

УДК 531.8

ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИИ И ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО МАНИПУЛЯТОРА

БОЛОТИН Ю. В.

Манипулятор должен быть приспособлен к эффективному перемещению различных предметов внутри его рабочей зоны. Задача оптимального конструирования манипулятора является многокритериальной: даже в случае, когда выбран единственный показатель качества движения, конструкция, эффективная при выполнении одного движения, может оказаться неприемлемой для другого. Возможные подходы к этой задаче зависят от диапазона условий, в которых будет работать манипулятор. Если он должен выполнять некоторое конкретное движение, задачу можно считать однокритериальной [1]. Если набор выполняемых движений очень велик, возможен переход к задаче оптимизации осредненных, среднестатистических характеристик [2]. В промежуточном случае наряду с изучением структуры множества Парето полезным может оказаться и обратный подход: описание тех классов задач, для которых в множестве Парето существует точка, оптимальная по всем критериям, т. е. задача имеет классическое решение.

В публикуемой работе рассматривается задача оптимального по энергетике и быстродействию управления и выбора схемы подключения гидроприводов гидравлического манипулятора. Обсуждаются условия существования схемы подключения гидроприводов, оптимальной одновременно для всех движений манипулятора внутри его рабочей зоны.

1. Задача минимизации энергозатрат. Рассматривается движение манипулятора, представляющего собой управляемую систему твердых тел, соединенных идеальными голономными связями. В произвольной системе обобщенных координат q_1, \dots, q_n уравнения движения манипулятора имеют вид

$$d(\partial T / \partial \dot{q}_i) / dt - \partial T / \partial q_i = Q_i + \partial U / \partial q_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad (1.1)$$

Здесь $U(q)$ — силовая функция консервативных сил

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n G_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

— кинетическая энергия манипулятора, Q_1, \dots, Q_n — система обобщенных управляющих сил.

Манипулятор управляется посредством системы гидроприводов. Предполагается, что имеется n гидроцилиндров с объемно-дроссельным управлением [3]; состояние i -го гидроцилиндра характеризуется смещением l_i поршня гидроцилиндра относительно исходного положения и силой F_i давления жидкости на поршень; мощность, потребляемая i -м гидроцилиндром, связана с его механической выходной мощностью $N_i = F_i l_i$ формулой $P_i = \alpha(N_i)$. Здесь $\alpha(N) = \alpha_+ N$ при $N \geq 0$, $\alpha(N) = \alpha_- N$ при $N < 0$ ($\alpha_+ > 0$, $\alpha_- > \alpha_+$) — кусочно-линейная функция, характеризующая кпд гидропривода [3, 4]; константа α_+ определяет кпд нагнетания жидкости в цилиндр, α_- — кпд выпуска.

Каждый гидропривод состоит из гидроцилиндра и системы тяг, обеспечивающих связь $l_i = l_i(q)$ положения l_i поршня гидроцилиндра с конфигурацией звеньев манипулятора. Предполагается, что совокупность пара-

метров l_1, \dots, l_n однозначно определяет конфигурацию, т. е. может быть выбрана в качестве системы обобщенных координат манипулятора; масса тяг гидроприводов мала в сравнении с массой основных звеньев манипулятора, так что их расположение не влияет на динамические свойства манипулятора. Тогда выбор схемы подключения гидроприводов эквивалентен выбору системы координат l_1, \dots, l_n в уравнениях (1.1); силы F_1, \dots, F_n давления жидкости на поршни определяют соответствующую систему обобщенных управляющих сил.

Пусть в рабочей зоне манипулятора заданы начальное q_+ и конечное q_- положения манипулятора и моменты времени $t_- > t_+$. Рассматривается следующая задача оптимизации: найти схему подключения гидроприводов l_1, \dots, l_n и удовлетворяющую ограничению $P_- \leq P \leq P_+$ на суммарную мощность приводов $P = \sum P_i$ траекторию $q(t)$, $t_+ \leq t \leq t_-$, $\dot{q}(t_{\pm}) = 0$ переноса манипулятора из начального в конечное положение, обеспечивающие минимальное значение функционала средних энергозатрат

$$W = \int_{t_+}^{t_-} P(t) dt \rightarrow \min \quad (1.2)$$

Здесь $P_+ > 0 > P_-$ — константы, характеризующие максимальную мощность энергоустановки манипулятора в рабочем режиме и режиме рекуперации энергии.

2. Оптимальные траектории движения манипулятора. Чтобы решить задачу (1.2), достаточно найти не зависящую от схемы подключения гидроприводов точную оценку энергозатрат снизу. Суммарная мощность P двигателей манипулятора связана с их суммарной механической мощностью $N = \sum N_i$ соотношениями $P \geq \alpha_+ N$, $P \geq \alpha_- N$. Интегрируя эти соотношения на отрезках $t_+ \leq t \leq t_-$, $t_+ \leq t \leq t_-$, соответственно, складывая их и взяв максимум правой части по t_i , получим

$$W \geq (\alpha_+ - \alpha_-) \max_{t_+ \leq t \leq t_-} E + \alpha_+ U(q_+) - \alpha_- U(q_-) \quad (2.1)$$

Здесь $E = T - U$ — полная механическая энергия манипулятора. Равенство в (2.1) достигается тогда и только тогда, когда на отрезке $t_+ \leq t \leq t_-$ выполнено тождество $P = \alpha(N)$. Поэтому точную оценку энергозатрат снизу следует искать как решение экстремальной задачи

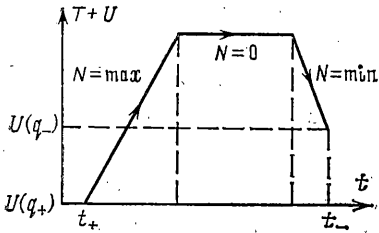
$$(\alpha_+ - \alpha_-) \max_{t_+ \leq t \leq t_-} E + \alpha_+ U(q_+) - \alpha_- U(q_-) \rightarrow \min \quad (2.2)$$

в классе траекторий, удовлетворяющих ограничению по механической мощности

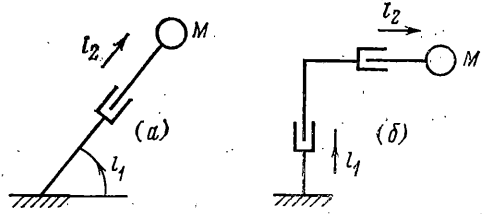
$$P_- \leq \alpha(N) \leq P_+ \quad (2.3)$$

Пусть $q_*(t)$, $t_+ \leq t \leq t_-$, $\dot{q}_*(t_{\pm}) = 0$ — оптимальная траектория задачи (2.2) — (2.3). Покажем, что она состоит из трех последовательных участков (фиг. 1): наиболее быстрого разгона, где механическая мощность $N_*(t)$ равна своему максимальному из (2.3) значению, движения с постоянной энергией $E_*(t) = \max$ и наиболее быстрого торможения, где $N_*(t)$ равно своему минимальному из (2.3) значению.

Действительно, пусть $q(t)$, $t_+ \leq t \leq t_-$ — траектория, геометрически совпадающая с $q_*(t)$, отличающаяся от нее параметризацией по времени и имеющая не большее, чем у $q_*(t)$, значение функционала (2.2). В силу ограничения (2.3) в каждый момент времени механическая энергия $E(t)$ на этой траектории не превосходит энергии $E_*(t)$ на $q_*(t)$. Пусть $s(t)$, $s_*(t)$, $t_+ \leq t \leq t_-$ — длины кривых $q(t)$, $q_*(t)$ в метрике $ds^2 = 2T dt^2$. Интегрируя справедливое для произвольных t , $s = s_*$ дифференциальное неравенст-



Фиг. 1



Фиг. 2

во $s^* = [(E(t) - U(q(s)))/2]^{1/2} \leq [(E_*(t) - U(q_*(s_*)))/2]^{1/2} = s_*$, получим, что длина кривой $q(t)$ не превосходит длины $q_*(t)$. Равенство достигается при $E(t) \equiv E_*(t)$, когда кривые совпадают, что и требовалось доказать.

Будем называть оптимальные траектории задачи (2.2)–(2.3) траекториями **наибыстрейшего разгона и торможения**.

Пусть известно максимальное значение механической энергии E_{\max} . Тогда условие **наибыстрейшего разгона и торможения** однозначно определяет зависимость $N_*(t)$, $E_*(t)$ механической мощности управляющих сил и энергии от времени. При заданной функции $E_*(t)$ фазовые ограничения задачи (2.2)–(2.3) сводятся к краевым условиям, поэтому геометрическая форма кривой $q_*(t)$ определяется из решения вариационной задачи оптимального быстродействия с дополнительным фазовым ограничением $E = E_*(t)$. В частности, на участке $E = E_{\max}$ траектории **наибыстрейшего разгона и торможения** совпадает с участком брахистохроны.

Введение в задачу быстродействия множителя Лагранжа [5] μ при ограничении $E = E_*(t)$ приводит к уравнениям Эйлера $\mu \cdot \partial T / \partial q_i + \mu [d(\partial T / \partial \dot{q}_i) / dt + \partial U / \partial q_i - \partial T / \partial q_i] = 0$, ($1 \leq i \leq n$). Отсюда и из условия $N = N_*$ определяются обобщенные управляющие силы на траектории **наибыстрейшего разгона и торможения**

$$Q_i = \frac{1}{T} \left(\frac{N_*}{2} + \sum_{h=1}^n q_h \cdot \frac{\partial U}{\partial q_h} \right) \frac{\partial T}{\partial q_i} - 2 \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (2.4)$$

Чтобы найти оценку энергозатрат (2.1), достаточно проинтегрировать уравнения движения (1.1) при значениях управляющих сил (2.4). Соотношения (2.4) имеют особенность в моменты начала и окончания движения и потому не определяют траекторию однозначно; они должны быть дополнены заданием касательной к траектории в точке q_+ , обеспечивающим выполнение краевого условия $q = q_-$ на правом конце траектории. Параметр E_{\max} подбирается из условия обеспечения заданной длительности движения.

Покажем, что построенная оценка энергозатрат является точной. Достаточно найти такую систему координат l_1, \dots, l_n , чтобы на траектории **наибыстрейшего разгона и торможения** было выполнено тождество $P \equiv \alpha(N)$, т. е. все механические мощности N_i имели бы одинаковые знаки. Траектория **наибыстрейшего разгона и торможения** не имеет самопересечений: в противном случае, выбросив петлю и уменьшив значение E_{\max} так, чтобы сохранить длительность движения вдоль траектории, можно получить траекторию с теми же краевыми условиями и меньшим значением функционала (2.2). Поэтому существует такая система координат l_1, \dots, l_n , что кривая $q_*(t)$ целиком лежит на одной из координатных осей. Доказано следующее.

Утверждение 1. Энергетически оптимальными траекториями движения манипулятора являются траектории **наибыстрейшего разгона и торможения**, а оптимальными схемами подключения гидроприводов — такие схемы, что на траектории **наибыстрейшего разгона и торможения** в каждый

момент времени механические мощности N_i ($1 \leq i \leq n$) гидроприводов имеют одинаковые знаки.

Из доказанного следует, что на оптимальной траектории окончание режима $N_i \geq 0$ нагнетания жидкости в цилиндр, а также начало режима $N_i \leq 0$ активного торможения происходит одновременно для всех гидроприводов. Это верно, однако, только при оптимальной схеме подключения гидроприводов. В противном случае оптимальные траектории состоят из нескольких участков наиболее быстрого разгона и торможения с ограничением на координатные подпространства $l_i^* = 0$ ($1 \leq i \leq n$) разных размерностей [6].

Если на траектории наиболее быстрого разгона и торможения длительность участка движения с максимальной энергией E_{\max} равна нулю, эта траектория является оптимальной по быстродействию в задаче с ограничением $P_- \leq \alpha(N) \leq P_+$. Следовательно, такая траектория является оптимальной по быстродействию в задаче с ограничением $P_- \leq P \leq P_+$ на суммарную мощность энергоустановки манипулятора при условии, что схема подключения гидроприводов выбрана оптимальным образом. Критерий оптимальности схемы подключения гидроприводов здесь тот же, что и в задаче минимизации энергозатрат.

3. Условия оптимальности конструкции манипулятора. Пусть в рабочей зоне манипулятора задано определенное множество пар (q_+, t_+) , (q_-, t_-) , $t_- > t_+$ начальных и конечных положений манипулятора, и требуется найти схему подключения гидроприводов, оптимальную одновременно для всех пар. Из доказанного следует, что достаточно найти такую систему координат l_1, \dots, l_n , чтобы на каждой траектории наиболее быстрого разгона и торможения $q(t)$, $q(t_{\pm}) = q_{\pm}$ было выполнено тождество $P = \alpha(N)$.

Утверждение 2. Пусть для заданного множества пар начальных и конечных положений манипулятора существует такая система координат l_1, \dots, l_n , что для любой пары соединяющая их траектория наиболее быстрого разгона и торможения лежит на одной из координатных осей. Тогда эта система координат определяет оптимальную схему подключения гидроприводов.

Сформулированное утверждение устанавливает один из возможных способов конструирования оптимального манипулятора: необходимо так выбирать схему подключения гидроприводов, чтобы на реализуемых движениях по возможности работало только по одному гидроцилиндру. Область применения этого способа ограничена. Число координатных осей, исходящих из одной точки, равно размерности системы; поэтому множество начальных и конечных конфигураций манипулятора не должно содержать точек, где начинаются или кончаются больше, чем n операций. При движении по замкнутому контуру значение обобщенных координат сохраняется: если для некоторого $1 \leq i \leq n$ контур содержит участок $l_i^* > 0$, он содержит и участок $l_i^* < 0$. Отсюда следует, что число тактов каждой циклической операции переноса манипулятора должно быть четным. Более того, число тактов, равное двум, допустимо лишь в исключительных случаях, когда встречные траектории наиболее быстрого разгона и торможения геометрически совпадают: при постоянной силовой функции или же в ситуации, когда выполнено равенство $P_+ \alpha_- = P_- \alpha_+$, т. е. задача минимизации энергозатрат является обратимой во времени.

Описанный ниже способ конструирования применим для любого, сколь угодно большого набора движений, но при сильных дополнительных предположениях о динамической схеме манипулятора.

Утверждение 3. Пусть требуется перевести манипулятор из любой точки открытой рабочей зоны в любую, т. е. множество пар начальных и конечных положений манипулятора совпадает с множеством всех пар точек рабочей зоны. Тогда для существования оптимальной схемы подключения гидроприводов необходимо постоянство силовой функции $U(q)$. При $U(q) = \text{const}$ схема подключения гидроприводов оптимальна тогда и

только тогда, когда в соответствующей системе координат l_1, \dots, l_n матрица $G_{ij}(q)$ кинетической энергии манипулятора диагональна.

Доказательство. Если силовая функция постоянна, а $G_{ij}=0$, при $i \neq j$, то на каждой траектории манипулятора знаки суммарной механической мощностей гидроприводов совпадают со знаком суммарной механической мощности N . Отсюда следует достаточность сформулированных условий оптимальности. Докажем необходимость. При заданной схеме подключения гидроприводов l_1, \dots, l_n оценка энергозатрат (2.1) достигается, если на траектории наибоыстрейшего разгона и торможения выполнены неравенства

$$TN_i = l_i \cdot \left[\left(\frac{N}{2} + \sum_{k=1}^n l_k \cdot \frac{\partial U}{\partial l_k} \right) \frac{\partial T}{\partial l_i} - 2T \frac{\partial U}{\partial l_i} \right] \geq 0 \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.1)$$

Рассмотрим пучок всевозможных траекторий разгона с механической мощностью $N_+ = P_+/\alpha_+$, проходящих через заданную точку рабочей зоны q_* . Поскольку рабочая зона открыта, этот пучок включает траектории с произвольными по направлению скоростями q в точке q_* . Если в k -й строке матрицы G_{ij} есть недиагональные элементы, то для заданной константы $c > 0$ существует такое значение скорости q_c , что $l_k \cdot \partial T / \partial l_k = -c^2$. Положив $q_{cs} = \varepsilon q_c$ и устремляя ε к нулю, получим из (3.1) соотношение $TN_k = -\varepsilon^2 c^2 N_+ / 2 + o(\varepsilon^2) < 0$. Противоречие доказывает, что матрица G_{ij} диагональна. Пусть теперь силовая функция системы непостоянна, т. е. для некоторого $k \neq i$ $\partial U(q_*) / \partial l_k \neq 0$, и q_{cs} — такое значение скорости в точке q_* , что $l_j = 0$ при $j \neq k$, i , $l_k = c$; $l_i = \varepsilon l_k \cdot (\partial U(q_*) / \partial l_k)^{-1}$. Устремляя ε к нулю, получим из (3.1) $TN_i = -\varepsilon c G_{kk} l_k + o(\varepsilon) < 0$. Противоречие доказывает, что $U(q) = \text{const}$.

Предположим, что силовая функция системы постоянна. Это допустимо, например, для плоских движений манипулятора в поле силы тяжести и для произвольных движений в условиях невесомости. Тогда траектория наибоыстрейшего разгона и торможения геометрически совпадает с кратчайшей геодезической [7] метрики, определяемой кинетической энергией

$$s(q_+, q_-) = \int_{q_+}^{q_-} \left[\sum_{i,j=1}^n G_{ij}(q) dq_i dq_j \right]^{1/2} \rightarrow \min \quad (3.2)$$

В частности, на участке максимальной энергии манипулятор движется по инерции.

Минимальная величина энергозатрат связана с расстоянием $s(q_+, q_-)$ между точками q_+ , q_- в метрике (3.2) формулой

$$[2W/(\alpha_+ - \alpha_-)]^{-1/2} s(q_+, q_-) = t_- - t_+ - [W/(\alpha_+ - \alpha_-)] / 3N_*$$

Здесь введено обозначение $N_* = (\alpha_+ / P_+ - \alpha_- / P_-)^{-1}$ при $\alpha_- \geq 0$ и $N_* = (\alpha_+ / P_+ - \alpha_- / P_+)^{-1}$ при $\alpha_- < 0$.

Для осуществимости движения от q_+ к q_- необходимо, чтобы промежуток времени $t_- - t_+$ удовлетворял условию

$$t_- - t_+ \geq [9N_*^{-1} s^2(q_+, q_-)]^{1/2} / 2 \quad (3.3)$$

Если рабочая зона манипулятора геодезически выпукла, т. е. любые две ее точки можно соединить кратчайшей геодезической, а матрица кинетической энергии манипулятора в координатах l_1, \dots, l_n гидропривода диагональна, условие (3.3) является и достаточным. В этой ситуации траектории, на которых неравенство (3.3) превращается в равенство, не содержат участка движения по инерции и являются оптимальными по быстродействию в задаче с ограничениями $P_- \leq P \leq P_+$.

4. В качестве примера рассмотрим задачу оптимизации конструкции манипулятора с безынерционными звеньями. Пусть манипулятор пере-

носит точечные грузы M внутри выпуклой в трехмерном пространстве рабочей зоны. Масса манипулятора существенно меньше массы груза, а действием силы тяжести можно пренебречь.

Пусть \mathbf{r} — радиус-вектор груза относительно основания. Энергия манипулятора с грузом $T=M(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})/2$ определяется кинетической энергией груза и не зависит от кинематической схемы манипулятора. Соответствующая метрика евклидова; ее геодезические (3.2) являются прямыми линиями.

Оптимальной будет такая схема подключения гидроприводов l_1, \dots, l_n , в которой кинетическая энергия манипулятора приводится к диагональному виду

$$(\partial \mathbf{r} / \partial l_i, \partial \mathbf{r} / \partial l_j) = 0 \quad (i \neq j) \quad (4.1)$$

Оптимальными траекториями служат прямые, соединяющие начальное и конечное положения груза.

В силу малоинерционности звеньев динамические свойства манипулятора не зависят от способа соединения различных звеньев, так что выбор кинематической схемы манипулятора можно проводить одновременно с выбором схемы подключения гидроприводов.

Множество конструкций, удовлетворяющих условию (4.1), достаточно разнообразно. Опишем здесь оптимальные конструкции манипулятора, удовлетворяющие следующим специальным условиям: манипулятор — открытая кинематическая цепь, т. е. можно так пронумеровать звенья манипулятора: $i=1, \dots, n$, что связь i -го и $(i+1)$ -го звеньев не зависит от конфигурации остальных звеньев и имеет одну степень свободы; двигатели гидроприводов связывают непосредственно последовательные звенья; число звеньев манипулятора равно размерности рабочей зоны, т. е. двум в плоском и трем в пространственном случае.

Сформулированные условия означают, что радиусы-векторы \mathbf{r}_i груза относительно i -го звена связаны соотношениями

$$\mathbf{r}_{i-1} = \Phi_i(l_i) [\rho_i(l_i) + \mathbf{r}_i] \quad (1 \leq i \leq n) \quad (4.2)$$

Здесь ρ_i , Φ_i — вектор и ортогональная матрица, зависящие от обобщенной координаты i -го шарнира l_i .

С учетом (4.2) два из трех условий оптимальности пространственного трехзвенного манипулятора $(\partial \mathbf{r} / \partial l_i, \partial \mathbf{r} / \partial l_i) = 0$ ($i=2, 3$) записываются в следующей дифференциальной форме:

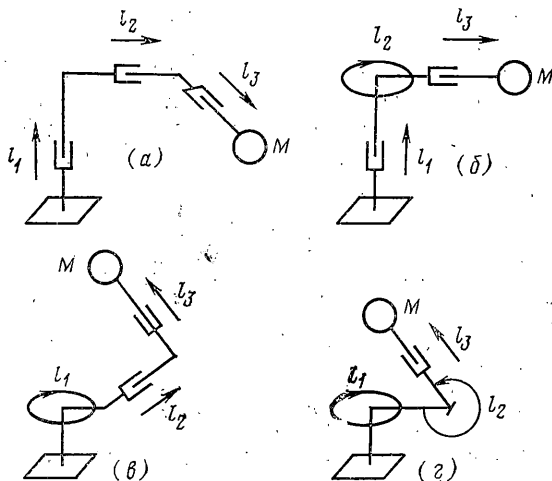
$$(d\rho_i/dl_i + [\omega, \rho_i + \mathbf{r}_i], \delta \mathbf{r}_i) = 0 \quad (4.3)$$

Здесь $\omega(l_1)$ — вектор угловой скорости первого звена в движении с единичной обобщенной скоростью $\dot{l}_1=1$, $\delta \mathbf{r}_i$ — произвольные, совместимые со связями, вариации вектора $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(l_2, l_3)$. Множество этих вариаций образует плоскость $\Pi(l_2, l_3)$.

Возможны два случая. Если первое звено не имеет угловой подвижности, т. е. $\omega=0$, то (4.3) сводится к условию $(d\rho_i/dl_i, \delta \mathbf{r}_i) = 0$, означающему, что второе и третье звенья образуют плоский манипулятор, а первый шарнир телескопический с направляющей, перпендикулярной плоскости второго и третьего звеньев. Если первое звено имеет угловую подвижность, то в области, где $\omega \neq 0$, выражение в левой части (4.3) является невырожденной дифференциальной формой [7] относительно компонент вектора \mathbf{r}_i . В каждой точке поверхности $\mathbf{r}_i(l_2, l_3)$ (4.3) определяет плоскость, которая должна совпасть с касательной плоскостью $\Pi(l_2, l_3)$ к этой поверхности. Поэтому дифференциальная форма (4.3) удовлетворяет условиям интегрируемости Фробениуса [7]:

$$(\text{rot} [\omega, \rho_i + \mathbf{r}_i], d\rho_i/dl_i + [\omega, \rho_i + \mathbf{r}_i]) = 0$$

Отсюда $(\omega, d\rho_i/dl_i) = 0$, т. е. существует такой вектор $\rho(l_i)$, что $[\omega, \rho] = -d\rho_i/dl_i$. Соотношение (4.3) показывает, что векторы ω , $\rho + \rho_i + \mathbf{r}_i$ лежат



Фиг. 3

в плоскости $\Pi(l_2, l_3)$: поверхность $r_1(l_2, l_3)$ является одновременно цилиндром с образующей ω и конусом с образующей $\rho + \rho_1 + r_1$. Это возможно только в случае плоскости: второе и третье звенья образуют плоский манипулятор. Тогда условие на первый шарнир формулируется следующим образом: при всех l_1 вектор $d\rho_1/dl_1 + [\omega, \rho_1]$ перпендикулярен плоскости Π второго и третьего звеньев. Оно допускает следующую геометрическую интерпретацию. В процессе движения плоскость Π , неподвижная в первом звене, катится без проскальзывания по некоторой линейчатой поверхности S , неподвижной относительно основания. Шарниры, удовлетворяющие сформулированному условию, будем называть шарнирами качения с плоской направляющей¹. Если S является цилиндром, шарнир качения является плоским; если S вырождается в прямую, он превращается в обычный угловой шарнир. Если S бесконечно удалена, шарнир качения является телескопическим.

Доказано следующее утверждение: пространственный манипулятор оптимален тогда и только тогда, когда первый шарнир является шарниром качения с плоской направляющей, а второе и третье звенья образуют оптимальный плоский манипулятор, лежащий в плоскости направляющей первого шарнира.

Получим условия оптимальности плоского манипулятора. Для этого рассмотрим вспомогательный пространственный манипулятор, получающийся из оптимального плоского введением третьего телескопического шарнира, перпендикулярного плоскости первого и второго звеньев. Он оптимален и должен удовлетворять приведенным выше условиям оптимальности трехзвенного манипулятора. Отсюда первый шарнир является плоским шарниром качения с направляющей, содержащей ось третьего шарнира; движения, допускаемые вторым шарниром, лежат одновременно в плоскости первого и второго и в плоскости второго и третьего звеньев.

Доказано следующее утверждение: плоский манипулятор оптимален тогда и только тогда, когда первый шарнир является плоским шарниром качения, а второй — телескопическим с направляющей, лежащей в плоскости направляющей первого шарнира.

На практике наиболее распространены шарниры пятого класса [8], т. е. телескопические, угловые и винтовые шарниры. В отличие от углового и телескопического винтовой не является шарниром качения, по-

¹ См. также: *Бологин Ю. В.* Энергетическая оптимизация конструкции гидравлического манипулятора. Препринт Ин-та прикл. математики АН СССР. М., 1984, № 24. 28 с.

сколькx для него относительные скорости всех точек соединяемых звеньев отличны от нуля.

Из сказанного следует, что существуют два типа оптимальных плоских манипуляторов с парами пятого класса (фиг. 2) и четыре типа оптимальных пространственных манипуляторов (фиг. 3). Длины звеньев этих манипуляторов и массы грузов могут быть произвольны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Е. И., Щеголева А. Н. Оптимизация по быстродействию пневматического манипулятора выбором моментов переключения приводов.— *Машиноведение*, 1978, № 3, с. 24—26.
2. Кобринский А. А. К теории манипуляционных систем.— *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1980, № 3, с. 42—50.
3. Льюис Э., Стерн Х. Гидравлические системы управления. М.: Мир, 1966. 407 с.
4. Белецкий В. В., Болотин Ю. В. Модельная оценка энергетики двуногой ходьбы и бега.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1983, № 4, с. 89—94.
5. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений.— *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1965, т. 5, № 3, с. 395—453.
6. Болотин Ю. В. Энергетически оптимальные походки двуногo шагающего аппарата.— *Изв. АН СССР. МТТ*, 1984, № 6, с. 48—55.
7. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
8. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1978. 398 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.V.1984