МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1985

УДК 531.36

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОГО СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ

РУБАНОВСКИЙ В. Н., РУМЯНЦЕВ В. В.

Рассматриваются стационарные движения тяжелого динамически симметричного твердого тела, подвешенного шарнирно к неподвижной точке на невесомой абсолютно гибкой нерастяжимой струне с точкой подвеса на оси симметрии. Строится связка известных первых интегралов уравнений движения, условия экстремума которой приводят к решениям уравнений движения, описывающим стационарные движения твердого тела, представляющие собою перманентные вращения и регулярные прецессии. Условия минимума связки интегралов дают достаточные условия устойчивости стационарных движений.

1. Рассмотрим движение в однородном поле сил тяжести динамически симметричного твердого тела с центром масс G на оси симметрии, шарнирно подвешенного к неподвижной точке O_1 на абсолютно гибкой нерастяжимой безынерционной струне с точкой подвеса O на оси симметрии.

Уравнения движения твердого тела допускают следующие интегралы [1]:

$$V_1=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\omega}+m\mathbf{v}^2+2mg(l\mathbf{e}-\mathbf{a})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\mathrm{const} \tag{1.1}$$

$$V_2=[\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\omega}+(l\mathbf{e}-\mathbf{a})\times m\mathbf{v}]\cdot\boldsymbol{\gamma}=\mathrm{const},\quad V_3=\boldsymbol{\gamma}^2=1,\quad V_4=\omega_3=\omega=\mathrm{const}$$

представляющие интегралы энергии, площадей, геометрический и постоянства проекции мгновенной угловой скорости тела на его ось симметрии. Здесь введены обозначения: m и $\boldsymbol{\Theta}$ — масса и центральный тензор инерции тела с диагональными элементами $A_1=A_2$, A_3, $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и мгновенная угловая скорость тела, $\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{e}$ — единичные векторы восходящей вертикали и направления струны от точки O_1 к точке O, $\mathbf{a}$ — радиус-вектор точки подвеса O относительно центра масс G, g и l — ускорение силы тяжести и длина струны. Все векторы будем задавать их проекциями v_s, ω_s, γ_s, e_s, a_s $(s=1, 2, 3)$ на оси правой системы осей координат $Gx_1x_2x_3$ с единичными векторами $\mathbf{i}_s$, жестко связанной с телом, оси которой направлены по главным центральным осям инерции, причем $a_1=a_2=0$, $a_3=a>0$. Кроме того, понадобятся проекции вектора $\mathbf{e}$ также на три другие ортогональные оси, которые получим представляя этот вектор в виде $\mathbf{e}=x\boldsymbol{\gamma}+y\mathbf{i}_3\times\boldsymbol{\gamma}/\sqrt{1-\gamma_3^2}+z\boldsymbol{\gamma}\times(\mathbf{i}_3\times\boldsymbol{\gamma})/\sqrt{1-\gamma_3^2}$, $x^2+y^2+z^2=1$.

Умножая скалярно это равенство на $\mathbf{i}_3$, получаем

$$e_3=x\gamma_3-[(1-\gamma_3^2)(1-x^2-y^2)]^{1/2},\quad x=\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\gamma}=-\cos\alpha$$

$$y=\mathbf{e}\cdot\mathbf{i}_3\times\boldsymbol{\gamma}/\sqrt{1-\gamma_3^2},\quad \gamma_3=\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{i}_3=\cos\vartheta \tag{1.2}$$

где α — угол между струной и нисходящей вертикалью, ϑ — угол между осью x_3 и восходящей вертикалью.

Рассмотрим связку первых интегралов (1.1), записанную с точностью до несущественной аддитивной постоянной (λ — параметр)

$$2V=V_1-2\lambda V_2+A_1\lambda^2V_3=$$

$$=A_1[(\omega_1-\lambda\gamma_1)^2+(\omega_2-\lambda\gamma_2)^2]+m[\mathbf{v}-\lambda\boldsymbol{\gamma}\times(l\mathbf{e}-\mathbf{a})]^2-$$
$$-m\lambda^2[\boldsymbol{\gamma}\times(l\mathbf{e}-\mathbf{a})]^2+2mg\boldsymbol{\gamma}\cdot(l\mathbf{e}-\mathbf{a})-2A_3\omega\lambda\gamma_3+A_1\lambda^2\gamma_3^2 \qquad (1.3)$$

Вводя вместо ω_i и $\mathbf{v}$ новые переменные

$$\Omega_i=\omega_i-\lambda\gamma_i \quad (i=1, 2), \qquad \mathbf{u}=\mathbf{v}-\lambda\boldsymbol{\gamma}\times(l\mathbf{e}-\mathbf{a}) \qquad (1.4)$$

и учитывая (1.2), представим (1.3) в виде

$$2V(\Omega_1, \Omega_2, u_1, u_2, u_3, x, y, \gamma_3)=A_1(\Omega_1^2+\Omega_2^2)+m(u_1^2+u_2^2+u_3^2)+$$
$$+m\lambda^2l^2x^2+2mglx-2mal\lambda^2[(1-\gamma_3^2)(1-x^2-y^2)]^{1/2}-$$
$$-2(mga+A_3\omega\lambda)\gamma_3+(A_1+ma^2)\lambda^2\gamma_3^2 \qquad (1.5)$$

Рассмотрим условия стационарности интеграла (1.5) по отношению к введенным переменным:

$$\partial V/\partial\Omega_i=A_1\Omega_i=0 \quad (i=1, 2), \qquad \partial V/\partial u_j=mu_j=0 \quad (j=1, 2, 3)$$
$$\partial V/\partial x=ml[\lambda^2lx+g+a\lambda^2x(1-\gamma_3^2)^{1/2}(1-x^2-y^2)^{-1/2}]=0$$
$$\partial V/\partial y=mal\lambda^2y(1-\gamma_3^2)^{1/2}(1-x^2-y^2)^{-1/2}=0 \qquad (1.6)$$
$$\partial V/\partial\gamma_3=(A_1+ma^2)\lambda^2\gamma_3-mga-A_3\omega\lambda+mal\lambda^2\gamma_3(1-\gamma_3^2)^{-1/2}(1-x^2-y^2)^{1/2}=0$$

Решения уравнений (1.6) определяются однозначно во всех точках пространства переменных, в которых гессиан функции V отличен от нуля. Уравнения (1.6) имеют решения вида

$$\Omega_i=0 \ (i=1, 2), \quad u_j=0 \ (j=1, 2, 3), \quad x=x_0, \quad y=y_0=0, \quad \gamma_3=\gamma_0 \qquad (1.7)$$

причем постоянные x_0, γ_0 удовлетворяют соотношениям

$$\lambda^2x_0[l+a(1-\gamma_0^2)^{1/2}(1-x_0^2)^{-1/2}]+g=0 \qquad (1.8)$$
$$(A_1+ma^2)\lambda^2\gamma_0-mga-A_3\omega\lambda+mal\lambda^2\gamma_0(1-\gamma_0^2)^{-1/2}(1-x_0^2)^{1/2}=0$$

при произвольных значениях постоянных λ, ω. Следовательно, будем иметь, вообще говоря, двухпараметрическое семейство решений (1.7).

В исходных переменных решения (1.7) имеют вид

$$\omega_i=\lambda\gamma_i \quad (i=1, 2), \quad \mathbf{v}=\lambda\boldsymbol{\gamma}\times(l\mathbf{e}-\mathbf{a}), \quad x=x_0, \quad y=y_0=0, \quad \gamma_3=\gamma_0 \qquad (1.9)$$

Сравнивая первые два равенства (1.9) с известными кинематическими уравнениями Эйлера, приходим к заключению, что постоянная λ представляет собой угловую скорость $\psi^\cdot$ прецессии твердого тела. Таким образом, решение (1.9) описывает равномерное вращение струны и оси симметрии тела как одного твердого тела вокруг вертикали с угловой скоростью λ, причем струна и ось симметрии расположены в одной и той же вертикальной плоскости и образуют постоянные углы $\alpha_0=-\arccos x_0$ и $\vartheta_0=\arccos\gamma_0$ с нисходящей и восходящей вертикалями, соответственно, в диапазонах $-\pi/2<\alpha_0<\pi/2$, $0\leqslant\vartheta_0\leqslant2\pi$.

Переменные (1.4) представляют собою отклонения значений проекций мгновенной угловой скорости на оси x_i $(i=1, 2)$ и вектора скорости центра масс от значений этих переменных в стационарном движении. Так как проекция мгновенной угловой скорости на ось симметрии $\omega_3=\varphi^\cdot+\psi^\cdot\cos\vartheta$, где $\varphi^\cdot$ — угловая скорость собственного вращения, то стационарные движения тела на струне подразделяются на два класса — перманентные вращения и регулярные прецессии, в зависимости от того, равна нулю или отлична от нуля постоянная $\mu=\varphi^\cdot=\omega-\lambda\gamma_0$.

2. В случае перманентного вращения, когда $\mu=0$, $\omega=\lambda\gamma_0$, струна и тело вращаются вокруг вертикали как одно твердое тело с угловой скоростью λ. Уравнения (1.8) в переменных α_0, ϑ_0 принимают вид

$$\lambda^2(l\sin\alpha_0+a\sin\vartheta_0)\cos\alpha_0=g\sin\alpha_0 \qquad (2.1)$$

$$(A_1-A_3)\lambda^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0+ma\lambda^2(l\sin\alpha_0+a\sin\vartheta_0)\cos\vartheta_0=mga\sin\vartheta_0$$

и позволяют определить однопараметрическое семейство решений $\alpha_0=\alpha_0(\lambda^2)$, $\theta_0=\vartheta_0(\lambda^2)$. Среди решений этих уравнений имеются, в частности, решения $\alpha_0=0$, $\vartheta_0=0$, π при произвольной величине $\lambda^2\geqslant 0$, описывающие равномерные вращения тела при расположении струны и оси симметрии на одной вертикали, а также при $A_1=A_3$ решения вида [2]:

$$\begin{aligned}&\alpha_0=\vartheta_0, \quad \cos\alpha_0=\cos\vartheta_0=g/(\lambda^2(l+a))\\&\vartheta_0=\pi+\alpha_0, \quad \cos\alpha_0=g/(\lambda^2(l-a)) \quad (l>a)\end{aligned} \tag{2.2}$$

при $\lambda^2>g(l+a)^{-1}$ или $\lambda^2>g(l-a)^{-1}$, соответственно, описывающие равномерные вращения при расположении струны и оси симметрии вдоль одной прямой.

В общем случае уравнения (2.1) совпадают с уравнениями (5.2) работы [2] для случая $\delta=\rho=0$, подробно исследованными в [2].

Отметим, что можно также обратить постановку задачи: задать величины α_0 и ϑ_0 таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{l\sin\alpha_0+a\sin\vartheta_0}=\frac{ma(1-\operatorname{tg}\alpha_0\operatorname{ctg}\vartheta_0)}{(A_1-A_3)\cos\vartheta_0}>0 \tag{2.3}$$

тогда соответствующая величина λ^2 будет равна величине (2.3), умноженной на g.

В случае регулярной прецессии, когда $\mu\neq 0$ — произвольная постоянная и $\omega=\mu+\lambda\gamma_0$, твердое тело вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью μ и одновременно струна и ось симметрии вращаются как одно твердое тело вокруг вертикали с угловой скоростью λ. Уравнения (1.8) в переменных α_0, ϑ_0 принимают вид

$$\begin{aligned}&\lambda^2(l\sin\alpha_0+a\sin\vartheta_0)\cos\alpha_0=g\sin\alpha_0\\&(A_1-A_3)\lambda^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0-A_3\lambda\mu\sin\vartheta_0+ma\lambda^2(l\sin\alpha_0+\\&\quad+a\sin\vartheta_0)\cos\vartheta_0=mga\sin\vartheta_0\end{aligned} \tag{2.4}$$

и позволяют определить двухпараметрическое семейство решений $\alpha_0=\alpha_0(\lambda,\mu)$, $\vartheta_0=\vartheta_0(\lambda,\mu)$. Среди решений этих уравнений имеется, в частности, однопараметрическое семейство решений вида (2.2), если $\mu=(A_1/A_3-1)\lambda\cos\vartheta_0$, описывающее регулярные прецессии при расположении струны и оси симметрии тела вдоль одной прямой.

В общем случае решения уравнений (2.4) при произвольных изменениях параметров λ и μ и фиксированных значениях остальных параметров можно определить как точки пересечения кривых, заданных на плоскости (ξ,η) уравнениями

$$\begin{aligned}&\xi=f_1(\eta,\nu)=\eta\varkappa^{-1}[\nu(1-\eta^2)^{-1/2}-1]\\&\eta=f_2(\xi,\nu,\rho)=\xi[(\nu+\rho)(1-\xi^2)^{-1/2}-\varkappa-\sigma]\end{aligned} \tag{2.5}$$

эквивалентными уравнениям (2.4) в случае $|\alpha_0|<\pi/2$, $|\vartheta_0|<\pi/2$ при одних и тех же значениях ν, ρ, где $\xi=\sin\vartheta_0$, $\eta=\sin\alpha_0$, $\varkappa=a/l$, $\nu=g(l\lambda^2)^{-1}$, $\rho=A_3\mu(mal\lambda)^{-1}$, $\sigma=(A_1-A_3)(mal)^{-1}$.

Однопараметрическое семейство кривых $\xi=f_1(\eta,\nu)$ подробно исследовано в [2]. Двухпараметрическое семейство кривых $\eta=f_2(\xi,\nu,\rho)$ имеет общую точку в начале координат (0, 0), а также общие асимптоты $\xi=\pm 1$ для всех значений параметров ν, ρ, кроме $\nu=-\rho$.

Первая производная $\partial f_2/\partial\xi=(\nu+\rho)(1-\xi^2)^{-3/2}-(\varkappa+\sigma)$ обращается в нуль при $(\varkappa+\sigma)(1-\xi^2)^{3/2}=\nu+\rho$. Отсюда следует, что кривые имеют экстремум в точке $\xi=0$ при $\nu+\rho=\varkappa+\sigma$, а также в точках $\xi\neq 0$ при $\nu+\rho<\varkappa+\sigma$; при $\nu+\rho>\varkappa+\sigma$ они не имеют экстремума. При $\nu+\rho=0$ кривые превращаются в прямые $\eta=-(\varkappa+\sigma)\xi$.

Вторая производная $\partial^2 f_2/\partial\xi^2=3\xi(1-\xi^2)^{-5/2}(\nu+\rho)$ равна нулю при $\xi=0$;

при $\xi \neq 0$, $\nu+\rho \neq 0$ ее знак определяется знаком величины $\xi(\nu+\rho)$, что позволяет сделать заключение о выпуклости или вогнутости кривых этого семейства. С учётом этих замечаний исследование точек пересечения кривых (2.5) и зависимости углов α_0, ϑ_0 от λ, μ можно провести аналогично [2], на чем здесь останавливаться не будем.

Отметим также, что если обратить постановку задачи, т. е. задать величины α_0 и ϑ_0 так, чтобы имело место неравенство

$$\operatorname{tg} \alpha_0 (l \sin \alpha_0 + a \sin \vartheta_0)^{-1} > 0 \tag{2.6}$$

то при заданных положениях струны и оси симметрии тела в вертикальной плоскости λ^2 будет равняться величине (2.6), умноженной на g, а μ определится из второго уравнения (2.4) после подстановки в него заданных значений α_0 и ϑ_0 и найденного значения λ^2.

3. Перейдем к выводу достаточных условий устойчивости стационарных движений твердого тела, подвешенного на струне. Так как для решения (1.7)

$$\partial^2 V/\partial \Omega_i^2 = A_1 > 0 \quad (i=1, 2), \quad \partial^2 V/\partial u_j^2 = m > 0 \quad (j=1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = m\lambda^2 l \left(l + a \frac{\sin \vartheta_0}{\sin^3 \alpha_0}\right), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \gamma_3} = mal\lambda^2 \frac{\cos \alpha_0 \cos \vartheta_0}{\sin \alpha_0 \sin \vartheta_0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \gamma_3^2} = \lambda^2 \left(A_1 + ma^2 + mal \frac{\sin \alpha_0}{\sin^3 \vartheta_0}\right), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = mal\lambda^2 \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \alpha_0}$$

а все другие частные производные второго порядка равны нулю, то условия, необходимые и достаточные для минимума интеграла (1.5), сводятся к неравенствам

$$\sin \alpha_0 \sin \vartheta_0 > 0, \quad A_1 + ma^2 + mal \frac{\sin \alpha_0 \sin \vartheta_0}{\sin^4 \vartheta_0} > 0$$

$$(A_1 + ma^2) l + a \sin \alpha_0 \sin \vartheta_0 \left(\frac{A_1 + ma^2}{\sin^4 \alpha_0} + \frac{ml^2}{\sin^4 \vartheta_0}\right) +$$

$$+ \frac{ma^2 l (1 - \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta_0)}{\sin^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta} > 0,$$

которые выполняются, если выполняется первое из них.

Таким образом, согласно теореме Ляпунова об устойчивости неравенство

$$\sin \alpha_0 \sin \vartheta_0 > 0 \tag{3.1}$$

является достаточным условием устойчивости как перманентных вращений, так и регулярных прецессий симметричного тяжелого твердого тела, подвешенного на струне, по отношению к переменным Ω_i ($i=1, 2$), u_j ($j=1, 2, 3$), $x=-\cos \alpha$, $\gamma_3 = \cos \vartheta$, $y = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{i}_3 \times \gamma)(1-\gamma^2)^{-1/2}$, ω_3. Очевидно, условие (3.1) выполняется для всех точек первого и третьего квадрантов плоскости (ξ, η), исключая прямые $\xi=0$, $\eta=0$.

Устойчивость некоторых из перманентных вращений тяжелого симметричного твердого тела, подвешенного на струне, ранее исследовалась в [3–8].

Отметим, что рассматриваемая задача в частном случае $l=0$, когда точка O совпадает с неподвижной точкой O_1, превращается в задачу о стационарных движениях тяжелого симметричного тела с неподвижной точкой. Интегралы (1.1) имеют место и при $l=0$, однако первые два из них записаны при этом в несколько необычном для тела с неподвижной точкой виде — с явно выделенной скоростью $\mathbf{v}$ центра масс. Полагая $l=0$ в интеграле (1.5), получаем функцию $V(\Omega_1, \Omega_2, u_1, u_2, u_3, \gamma_3)$, условия стационарности которой сводятся лишь к шести уравнениям из числа

(1.6), а вместо двух уравнений (1.8) имеем одно уравнение

$$(A_1{}^*-A_3)\lambda^2\cos\vartheta_0=mga, \qquad A_1{}^*=A_1+ma^2 \tag{3.2}$$

для случая перманентных вращений, и

$$(A_1{}^*-A_3)\lambda^2\cos\vartheta_0-A_3\mu\lambda=mga \tag{3.3}$$

для случая регулярных прецессий. Уравнения (3.2) и (3.3) записаны в системе координат $Gx_1x_2x_3$, а если перейти к системе координат с началом в неподвижной точке O и осями, антипараллельными осям x_s, то знак величины a изменится на противоположный и эти уравнения примут общепринятый вид.

Для решения вида (1.7) функция $V(\Omega_1, \Omega_2, u_1, u_2, u_3, \gamma_3)$ имеет изолированный минимум; отсюда заключаем об устойчивости по отношению к переменным Ω_i ($i=1, 2$), u_j ($j=1, 2, 3$), γ_3, ω_3 как перманентных вращений [9], так и регулярных прецессий [10] тяжелого симметричного твердого тела с одной неподвижной точкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* К динамике твердого тела, подвешенного на струне.– Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 5–15.
2. *Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е.* О движении осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне.– Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 3–16.
3. *Морозова Е. П.* Об устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на струне.– ПММ, 1956, т. 20, вып. 5, с. 621–626.
4. *Темченко М. Е.* Об устойчивости одного из положений динамического равновесия одной механической системы.– Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 1, с. 50–52.
5. *Скимель В. Н.* О движении гиростата, подвешенного на струне.– Тр. межвуз. конф. по прикл. теор. устойчивости движения и аналитической механике. Казань, 1964, с. 118–122.
6. *Возлинский В. И.* О бифуркации стационарных движений консервативных систем с двумя циклическими координатами.– ПММ, 1967, т. 31, вып. 5, с. 841–847.
7. *Темченко М. Е.* Об исследовании критериев устойчивости движения подвешенного на струне твердого тела и волчка при наличии у них эллипсоидальной полости, наполненной жидкостью.– Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1, с. 26–31.
8. *Рубановский В. Н.* Анализ условий устойчивости равномерного вертикального вращения динамически симметричного твердого тела, подвешенного на нити.– Современные вопросы математики и механики и приложения: Сб. статей. М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1983, с. 16–21.
9. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.– Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астрон., физ., хим., 1957, № 4, с. 9–16.
10. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Гостехтеориздат, 1956. 299 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.II.1985