**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1985**

УДК 534.014

МЕТОД НЕГЛАДКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ПРИМЕНЕНИИ К ВИБРОУДАРНЫМ СИСТЕМАМ С ПОДВИЖНЫМИ ОГРАНИЧИТЕЛЯМИ

ЕЗОВСКИХ В. Е.

Предлагается замена переменных, устраняющая бесконечные разрывы в правых частях уравнений движения виброударных систем с подвижными ограничителями. В результате упрощается использование приближенных методов, в частности метода усреднения. Решен ряд характерных задач.

1. Рассмотрим виброударную систему с двумя односторонними связями: одномерное движение материальной точки единичной массы под действием силы $Q(t, y, y^{\cdot})$ между двумя подвижными ограничителями, координаты которых относительно некоторой неподвижной точки $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Произвольное движение ограничителей можно свести к их движению в противофазе с одинаковым расстоянием $s(t)=|s_1(t)-s_2(t)|/2$ от некоторой подвижной точки заменой переменных $z=y+(s_1(t)+s_2(t))/2$. Случай, когда ограничения движутся синфазно, т. е. $s_1(t)+s_2(t)=\text{const}$, приводится этим преобразованием к задаче о движении материальной точки в постоянном по величине зазоре, ранее рассмотренной в [1, 2].

Пусть односторонние связи таковы, что коэффициент восстановления скорости при ударе равен единице и в движении ограничителей присутствует лишь противофазная составляющая. Уравнение движения точки в этом случае может быть записано в виде

$$y^{\cdot\cdot}+F(t, y)=Q(t, y, y^{\cdot}) \tag{1.1}$$

где $F(t, y)$ — условная запись взаимодействия материальной точки со связью. Если имеется синфазная составляющая в движении ограничителей, то она может быть включена в $Q(t, y, y^{\cdot})$.

Введем 2π-периодические функции (некоторые простейшие свойства этих функций приведены в [1]):

$$\Pi(x)=\int_0^x \operatorname{sgn}\cos x\, dx, \qquad M(x)=\Pi'(x), \qquad \Delta(x)=M'(x)$$

В уравнении (1) осуществим замену переменных

$$y=(2/\pi)s(t)\Pi(x) \tag{1.2}$$

Считая $x^{\cdot}$ непрерывной функцией времени, получим для производных по времени от (1.2):

$$y^{\cdot}=(2/\pi)[s^{\cdot}(t)\Pi(x)+s(t)M(x)x^{\cdot}]$$

$$y^{\cdot\cdot}=(2/\pi)[s^{\cdot\cdot}(t)\Pi(x)+2s^{\cdot}(t)M(x)x^{\cdot}+ \\ +s(t)M(x)x^{\cdot\cdot}+s(t)\Delta(x)x^{\cdot 2}]$$

Тогда уравнение (1.1) в новой переменной x примет вид

$$s(t)M(x)x^{\cdot\cdot}+2s^{\cdot}(t)M(x)x^{\cdot}+s^{\cdot\cdot}(t)\Pi(x)+ \\ +s(t)\Delta(x)x^{\cdot 2}+(\pi/2)F[t, (2/\pi)s(t)\Pi(x)]= \\ =(\pi/2)Q\{t, (2/\pi)s(t)\Pi(x), (2/\pi)[s^{\cdot}(t)\Pi(x)+s(t)M(x)x^{\cdot}]\} \tag{1.3}$$

Покажем, что в результате преобразования (1.2) $x^{\cdot}$ является непрерывной функцией времени при условии непрерывной дифференцируемости $s(t)$. В момент удара $t=t_0$ выполняется условие $y^{\cdot}(t_0-0)=-y^{\cdot}(t_0+0)+2s^{\cdot}(t_0)$ и $y^{\cdot}$ разрывна. Из (1.2) получаем $y^{\cdot}(t_0-0)=s^{\cdot}(t_0)+s(t_0)x^{\cdot}(t_0-0)$ и $y^{\cdot}(t_0+0)=s^{\cdot}(t_0)-s(t_0)x^{\cdot}(t_0+0)$, откуда следует, что $x^{\cdot}(t_0-0)=x^{\cdot}(t_0+0)$, т. е. $x^{\cdot}$ в момент удара разрыва не терпит. Существенно, что преобразование (1.2) не имеет особенностей на интервалах безударного движения. Следовательно, $x^{\cdot}$ непрерывна всюду.

В силу этого в уравнении (1.3) обращается в нуль сумма членов, представляющих собой функции с разрывами второго рода $s(t)\Delta(x)x^{\cdot 2}+(\pi/2)F[(2/\pi)s(t)\Pi(x),\ t]=0$ и уравнение (1.3) может быть переписано в виде, содержащем функции с разрывами только первого рода

$$x^{\cdot\cdot}+2\frac{s^{\cdot}(t)}{s(t)}x^{\cdot}+\frac{s^{\cdot\cdot}(t)}{s(t)}\Pi(x)M(x)=\frac{\pi}{2s(t)}M(x)Q\left\{t,\frac{2}{\pi}s(t)\Pi(x),\right.$$
$$\left.\frac{2}{\pi}[s^{\cdot}(t)\Pi(x)+s(t)M(x)x^{\cdot}]\right\} \qquad (1.4)$$

Уравнение (1.4) эквивалентно уравнению (1.1). Для случая постоянного зазора, равного π, $s(t)=\pi/2$ и уравнение (1.4) принимает вид

$$x^{\cdot\cdot}=M(x)Q(t,\ \Pi(x),\ M(x)x^{\cdot}) \qquad (1.5)$$

Как видно из непосредственного сравнения уравнений (1.4) и (1.5), в (1.4) появляются дополнительные силовые члены, обусловленные колебаниями величины зазора. Первый из них эквивалентен силе вязкого трения с коэффициентом вязкого трения, зависящим от времени, который может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Второй эквивалентен наложению на материальную точку в зазоре упругой связи с коэффициентом жесткости, также зависящим от времени и способным принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Если коэффициент восстановления скорости при ударе $k\neq 1$, то вместо (1.2) можно воспользоваться заменой переменных ($x^{\cdot}\neq 0$):

$$y=(2/\pi)s(t)[\Pi(x)-(1-k)f(x)/(1+k)] \qquad (1.6)$$

Функция $f(x)$ при этом должна быть непрерывно дифференцируемой, 2π-периодической и удовлетворять условиям $f(\pi/2)=f(-\pi/2)=0$ и $f'(\pi/2)=1$, $f'(-\pi/2)=-1$. Можно положить $f(x)=\cos x$.

2. Рассмотрим некоторые задачи о движении материальной точки между подвижными ограничителями.

Пусть точка свободна, т. е. $Q=0$, и ограничители сближаются или расходятся с постоянной скоростью, т. е. $s(t)=a+bt$. Начальные условия — $y(0)=\Delta$ ($|\Delta|\leqslant a$) и $y^{\cdot}(0)=v$. Из уравнения (1.4) в этом случае имеем $(a+bt)x^{\cdot\cdot}=-2bx^{\cdot}$. Решение этого уравнения $x(t)=C_1+C_2(a+bt)^{-1}$. Удовлетворяя начальным условиям и переходя по формуле (1.2) к y, получаем

$$y(t)=(2/\pi)(a+bt)\Pi[{}^1/{}_2\pi(\Delta+vt)/(a+bt)]$$

Полученная формула описывает движение точки как при наличии взаимодействия с ограничителями, так и при безударном движении, так как $\Pi(x)=x$ при $|x|\leqslant\pi/2$.

Рассмотрим движение материальной точки при гармоническом колебании величины зазора, т. е. $s(t)=a(1+\nu\sin\omega t)$. Пусть на частицу в зазоре действует сила вязкого трения $Q=-hy^{\cdot}$. Тогда из уравнения (1.4) получаем

$$x^{\cdot\cdot}+\left(h+\frac{2\nu\omega\cos\omega t}{1+\nu\sin\omega t}\right)x^{\cdot}-\frac{\nu\omega^2\sin\omega t-\nu\omega t\cos\omega t}{1+\nu\sin\omega t}\Pi(x)M(x)=0 \qquad (2.1)$$

Переписывая (2.1) в форме Коши, полагаем $x_1=x$, $x_2=x^{\cdot}$ и $\varphi^{\cdot}=\omega$:

$$x_1^{\cdot}=x_2,\quad \varphi^{\cdot}=\omega$$

$$x_2^{\cdot}=-\left(h+\frac{2\nu\omega\cos\varphi}{1+\nu\sin\varphi}\right)x_2+\frac{\nu\omega^2\sin\varphi-\nu\omega h\cos\varphi}{1+\nu\sin\varphi}\Pi(x_1)M(x_1) \tag{2.2}$$

Система уравнений (2.2) соответствует схеме Волосова, если считать h и ν малыми, а x_1 и φ — быстрыми фазами. Рассматривая резонансный случай и вводя при этом $\theta=nx_1-m\varphi$ ($\theta^{\cdot}$ мало), где n и m — произвольные целые числа, можно переписать (2.2) в переменных θ, x_2, φ. Усредним эту систему по φ, сохраняя за усредненными переменными прежние обозначения. Получим при n четном и $m=1$:

$$\theta^{\cdot}=nx_2-\omega,\ x_2^{\cdot}=-hx_2+(-1)^{n/2}(\nu\omega/n)^2\cos\theta \tag{2.3}$$

В первом приближении метода усреднения появляются лишь четные субгармонические резонансы.

Исследуем стационарные решения (2.3), полагая $\theta^{\cdot}=x_2^{\cdot}=0$ (далее индекс s обозначает стационарные значения):

$$x_{2s}=\frac{\omega}{n},\quad \theta_s=\begin{cases}\pm\arccos(h/\nu\omega) & (n=4,\ 8,\ 12\ldots)\\ \pi\pm\arccos(h/\nu\omega) & (n=2,\ 6,\ 10\ldots)\end{cases}$$

Условие возникновения стационарных колебаний частицы в зазоре имеет вид $\nu\omega\geqslant h$; условие их устойчивости — $0<\theta_s<\pi$ при $n=4,\ 8,\ 12\ldots$ и $-\pi<\theta_s<0$ при $n=2,\ 6,\ 10\ldots$. Следует отметить, что как сдвиг фазы θ_s, так и устойчивость стационарных режимов зависят только от кратности n, но не от его величины.

Рассмотрим движение свободной ($Q=0$) материальной точки в зазоре при диссипативном ударе об ограничители. Удар характеризуется параметром $\lambda=(1-k)/(1+k)$, где k — коэффициент восстановления скорости. Используя преобразование (1.6) при $f(x)=\cos x$ и сохраняя обозначения из (2.2), получим

$$x_1^{\cdot}=x_2,\quad \varphi^{\cdot}=\omega,\quad x_2^{\cdot}=-\frac{\lambda x^{\cdot 2}\cos x}{M(x)+\lambda\sin x}-$$

$$-\frac{2\nu\omega\cos\varphi}{1+\nu\sin\varphi}x^{\cdot}+\frac{\nu\omega^2\sin\varphi}{1+\nu\sin\varphi}\,\frac{\Pi(x)-\lambda\cos x}{M(x)+\lambda\sin x}$$

Считая λ, ν малыми, применим метод усреднения. Оставляя лишь члены первого порядка малости по λ и ν и вводя аналогично предыдущей задаче фазовый сдвиг θ, получим для усредненных переменных при четном n и $m=1$:

$$\theta^{\cdot}=nx_2-\omega,\ x_2^{\cdot}=(\ln k/\pi)x_2^2+(-1)^{n/2}\nu\omega^2\cos\theta/n$$

Для стационарных значений θ и x_2 имеем

$$\chi_{2s}=\frac{\omega}{n},\quad \theta_s=\begin{cases}\pm\arccos(-\ln k/(\pi n\nu)) & (n=4,8,12\ldots)\\ \pi\pm\arccos(-\ln k/(\pi n\nu)) & (n=2,6,10\ldots)\end{cases}$$

Условия возникновения стационарных колебаний $\pi n\nu+\ln k\geqslant0$. Условия устойчивости совпадают со случаем вязкого трения. Отметим, что для диссипативного удара условия возникновения стационарных колебаний существенно зависят от величины n.

3. Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях частицы в зазоре при наличии вязкого трения и упругой связи, т. е. $Q=-Ky-hy^{\cdot}+\mu\cos\Omega t$,

причем K не мало, а $k=1$. В этом случае из (1.4) имеем, считая $x_1=x$, $x_2=x^{\cdot}$, $\Psi^{\cdot}=\Omega$, $\varphi^{\cdot}=\omega$:

$$x_2^{\cdot}=\frac{\pi\mu\cos\Psi}{2a(1+\nu\sin\varphi)}M(x_1)-\left(h+\frac{2\nu\omega\cos\varphi}{1+\nu\sin\varphi}\right)x_2-$$

$$-K\Pi(x_1)M(x_1)+\frac{\nu\omega^2\sin\varphi-\nu\omega h\cos\varphi}{1+\nu\sin\varphi}\Pi(x_1)M(x_1)$$

$$x_1^{\cdot}=x_2,\qquad \Psi^{\cdot}=\Omega,\qquad \varphi^{\cdot}=\omega \tag{3.1}$$

Система уравнений (3.1) при $\mu=h=\nu=0$ имеет первый интеграл x_2^2+ $+K\Pi^2(x_1)=U$. Введем функцию

$$\Xi(U,x_1)=\int\limits_0^{x_1}\frac{dx}{(U-K\Pi^2(x))^{1/2}}$$

Для нее получается следующее выражение ($E(z)$ — целая часть z):

$$\Xi(U,x_1)=\frac{1}{K^{1/2}}M(x_1)\arcsin\left\{\sqrt{\frac{K}{U}}\Pi(x_1)\right\}+$$

$$+\frac{2}{K^{1/2}}E\left(\frac{x_1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\arcsin\left\{\sqrt{\frac{K}{U}}\frac{\pi}{2}\right\} \tag{3.2}$$

Непосредственно из этой формулы видно, что при наличии соударений с ограничителями (для этого требуется, чтобы $\pi^2K\leqslant 4U$) период колебаний частицы в зазоре выражается как $T(U)=(4/\sqrt{K})\arcsin\{\sqrt{K/U}\pi/2\}$.

Перейдем в системе уравнений (3.1) от переменных x_1, x_2 к переменным U и γ, где U определяется из $x_2^2+K\Pi^2(x_1)=U$, а γ — из равенства $T(U)\gamma=2\pi\Xi(u,x_1)$. В результате этого преобразования получим

$$U^{\cdot}=2G(U,\gamma,\Psi,\varphi)\sqrt{U}\left|\cos\left[\frac{\sqrt{K}T(U)}{2\pi}\Pi(\gamma)\right]\right|,\quad \varphi^{\cdot}=\omega,\quad \Psi^{\cdot}=\Omega \tag{3.3}$$

$$\gamma^{\cdot}=\frac{2\pi}{T(U)}+\frac{2\pi M(\gamma)}{UT(U)}G(U,\gamma,\Psi,\varphi)\left\{\Pi(\gamma)-\sqrt{\frac{U}{K}}\sin\left[\frac{\sqrt{K}T(U)}{2\pi}\Pi(\gamma)\right]\right\}$$

$$G(U,\gamma,\Psi,\varphi)=\frac{\nu\omega^2\sin\varphi-\nu\omega h\cos\varphi}{1+\nu\sin\varphi}\sqrt{\frac{U}{K}}\sin\left[\frac{\sqrt{K}T(U)}{2\pi}\Pi(\gamma)\right]M(\gamma)+$$

$$+\frac{\mu\pi\cos\Psi}{2a(1+\nu\sin\varphi)}M(\gamma)-\left(h+\frac{2\nu\omega\cos\varphi}{1+\nu\sin\varphi}\right)\sqrt{U}\left|\cos\left[\frac{\sqrt{K}T(U)}{2\pi}\Pi(\gamma)\right]\right|$$

Таким образом, при помощи перехода к переменным U, γ удалось свести систему уравнений (3.1) к схеме Волосова с тремя быстрыми фазами. Представляется естественным ввести параметр $\varkappa$, определяющий в некотором смысле соотношение между потенциальной и кинетической энергией частицы в зазоре

$$\varkappa={}^1/_2\sqrt{K}T(U)/\pi=(2/\pi)\arcsin\{\sqrt{K/U}\pi/2\} \tag{3.4}$$

Очевидно, что $0\leqslant\varkappa\leqslant 1$ для режимов движения с соударениями, причем $\varkappa=1$ соответствует режиму с касанием ограничителя, а $\varkappa=0$ — движению частицы при отсутствии упругой связи.

Рассмотрим для этой задачи резонанс вида $l_1\gamma+m_1\Psi+n_1\varphi=\alpha$, $l_2\gamma+m_2\Psi+n_2\varphi=\beta$, причем $\alpha^{\cdot}$ и $\beta^{\cdot}$ малы. Вводя обозначение $(n,m)=$ $=n_1m_2-n_2m_1$, аналогично (n,l) и (l,m), перепишем систему уравнений

(3.3) в переменных U, α, β, γ и произведем усреднение по быстрой фазе γ. В результате получим для усредненных переменных систему уравнений

$$\alpha^{\cdot}=l_1R(U,\ \alpha,\ \beta)+m_1\Omega+n_1\omega$$

$$\beta^{\cdot}=l_2R(U,\ \alpha,\ \beta)+m_2\Omega+n_2\omega$$

$$U^{\cdot}=(-1)^{1/2(p+1)}\frac{\mu\sqrt{U}}{a}\frac{p}{p^2-\varkappa^2}\cos\left(\frac{\pi\varkappa}{2}\right)\cos\left(\frac{n_2\alpha-n_1\beta}{(n,m)}\right)-hU\left(1+\frac{\sin\pi\varkappa}{\pi\varkappa}\right)+$$
$$+(-1)^{r/2}\frac{\nu\omega U}{\pi}\frac{\sin\pi\varkappa}{r^2-4\varkappa^2}\left(\frac{\omega r}{K^{1/2}}-4\varkappa\right)\cos\left(\frac{m_2\alpha-m_1\beta}{(n,m)}\right)$$

$$R(U,\alpha,\beta)=\frac{\sqrt{K}}{\varkappa}+(-1)^{1/2(p+1)}\frac{\sqrt{K}\mu}{a\varkappa U}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{\varkappa}{p^2-\varkappa^2}\right)\cos\left(\frac{\pi\varkappa}{2}\right)\sin\left(\frac{n_2\alpha-n_1\beta}{(n,m)}\right)+$$
$$+(-1)^{1/2(r+2)}\frac{\nu\omega}{\varkappa}\left\{\frac{(\sqrt{K}r+\omega\varkappa/2)}{U^{1/2}(r^2-\varkappa^2)}\cos\left(\frac{\pi\varkappa}{2}\right)+\frac{4\varkappa r}{\pi(r^2-\varkappa^2)^2}\frac{\sqrt{K}-\omega/2}{U^{1/2}}\sin\left(\frac{\pi\varkappa}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\pi\varkappa}{r^2-4\varkappa^2}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{\omega\varkappa}{K^{1/2}}\right)\right\}\sin\left(\frac{m_2\alpha-m_1\beta}{(n,m)}\right)$$

причем выполняются условия $|(l,\ n)|=p|(m,\ n)|$ при нечетном p, $|(l,\ m)|=r|(m,\ n)|$ при четном r.

Рассмотрим стационарные режимы движения материальной точки с большими p и r, т. е. будем считать, что частота собственных колебаний точки много меньше частоты вынуждающей силы и частоты колебаний ограничителей. Для упрощения выкладок будем также считать, что условие $|(l,\ n)|=p|(m,\ n)|$ не выполнено. В этом случае уравнение для определения стационарных значений величины $\varkappa$, с которыми связаны стационарные уровни энергии частицы в зазоре в соответствии с (3.4), следующие

$$\frac{h^2K}{4}\left(\frac{1}{\sin\pi\varkappa_s}+\frac{1}{\pi\varkappa_s}\right)^2+\left(\frac{l_1\sqrt{K}}{\varkappa_s}+n_1\omega\right)^2\frac{\omega^2\varkappa_s^2}{\sin^2\pi\varkappa_s}=\frac{\nu^2\omega^4}{\pi^2r^2}\qquad(3.5)$$

Уравнение (3.5) трансцендентное. Однако если допустимо приближение $\sin\pi\varkappa\approx\pi\varkappa$, то оно сводится к квадратному. При этом приближении для $\varkappa_s$ получаем $\varkappa_s=(r\sqrt{K}/\omega)\,(1\pm\sqrt{\omega^2\nu^2-h^2})/\omega r^{-2}$.

Условие возникновения стационарных колебаний $\nu\omega\geqslant h$, потому что оно имеет энергетический характер.

Отметим, что применимость метода усреднения к системам дифференциальных уравнений с разрывами первого рода по быстрым переменным обоснована в [3].

Автор глубоко признателен В. Ф. Журавлеву за постановку задачи и ценные замечания в процессе работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев В. Ф.* Метод анализа виброударных систем при помощи специальных функций.– Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2, с. 30–34.
2. *Журавлев В. Ф.* Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями.– ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 781–788.
3. *Besjes J. G.* On the asymptotic methods for nonlinear differential equations.– J. Méc., 1969, vol. 8, No. 3, p. 357–372.

Сыктывкар

Поступила в редакцию 4.IX.1981