

УДК 539.3

О СРАВНЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО И ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО
ПОДХОДОВ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

ФИЛЬШТИНСКИЙ Л. А., ШАПОВАЛОВ С. П.

Реальные волокнистые композитные материалы представляют собой кусочно-однородную среду, свойства которой меняются от точки к точке случайным образом. Методы исследования их механических свойств исходят в основном из двух способов задания внутреннего строения материала: структуру моделируют регулярной укладкой идентичных волокон в неограниченную матрицу; структура носит стохастический характер. Детерминированная структурная теория композитных материалов построена в [1, 2], статистический подход к таким задачам был применен многими исследователями и наиболее полно изложен в [3-5].

1. Определение эффективных свойств волокнистого композита в статистической постановке. Рассмотрим волокнистый композитный материал, упругие свойства матрицы и включений которого известны. Упаковка волокон в поперечном сечении носит статистический характер. Сечения волокон предполагаются эллиптическими с отношением полуосей $\alpha = a/b$ и одинаково ориентированными, оси эллипса совпадают с осями координат x_1, x_2 , а ось x_3 направлена вдоль волокон. Геометрическую структуру материала зададим индикаторной, случайной функцией координат κ , принимающей значение единицы в области волокон и нуля — в связующем.

Пусть в макросечении S включения занимают область S_1 , а матрица $S_2 = S - S_1$. Напряжения σ_{ij} , деформации e_{ij} и функция κ являются статистически однородными, их осреднения, используя гипотезу эргодичности, будем производить по области S и обозначать угловыми скобками, например

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{S} \int_S \sigma_{ij} ds \quad (1.1)$$

Средние по области включений будем отмечать индексом после угловых скобок. Для связи $\langle e_{ij} \rangle_1$ с $\langle e_{ij} \rangle$ имеется соотношение

$$\langle e_{ij} \rangle_1 = \langle e_{ij} \rangle + \langle \kappa' e_{ij}' \rangle / c \quad (1.2)$$

Здесь и далее штрихом обозначены флуктуации функций относительно средних их значений по области S . Функция κ имеет следующие характеристики:

$$\langle \kappa \rangle = c = S_1/S, \quad \langle \kappa' \kappa' \rangle = c(1-c) \quad (1.3)$$

Композитный материал, структура которого задана таким образом, является ортотропным, и задача определения его упругих свойств требует рассмотрения двух независимых напряженных состояний: продольного сдвига и плоской деформации.

Продольный сдвиг. В условиях сдвига в материале возникают напряжения σ_{i3} и деформации $e_{i3} = u_{3,i}$ ($i=1, 2$) (u_3 — перемещения, направленные

ные вдоль волокон). Имеет место соотношение

$$\sigma_{i3} = (1-\kappa) G e_{i3} + \kappa G_1 e_{i3} \quad (1.4)$$

где G, G_1 — модули сдвига связующего и волокон соответственно.

В макросечении S средняя плотность упругой энергии равна

$$W = \frac{1}{2S} \left(\int_{S_1} G_1 e_{i3} e_{i3} ds + \int_{S-S_1} G e_{i3} e_{i3} ds \right) \quad (1.5)$$

Используя понятие осреднения по области (1.4) и заменив деформированное состояние волокон их средними значениями $\langle e_{i3} \rangle_1$, представим функционал (1.5) в виде

$$W = 1/2 (G \langle e_{i3} e_{i3} \rangle + c (G_1 - G) \langle e_{i3} \rangle_1 \langle e_{i3} \rangle_1) \quad (1.6)$$

Вариационная постановка статистической задачи предполагает отыскание при заданных средних значениях $\langle e_{i3} \rangle$ статистически однородного поля флуктуаций $u_{3,i}'$, которое соответствует минимальному значению функционала (1.6). Условие минимальности W на флуктуациях перемещений $u_{3,i}'$ приводит к уравнению

$$u_{3,ii}' + g \langle e_{i3} \rangle_1 \kappa'_{,i} = 0, \quad g = (G_1 - G) / G \quad (1.7)$$

Применяя интегральное преобразование Фурье, получим решение уравнения (1.7):

$$e_{i3}'(\xi) = -g \langle e_{i3} \rangle_1 \kappa'(\xi) \xi_i \xi_i / \xi_i \xi_i \quad (1.8)$$

где ξ — параметр преобразования Фурье. Умножим соотношение (1.8) на $\kappa'(\xi)$ и произведем осреднение. Так как отношение полуосей эллипсов одинаково для всех волокон, то сжатие пространства вдоль большой оси переводит эллипсы в окружности, что будет соответствовать изотропному распределению волокон в сечении S . В этом случае спектральное разложение корреляционной функции флуктуаций κ' имеет вид $\Lambda(\xi_1^2 + \alpha^2 \xi_2^2)$, т. е.

$$\langle \kappa'(x) \kappa'(x) \rangle = \iint \Lambda(\xi_1^2 + \alpha^2 \xi_2^2) d\xi_1 d\xi_2 = c(1-c) \quad (1.9)$$

Определим компоненты тензора

$$a_{ij} = \iint \frac{\xi_i \xi_j}{\xi_i \xi_i} \Lambda(\xi_1^2 + \alpha^2 \xi_2^2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (1.10)$$

используя соотношение (1.9). Тензор a_{ij} симметричен, при этом $a_{12} = a_{21} = 0$. Операция свертывания приводит к соотношению

$$a_{ii} = c(1-c) \quad (1.11)$$

Компоненту $a_{22} = \iint \xi_2^2 \Lambda(\xi_1^2 + \alpha^2 \xi_2^2) / (\xi_1^2 + \xi_2^2) d\xi_1 d\xi_2$ вычислим используя замену переменных и переход к полярным координатам с учетом соотношения (1.9).

Окончательно будем иметь

$$a_{22} = c(1-c) / (1+\alpha) \quad (1.12)$$

Подставив a_{22} в (1.11), находим a_{11} :

$$a_{11} = \alpha c(1-c) / (1+\alpha) \quad (1.13)$$

Формулы (1.10), (1.12), (1.13) позволяют из соотношения (1.8) вычислить средние значения

$$\langle \kappa' e_{i3}' \rangle = -g \alpha c(1-c) \langle e_{i3} \rangle_1 / (1+\alpha), \quad \langle \kappa' e_{23}' \rangle = -g c(1-c) \langle e_{23} \rangle_1 / (1+\alpha) \quad (1.14)$$

Соотношения (1.14) в совокупности с (1.2) определяют связь средних деформаций во включениях со средними деформациями композитного ма-

териала

$$\begin{aligned}\langle e_{13} \rangle_1 &= \frac{\langle e_{13} \rangle}{1 + \alpha g(1-c)/(1+\alpha)} \\ \langle e_{23} \rangle_1 &= \frac{\langle e_{23} \rangle}{1 + g(1-c)/(1+\alpha)}\end{aligned}\quad (1.15)$$

Функционал (1.6) можно упростить используя уравнение (1.7), которое умножим на u_3' и осредним

$$\langle e_{13}' e_{13}' \rangle + g \langle e_{13} \rangle_1 c (\langle e_{13} \rangle_1 - \langle e_{13} \rangle) = 0 \quad (1.16)$$

Тогда функционал W примет вид

$$W = 1/2 G (\langle e_{13} \rangle \langle e_{13} \rangle + g c \langle e_{13} \rangle_1 \langle e_{13} \rangle) \quad (1.17)$$

Подставляя значения $\langle e_{13} \rangle_1$ согласно (1.15), получим минимальное значение плотности упругой энергии, позволяющей получить связь между макронапряжениями и макродеформациями

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{13} \rangle &= G \left[\langle e_{13} \rangle + \frac{g c \langle e_{13} \rangle}{1 + \alpha g(1-c)/(1+\alpha)} \right] \\ \langle \sigma_{23} \rangle &= G \left[\langle e_{23} \rangle + \frac{g c \langle e_{23} \rangle}{1 + g(1-c)/(1+\alpha)} \right]\end{aligned}\quad (1.18)$$

Закон Гука, представленный в виде (1.18), определяет модули сдвига волокнистого композитного материала

$$\begin{aligned}G_{13} &= G \left(1 + \frac{g c}{1 + \alpha g(1-c)/(1+\alpha)} \right) \\ G_{23} &= G \left(1 + \frac{g c}{1 + g(1-c)/(1+\alpha)} \right)\end{aligned}\quad (1.19)$$

Плоская деформация. В этом случае $\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} e_{ll} + \kappa (2\mu^0 e_{ij} + \lambda^0 \delta_{ij} e_{ll})$ ($i, j=1, 2$) и плотность упругой энергии равна ($\mu^0 = \mu_1 - \mu$, $\lambda^0 = \lambda_1 - \lambda$):

$$W = \mu \langle e_{ij} e_{ij} \rangle + 1/2 \lambda \langle e_{ll}^2 \rangle + \mu^0 c \langle e_{ij} \rangle_1 \langle e_{ij} \rangle_1 + 1/2 \lambda^0 c \langle e_{ll} \rangle_1^2 \quad (1.20)$$

где μ , λ и μ_1 , λ_1 — упругие постоянные Ламе матрицы и включений. Из условия минимальности функционала (1.20) следует

$$2\mu e'_{ij,j} + \lambda e'_{ll,i} + c_{ij} \kappa'_j = 0, \quad c_{ij} = 2\mu^0 \langle e_{ij} \rangle_1 + \lambda^0 \langle e_{ll} \rangle_1 \delta_{ij} \quad (1.21)$$

Присоединяя к уравнениям (1.21) соотношения Коши $e_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i})$ и применяя преобразование Фурье, получим решение в виде

$$\begin{aligned}\mu e_{ij}' &= \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{2\mu^0 \langle e_{kl} \rangle \xi_k \xi_l \kappa' + \lambda^0 \langle e_{ll} \rangle \xi^2 \kappa'}{\xi^4} \xi_i \xi_j - \\ - \lambda^0 \langle e_{ll} \rangle_1 \frac{\xi_i \xi_j}{\xi^2} \kappa' - \mu^0 (\langle e_{ll} \rangle_1 \xi_i \xi_j + \langle e_{jl} \rangle_1 \xi_i \xi_j) \frac{\kappa'}{\xi^2}, \quad \xi^2 &= \xi_l \xi_l\end{aligned}\quad (1.22)$$

Используя спектральное разложение (1.9), осредним уравнение (1.22). При этом средние от выражений $\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \kappa' / \xi^4$ и $\xi_i \xi_j \kappa' / \xi^2$ будем вычислять следующим образом:

$$\begin{aligned}\iint \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l}{\xi^4} \Lambda (\xi_1^2 + \alpha^2 \xi_2^2) d\xi_1 d\xi_2 &= A (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \\ + B (\delta_{ij} n_k n_l + \delta_{kl} n_i n_j + \delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k) &+ C n_i n_j n_k n_l\end{aligned}\quad (1.23)$$

$$\iint \frac{\xi_i \xi_j}{\xi^2} \Lambda (\xi_1^2 + \alpha^2 \xi_2^2) d\xi_1 d\xi_2 = L \delta_{ij} + M n_i n_j \quad (1.24)$$

$$(i, j, k, l=1, 2; \quad n_1=0, n_2=1)$$

где A, B, C, L, M — коэффициенты, требующие определения.

Соотношения (1.24) при свертке переходят в уравнение

$$c(1-c) = 2L + M \quad (1.25)$$

а если положить $i=j=1$, то

$$\alpha c(1-c)/(1+\alpha) = L \quad (1.26)$$

Свертывание по индексам k и l в (1.23) приводит к условиям

$$4A + B = \alpha c(1-c)/(1+\alpha), \quad 6B + C = c(1-c)(1-\alpha)/(1+\alpha) \quad (1.27)$$

Еще одно условие для определения коэффициентов уравнения (1.23)

получим положив $i=j=k=l=1$. Тогда $3A = \iint \xi_1^4 \Lambda(\xi_1^2 + \alpha^2 \xi_2^2) / \xi_1^4 d\xi_1 d\xi_2$ или, используя (1.9) и вычисляя интеграл, находим

$$3A = \alpha(1+2\alpha)/2(1+\alpha)^2 \quad (1.28)$$

Формулы (1.25)–(1.28) определяют искомые коэффициенты. С учетом соотношений (1.23), (1.24) из (1.22) следует

$$\begin{aligned} \mu \langle \kappa' e_{ij}' \rangle = & \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \{ 2\mu^0 [A(\delta_{ij} \langle e_{il} \rangle_1 + 2 \langle e_{ij} \rangle_1) + B \langle e_{kl} \rangle_1 (\delta_{ij} n_k n_l + \delta_{kl} n_i n_j + \\ & + \delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k) + C \langle e_{kl} \rangle_1 n_i n_j n_k n_l] + \lambda^0 (L \delta_{ij} + M n_i n_j) \langle e_{il} \rangle_1 - \\ & - \lambda^0 \langle e_{il} \rangle_1 (L \delta_{ij} + M n_i n_j) - \mu^0 [\langle e_{il} \rangle_1 (L \delta_{ij} + M n_i n_j) + \langle e_{jl} \rangle_1 (L \delta_{li} + M n_l n_i)] \} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Разрешая совместно уравнения (1.29) и (1.2) относительно компонент тензора $\langle e_{ij} \rangle_1$, приходим к уравнениям

$$\langle e_{12} \rangle_1 = \frac{\langle e_{12} \rangle}{1 - \{ (\lambda + \mu) [4\mu' (A+B) / (\lambda + 2\mu) - \mu' (2L+M)] \} / c} \quad (1.30)$$

$$\langle e_{11} \rangle_1 = \xi \langle e_{11} \rangle + \beta \langle e_{22} \rangle, \quad \langle e_{22} \rangle_1 = \gamma \langle e_{11} \rangle + \eta \langle e_{22} \rangle \quad (1.31)$$

$$\xi = \xi_1 / m, \quad \beta = \beta_1 / m, \quad \gamma = \gamma_1 / m, \quad \eta = \eta_1 / m$$

$$\xi_1 = 1 - \frac{1}{c} \left\{ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} [2\mu' (3A + 6B + C) + \lambda' (L + M) - \lambda' (L + M) - 2\mu' (L + M)] \right\}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{c} \left\{ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} [2\mu' (A + B) + \lambda' L] - \lambda' L \right\}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{c} \left\{ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} [2\mu' (A + B) + \lambda' (L + M)] - \lambda' (L + M) \right\}$$

$$\eta_1 = 1 - \frac{1}{c} \left[\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (6\mu' A + \lambda' L) - \lambda' L - 2\mu' L \right]$$

$$m = m_1 - m_2, \quad m_1 = \xi_1 \eta_1, \quad m_2 = \beta_1 \gamma_1, \quad \mu' = \mu^0 / \mu, \quad \lambda' = \lambda^0 / \mu$$

После подстановки формул (1.30), (1.31) в выражение для упругой энергии и дифференцирования по компонентам тензора деформаций $\langle e_{ij} \rangle$ получим соотношения

$$\langle \sigma_{12} \rangle = 4\mu (1 + \mu' c a) \langle e_{12} \rangle, \quad \langle \sigma_{22} \rangle = a_2 \langle e_{11} \rangle + a_3 \langle e_{22} \rangle$$

$$\langle \sigma_{22} \rangle = a_2 \langle e_{11} \rangle + a_3 \langle e_{22} \rangle$$

$$(1.32)$$

$$a = \frac{1}{1 - \{(\lambda + \mu) [4\mu' (A + B) / (\lambda + 2\mu) - \mu' (2L + M)] / c\}}$$

$$a_1 = 2\mu + \lambda + 2\mu^0 c \xi + \lambda^0 c \xi + \lambda^0 c \gamma$$

$$a_2 = \lambda + 1/2 (\lambda^0 c \beta + \lambda^0 c \xi + \lambda^0 c \eta + \lambda^0 c \gamma) + \mu^0 c \beta + \mu^0 c \gamma$$

$$a_3 = 2\mu + \lambda + 2\mu^0 c \eta + \lambda^0 c \beta + \lambda^0 c \eta$$

которые определяют макроскопические упругие параметры композитного материала

$$G_{12} = G(1 + \mu' ca), \quad E_{11} = a_1 - \frac{a_2^2}{a_3}, \quad E_{22} = a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \quad (1.33)$$

2. Модель композита с регулярной (двокопериодической) укладкой волокон. Учитывая групповую симметрию, краевые задачи теории композитных материалов в такой постановке можно свести к двокопериодическим задачам теории упругости для состояния обобщенной плоской деформации и продольного сдвига. В этом направлении теория волокнистых композитных материалов с достаточно произвольной микроструктурой ячейки развита в работе [1], согласно которой эффективные параметры упругости композита определяются в виде функционалов, построенных на решениях интегральных уравнений соответствующих краевых задач. Например, макропараметры при продольном сдвиге

$$1/G_{23} = 1/G - 2\text{Im } f_2/S, \quad 1/G_{13} = 1/G - 2\text{Re } f_1/S$$

$$f = f_1 \langle \tau_{13} \rangle + f_2 \langle \tau_{23} \rangle, \quad S = \omega_1 \text{Im } \omega_2 \quad (2.1)$$

где f_i — функционалы, построенные на стандартных решениях интегрального уравнения краевой задачи о продольном сдвиге композитного материала, ω_1 и ω_2 — основные периоды решетки.

3. Сравнение двух подходов. Представляет интерес сравнение эффективных упругих параметров, определенных в статистической и детерминированной постановках. Формулы (1.19), (1.33) приводят к физически корректным значениям модулей упругости композитного материала во всем диапазоне изменения концентрации компонентов. При этом соотношения упругих свойств компонентов практически произвольны.

В случае волокон кругового сечения ($\alpha=1$) выражение для модуля $G_{13} = G_{23}$, полученное по соотношениям (1.19), совпадает с соответствующими результатами из [6, 7], а для G_{12} — с результатами [8].

Возможен и предельный переход к материалу, ослабленному статистически распределенными в нем туннельными разрезами. Под туннельным разрезом будем понимать полость, сечение которой представляет эллипс, одна из полуосей которого мала по сравнению с другой ($a \ll b$). Предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ определяет модули сдвига среды с туннельными разрезами

$$G_{13} = G, \quad G_{23} = G[1 / (1 + n\pi b^2 / S)] \quad (3.1)$$

$$G_{12} = G[d / (d + n\pi b^2 / S)], \quad d = 2(\mu + \lambda) / (\lambda + 2\mu)$$

где b — длина разреза, n/S — число разрезов на единицу площади.

На фигуре представлены макропараметры продольного сдвига боралюминия $G_{13}^* = G_{13}/G$ ($G_1 = 1,75 \cdot 10^5$ МПа, $G = 0,271 \cdot 10^5$ МПа) с волокнами кругового (кривые 1, 2) и эллиптического сечения (кривые 3, 4) при $\alpha=2$ в зависимости от концентрации

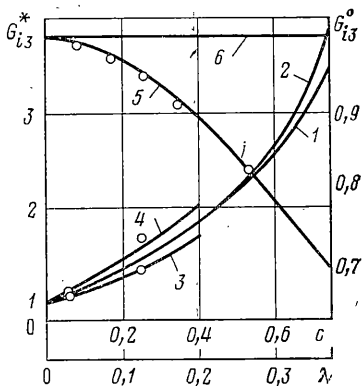


Таблица 1

E/E_1	$\lambda^*=0,2$	0,6	0,8	0,9
∞	0,9132	0,5379	0,3387	0,2201
	0,923	0,4965	0,2776	0,1818
3	0,9636	0,7457	0,6021	0,5190
	0,9663	0,7371	0,5837	0,5057
2	0,9769	0,8246	0,7151	0,6515
	0,978	0,8211	0,7061	0,6445
0,5	1,019	1,204	1,409	1,549
	1,0206	1,2026	1,3935	1,5283
0,1	1,042	1,569	2,615	3,534
	1,0569	1,5845	2,3176	3,037
0	1,049	1,733	3,31	5,935
	1,083	1,78	2,8757	4,1762

Таблица 2

E/E_1	$\lambda^*=0,2$	0,6	0,8	0,9
∞	0,9050	0,3239	0,088	0,0261
	0,9168	0,4754	0,261	0,1696
10	0,9288	0,4653	0,2423	0,1746
	0,9357	0,565	0,3648	0,2748
3	0,9622	0,6921	0,5239	0,4545
	0,9642	0,7279	0,5741	0,4975
2	0,9772	0,8424	0,7602	0,7175
	0,9772	0,8163	0,7008	0,6398
0,5	1,019	1,179	1,35	1,483
	1,019	1,1935	1,3809	1,5156
0,1	1,041	1,45	2,019	2,555
	1,0428	1,494	2,1668	2,844
0	1,047	1,484	1,165	3,166
	1,05	1,613	2,5723	3,72

включений c , а также модули сдвига среды с разрезами $G_{13}^0 = G_{13}/G$ в функции от параметра $\lambda = b/S^{1/2}$ (кривые 5, 6). Кривые 1, 3, 4-6 определяют в статистической постановке, соответственно, следующие величины: $G_{13}^* = G_{23}^*$, G_{13}^* , G_{23}^* , G_{23}^0 , G_{13}^0 . Кривая 2 и точки вдоль кривых 3, 4 соответствуют упругим параметрам модели композита с регулярной укладкой волокон [1]. При этом волокна в сечении расположены в узлах тетрагональной решетки. Точками вдоль кривой 5 отмечены значения G_{23}^0 , полученные согласно [5].

Сравнение двух подходов к определению эффективных упругих модулей в плоскости сечения S сведено в таблицы и представлено отношением, числитель которого представляет решение периодической задачи [6] (включения расположены в узлах тетрагональной решетки), а знаменатель — упругие модули в статистической постановке. Табл. 1, 2, соответственно, представляют значения E^*/E и G^*/G (E^* , G^* — модуль Юнга и модуль сдвига композита в плоскости сечения S) для композитного материала с волокнами кругового сечения в зависимости от параметра $\lambda^* = (4c/\pi)^{1/2}$ и отношения E/E_1 ($\nu_1 = \nu = 0,3$).

Приведенные примеры сравнения показывают, что для композитов, упругие свойства компонент которых отличаются незначительно ($E/E_1 \approx 0,5-3$), результаты расчетов упругих модулей, полученных в детерминированной и статистической постановках, практически хорошо совпадают во всем диапазоне изменения концентрации волокон. Максимальная относительная разность результатов в этом случае со-

ставляет менее 10%. В случае большего отличия упругих свойств компонент удовлетворительное совпадение наблюдается лишь при малых концентрациях. Например, для боралюминия ($E_1/E \approx 7$) модули продольного сдвига, вычисленные двумя способами, совпадают при $c \leq 0,5$ (кривые 1, 2 на фигуре).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А.* Теория упругого линейно-армированного композиционного материала.— ПИММ, 1975, вып. 3, т. 39, с. 537–546.
2. *Ван Фо Фы Г. А.* Теория армированных материалов с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1971. 232 с.
3. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 139 с.
4. *Болотин В. В.* Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. 279 с.
5. *Волков С. Д., Ставров В. П.* Статистическая механика композитных материалов. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1978. 206 с.
6. *Hill R.* Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: 1. Elastic behavior.— J. Mech. and Phys. Solids, 1964, v. 12, No. 4, p. 199–212.
7. *Hashin Z.* Viskoelastik fiber reinforced materials.— AIAA Journal, 1966, v. 4, No. 8, p. 1411–1417.
8. *Christensen R. M., Lo K. H.* Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models.— J. Mech. and Phys. Solids, 1979, v. 27, No. 4, p. 315–330.
9. *Волкова Л. В., Фильштинский Л. А.* Двоякопериодическая задача теории упругости для продольного сдвига анизотропной среды с трещинами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 2, с. 91–95.
10. *Григорюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.

Сумы

Поступила в редакцию
7.VIII.1984