quad (1.7)$$

$$\theta_2 = G_2 / (1 - \nu_2), \quad C^* = \ln H + a_0$$

a_0 определяется ν_2 и условиями на дне слоя. При $\nu_2 = 0.3$ $a_0 = -0.352$ в отсутствие трения, $a_0 = -0.527$ при жестком защемлении.

Если плита прилегает к основанию по всей ширине, то с учетом (1.7) условие контакта имеет вид

$$\int_{-1}^1 q(\xi) (-\ln|\xi - x| + C) d\xi = \pi R v_-(x) + \delta + \alpha x \quad (1.8)$$

$$C = \ln(H/a) + a_0, \quad R = \theta_2 a^3 / D, \quad |x| \leq 1$$

Подставляя сюда выражение $v_-(x)$ из (1.5) и перенося в левую часть члены, содержащие неизвестное контактное давление, получим

$$\frac{\pi R \lambda^4}{15} q(x) + \int_{-1}^1 q(\xi) \left[-\ln|\xi - x| - \frac{\pi R \lambda^2}{6} |\xi - x| + \frac{\pi R}{12} |\xi - x|^3 + C \right] d\xi =$$

$$= \int_{-1}^1 p(\xi) \left[\frac{\pi R}{12} |\xi-x|^3 - \frac{\pi R \lambda^2}{6} |\xi-x| \right] d\xi + \frac{\pi R \lambda^4}{40} p(x) + \delta + \alpha x \quad (|x| \leq 1) \quad (1.9)$$

Соотношение (1.9) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода с симметричным ядром и непрерывным, если $p(x)$ — непрерывная функция, свободным членом. Вместе с условиями равновесия плиты на основании

$$\int_{-1}^1 (p(x) - q(x)) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 x(p(x) - q(x)) dx = 0 \quad (1.10)$$

оно дает возможность определить глобальное решение задачи — функцию $q(x)$ на отрезке $[-1; 1]$ и постоянные δ, α . При этом контактные давления на краях ($x = \pm 1$) будут иметь конечные значения. Если плита значительно тверже основания, то $R \rightarrow 0$ и (1.9) переходит в известное уравнение для жесткого штампа. Заметим, что использование уточненной прикладной теории изгиба плит позволило получить уравнение второго рода, тогда как классические теории привели бы к уравнениям первого рода. Решение (1.9) можно построить, например, методом ортогональных многочленов.

2. Найденная из (1.9), (1.10) функция $q(x)$ будет близка к истинному контактному давлению лишь на некотором удалении от точек $x = \pm 1$. Вблизи этих точек нужно строить специальные локальные решения, которые бы срачивались с $q(x)$.

Считаем, что локальные решения справедливы в малых по сравнению с толщиной плиты (и тем более, с площадкой контакта) окрестностях радиусов ε_1 и ε_2 углов плиты. Если не оговорено специально, индекс один приписываем в этом параграфе левому краю плиты, а индекс два — правому. Очевидно, локальные решения могут быть найдены из задачи о взаимодействии без трения упругих четверть- и полуплоскости. Поступая как в работе [4], установим, что локальные решения представимы в форме

$$\varphi_i(r) = A_i r^{-\eta-1} + B_i r^{\xi-1}, \quad (A_i; B_i = \text{const}; \quad i=1, 2) \quad (2.1)$$

причем η и ξ — два первых корня уравнения

$$\text{tg}(\pi s) \sin(\pi s) = -n(1 - 2s^2 - \cos(\pi s)) \quad (2.2)$$

($n = \theta_1/\theta_2$ — отношение упругих характеристик плиты и основания), имеющие наименьшие действительные части и удовлетворяющие условиям

$$\int_0^{\varepsilon_i} \varphi_i(r) dr < \infty \quad (2.3)$$

Численный анализ показывает, что в полосе $0 < \text{Re } s < 1$ уравнение (2.2) имеет единственный корень s и искать его следует на действительной оси. Зависимость s от n приведена на фиг. 2. Следующий корень уравнения лежит также на действительной оси и равен единице при любых значениях n . Таким образом

$$\varphi_i(r) = A_i r^{-\eta-1} + B_i \quad (2.4)$$

Отметим важные частные случаи. При $n \rightarrow 0$, т. е. когда жесткость основания намного больше, чем жесткость плиты, $\varphi_i(r) = A_i + B_i$. В противоположном случае $n \rightarrow \infty$, когда жесткость плиты намного больше жесткости основания $\varphi_i(r) = A_i r^{-1/2} + B_i$.

Срачивание локальных решений с глобальным можно осуществить

следующим образом. Если нагрузка на плиту $p(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точек $x=-1+\varepsilon_1$, $x=1-\varepsilon_2$, то в этих точках будут также существовать непрерывные производные функции $q(x)$ и правой части (1.9). Тогда можно потребовать, чтобы выполнялись соотношения

$$\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1} (\varphi_1(1+x)-q(x))dx + \int_{1-\varepsilon_2}^1 (\varphi_2(1-x)-q(x))dx=0$$

$$\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1} x(\varphi_1(1+x)-q(x))dx + \int_{1-\varepsilon_2}^1 x(\varphi_2(1-x)-q(x))dx=0 \quad (2.5)$$

$$\varphi_i(\varepsilon_i)=q(\mp 1\pm\varepsilon_i), \quad \varphi_i'(\varepsilon_i)=q'(\mp 1\pm\varepsilon_i)$$

из которых найдем ε_i , A_i , B_i . Если нагрузка на плиту $p(x)$ всего лишь непрерывна в окрестности $x=-1+\varepsilon_1$, $x=1-\varepsilon_2$, то сращивание можно осуществить более грубо. Именно, нужно потребовать, чтобы каждый из интегралов, входящих в (2.5), был равен нулю и $\varphi_i(\varepsilon_i)=q(\mp 1\pm\varepsilon_i)$.

3. Здесь рассмотрим случай четной функции $p(x)$. Обозначим $K(\xi, x)$ — ядро интегрального оператора в (1.9), $g(x)$ — правую часть этого уравнения. Для удобства выделим из $g(x)$ известное и неизвестное слагаемые ($\alpha=0$ из симметрии задачи):

$$g(x)=f(x)+\delta \quad (3.1)$$

Разлагая $q(x)$, $f(x)$, $K(\xi, x)$, δ в ряды по ортонормированной системе четных полиномов Лежандра

$$q(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m P_{2m}^*(x) \quad (3.2)$$

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m P_{2m}^*(x) \quad (3.3)$$

$$K(\xi, x)=\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk} P_{2m}^*(x) P_{2k}^*(\xi) \quad (3.4)$$

$$\delta=P_0^*(x)\sqrt{2}\delta \quad (3.5)$$

$$b_m=\int_{-1}^1 f(x)P_{2m}^*(x)dx \quad (3.6)$$

$$c_{mk}=\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(\xi, x)P_{2k}^*(\xi)P_{2m}^*(x)d\xi dx \quad (3.7)$$

(где $P_{2m}^*(x)=\sqrt{2m+1/2}P_{2m}(x)$, $P_{2m}(x)$ — полиномы Лежандра) и подставляя (3.2)–(3.5) в (1.9), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно a_m :

$$\frac{\pi R\lambda^4}{15} a_m + \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{mk} = b_m + \delta\sqrt{2}\delta_{0m} \quad (3.8)$$

$$\delta_{0m}=1, \quad m=0; \quad \delta_{0m}=0, \quad m\neq 0$$

Коэффициенты $c_{m\lambda}$ находятся по формулам (3.7) численно стандартным способом (см., например, [5]). Метод вычисления b_m по формулам (3.6) зависит от конкретного вида $p(x)$. Так, например, если $p(x)$ — многочлен, то b_m считаются аналитически. Отметим важный для дальнейшего случай $p(x) \equiv \text{const} = p$. При этом

$$f(x) = \frac{\pi R p}{2} \left[\frac{x^4}{12} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{3} \right) x^2 + \frac{\lambda^4}{20} - \frac{\lambda^2}{3} + \frac{1}{12} \right] \quad (3.9)$$

и только три первых коэффициента b_m отличны от нуля

$$b_0 = \frac{\pi R p}{\sqrt{2}} \left(\frac{\lambda^4}{20} - \frac{4\lambda^2}{9} + \frac{4}{15} \right), \quad b_1 = \frac{2\pi R p}{21\sqrt{10}} \left(4 - \frac{7\lambda^2}{3} \right), \quad b_2 = \frac{\pi R p \sqrt{2}}{315} \quad (3.10)$$

Редуцировав систему (3.8) на некотором шаге, находим δ по следующей формуле, вытекающей из первого условия (1.10):

$$\delta = \frac{1}{2M_0} \left[D_* \int_{-1}^1 p(x) dx - D_0 \sqrt{2} \right] \quad (3.11)$$

Здесь обозначено: D_* — детерминант матрицы редуцированной системы (3.8), D_0 — детерминант той же матрицы, первый столбец которой заменен столбцом коэффициентов b_m , M_0 — минор той же матрицы, полученный вычеркиванием из нее первой строки и первого столбца. Решив (3.8), найдем a_m . Из (3.2) можем определить $q(x)$ в любой точке x области контакта. Важно, чтобы $q(x)$ всюду было больше нуля, иначе плита терпит отрыв от основания.

Если отрыва не наблюдается, приступим к построению локального решения. Из симметрии задачи поведение контактного давления у левого и правого краев будет одинаковым. Считая локальное решение справедливым при $x \in [\mp 1; \mp 1 \pm \varepsilon]$, построим его для правого края. Обозначив $r = 1 - x$, в соответствии с (2.4) ищем решение в виде

$$\varphi(r) = A r^{\kappa-1} + B \quad (3.12)$$

Неизвестны три константы: A , B , ε . Их найдем из условий (2.5), имеющих в случае симметричной нагрузки вид (при этом второе уравнение (2.5) тождественно удовлетворено):

$$\int_{1-\varepsilon}^1 q(x) dx = \int_0^{\varepsilon} \varphi(r) dr \quad (3.13)$$

$$q(1-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon), \quad q'(1-\varepsilon) = \varphi'(\varepsilon) \quad (3.14)$$

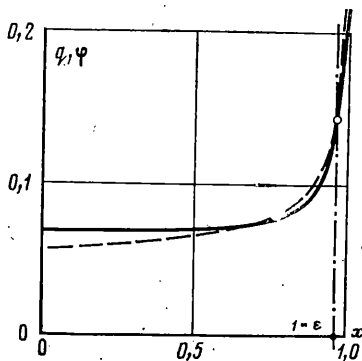
Штрихом обозначено дифференцирование по переменной x . Из (3.14) с учетом (3.12) выражаем A , B через ε

$$A = \varepsilon^{2-\kappa} (1-\kappa)^{-1} q'(1-\varepsilon), \quad B = q(1-\varepsilon) - q'(1-\varepsilon) (1-\kappa)^{-1} \varepsilon \quad (3.15)$$

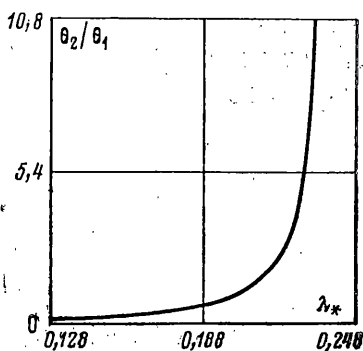
Подставляя (3.15), (3.12) в (3.13), получаем уравнение для определения ε :

$$\int_{1-\varepsilon}^1 q(x) dx + \varepsilon q(1-\varepsilon) - \frac{\varepsilon^2(1+\kappa)}{\kappa(1-\kappa)} q'(1-\varepsilon) = 0 \quad (3.16)$$

Если при решении методом редукции в системе (3.8) оставлено l уравнений, то левая часть (3.16) представляет собой многочлен относительно ε степени $2l+1$ с действительными коэффициентами. Нужно ε — его минимальный положительный корень.



Фиг. 3



Фиг. 4

4. Проиллюстрируем сказанное примером. Бетонная плита $\nu_1=0,17$; $E_1=2 \cdot 10^5$ кг/см² толщины $h=100$ см и ширины $2a=500$ см вдавливается равномерной нагрузкой $p=50$ кг/см² в слой замороженного песка при $t=-10^\circ\text{C}$ ($E_2=0,15 \cdot 10^5$ кг/см²; $\nu_2=0,3$ [6]) толщиной $H=4000$ см, лежащий без трения на жестком основании $a_0=-0,352$. Эпюра контактных давлений изображена на фиг. 3. Глобальное решение — сплошная линия, локальное — штриховая. Точка срачивания лежит близко к краю плиты ($\varepsilon=0,0377$). При редукции в системе оставлено 6 уравнений. Этого вполне достаточно. График глобального решения на основе девяти уравнений практически не отличается от приведенного на фигуре. В случае постоянной нагрузки на плиту из соображений размерности ясно, что контактное давление линейно зависит от уровня нагрузки. Таким образом, чтобы изучить область применимости предлагаемого метода, достаточно исследовать зависимость эпюры всего от трех безразмерных параметров: λ — характеризующего геометрию плиты, C — характеризующего толщину слоя и условия на его дне, θ_2/θ_1 — характеризующего отношение упругих свойств контактирующих тел. Численное исследование показывает, что во всем диапазоне изменения C для толстого слоя его влияние на эпюру мало. Кривая зависимости λ_* от θ_2/θ_1 изображена на фиг. 4. Для заданного отношения θ_2/θ_1 плита терпит отрыв от основания при значениях $\lambda < \lambda_*$. Первоначально отрыв происходит в точке $x \approx 0,71-0,77$ в зависимости от λ_* и θ_2/θ_1 и независимо от p и C .

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1966. 635 с.
3. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Theocaris P. S., Gdoutos E. E. Stress singularities at vertices of composite plates with smooth of rougs interfaces. — Arch. of Mech., 1976, vol. 28, No. 4, p. 693–704.
5. Коваленко Е. В. Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием. — Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 76–82.
6. Баклашев И. В., Каргозия Б. А. Механика горных пород. М.: Недра, 1975. 271 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.IV.1984