

УДК 531.8

## ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКОГО УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА

ЗАРЕМБА А. Т.

Динамические свойства манипуляционных роботов с существенно упругим исполнительным органом исследовались в [1–6].

В [1] рассматривались плоские движения упругого манипулятора при кинематическом управлении углами в шарнирах. В [2] исследовались пространственные движения двухзвенного упругого манипулятора с учетом динамики приводов. Математическая модель упругого манипулятора на подвижном основании построена в [3]. Отметим, что пренебрежение массой манипулятора в [2, 3] приводит в ряде конфигураций к вырождению уравнений динамики. Задача о плоском вращении упругого стержня под действием управляющего момента сил рассматривалась в [4], где при помощи асимптотических методов построено решение системы интегродифференциальных уравнений движения. Общие уравнения динамики многозвенного упругого безынерционного манипулятора получены в [5], где исследовались случаи кинематического и динамического управлений. В [6] рассматривались механические системы, содержащие упругие элементы большой жесткости, и методами малого параметра производился асимптотический анализ уравнений Лагранжа.

В публикуемой работе составлены уравнения движения плоского многозвенного упругого манипулятора, рассмотрены случаи безынерционных упругих звеньев и звеньев с конечным числом колебательных степеней свободы. Показано, что влияние упругих колебаний звеньев манипулятора на точность прохождения груза по траектории учитывается в рамках модели манипулятора с абсолютно жесткими звеньями введением в шарниры дополнительных моментов. В качестве примера исследуется двухзвенный упругий манипулятор с одной сосредоточенной массой на каждом из звеньев. Получены выражения для вектора дополнительных моментов и определены частоты собственных колебаний системы упругий манипулятор – груз.

1. Рассмотрим механическую модель манипулятора (фиг. 1), представляющую собой  $n$  прямолинейных упругих стержней  $P_1, \dots, P_n$ , соединенных цилиндрическими шарнирами  $L_1, \dots, L_{n+1}$  и совершающих движение в плоскости  $OXY$ . Начало первого звена при помощи шарнира  $L_1$  крепится к неподвижному основанию, а шарнир  $L_{n+1}$  соединяет последнее упругое звено с грузом  $P_{n+1}$  – абсолютно твердым телом с заданными инерционными характеристиками. Упругие деформации звеньев манипулятора описываются в рамках линейной теории тонких прямолинейных нерастяжимых стержней [7, 8]. Приводы манипулятора развивают в каждом из шарниров сосредоточенные моменты  $M_1, \dots, M_{n+1}$ , а из внешних возмущений на манипулятор с грузом действует сила тяжести, причем вектор ускорения силы тяжести  $g$  противоположен направлению оси  $OY$  (фиг. 1).

Для описания движения системы в качестве обобщенных координат выберем углы  $q_1, \dots, q_{n+1}$ , где  $q_i$  – угол между линиями  $L_{i-1}L_i$  и  $L_iL_{i+1}$  (фиг. 1), определяющими положение звеньев манипулятора в недеформированном состоянии. При этом  $q_1$  есть угол между осью  $OX$  и линией  $L_1L_2$ , а  $q_{n+1}$  – угол между линией  $L_nL_{n+1}$  и линией  $L_{n+1}C_{n+1}$ , соединяющей шарнир  $L_{n+1}$  с центром масс  $C_{n+1}$  груза.

Для описания упругих деформаций звеньев манипулятора введем в рассмотрение функции  $u^s(t, x)$  ( $s=1, \dots, n$ ) линейного смещения нейтральной линии  $s$ -го упругого стержня в направлении, перпендикулярном прямой  $L_sL_{s+1}$ , совпадающей с линией недеформированного положения.

$s$ -го звена. В переменных  $u^s(t, x)$  потенциальная энергия упругой деформации манипулятора имеет вид

$$\Pi_y = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \int_0^{l_s} E_s I_s (u_{xx}^s)^2 dx \quad (1.1)$$

Здесь  $l_s$  — постоянная длина упругого стержня,  $I_s(x)$  — момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба,  $0 < I_{s1} \leq I_s(x) \leq I_{s2}$ ,  $E_s$  — модуль Юнга материала стержня.

В выражении (1.1) не учитывается потенциальная энергия упругой деформации манипулятора в поле центробежных сил, так как предполагается, что угловые скорости звеньев малы по сравнению с низшей частотой квазистатических колебаний [1, 4, 9] системы упругий манипулятор — груз.

Запишем выражение для потенциальной энергии манипулятора с грузом в поле силы тяжести

$$\Pi_g = - \sum_{s=1}^{n+1} \int_{P_s} (\mathbf{b}_i^s, \mathbf{g}) dm_s \quad (1.2)$$

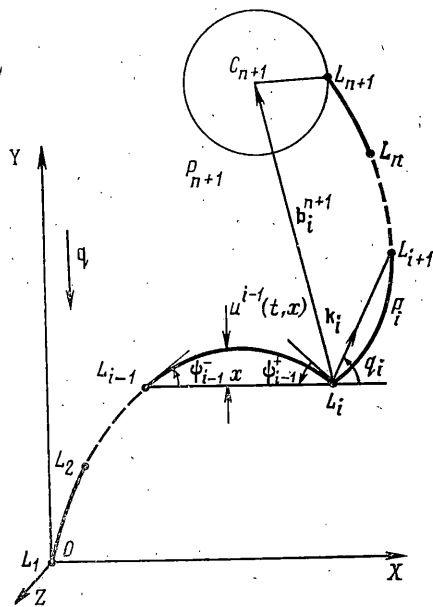
Здесь интегрирование производится по элементам массы звеньев манипулятора и груза, вектор-функция  $\mathbf{b}_i^s$  соединяет  $i$ -й шарнир с элементом массы  $s$ -го звена, круглые скобки означают скалярное произведение.

Для вычисления кинетической энергии системы определим выражения для проекций скоростей элемента массы  $s$ -го тела на оси  $OX$  и  $OY$ :

$$r_x^{s*} = - \sum_{i=1}^s \dot{q}_i (\mathbf{b}_i^s, \mathbf{e}_2) - (\mathbf{k}_s, \mathbf{e}_2) u_i^s \quad (1.3)$$

$$r_y^{s*} = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i (\mathbf{b}_i^s, \mathbf{e}_1) + (\mathbf{k}_s, \mathbf{e}_1) u_i^s$$

( $s=1, \dots, n+1$ )



Фиг. 1

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ ,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  — единичные орты вдоль осей  $OX$  и  $OY$ ; единичный вектор  $\mathbf{k}_s$  направлен вдоль линии недеформированного положения  $s$ -го упругого звена, а функция упругой деформации груза  $u^{n+1}$  полагается равной нулю  $u^{n+1}(t, x) = 0$ .

Используя соотношения (1.3), представим кинетическую энергию как сумму кинетической энергии плоского движения груза и манипулятора

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n+1} \int_{P_s} dm_s ((r_x^{s*})^2 + (r_y^{s*})^2) \quad (1.4)$$

Для получения уравнений движения системы упругий манипулятор — груз воспользуемся принципом Гамильтона — Остроградского [7] в форме

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi + \delta' A) dt = 0 \quad (1.5)$$

Здесь  $\delta T$  и  $\delta \Pi$  — вариации кинетической и потенциальной энергии си-

стемы, а элементарная работа  $\delta'A$  непотенциальных сил на виртуальном перемещении определяется соотношениями

$$\delta'A = \sum_{i=1}^{n+1} M_i (\delta q_i - \delta u_x^{(i-1)} |_{x=l_{i-1}} + \delta u_x^i |_{x=0}) \quad (1.6)$$

причем выполняется  $\delta u_x^0 = \delta u_x^{n+1} = 0$ .

Вычисляя вариации кинетической (1.4) и потенциальной (1.1), (1.2) энергии упругого манипулятора с грузом и интегрируя по частям (по  $x$  и по  $t$ ) подынтегральное выражение (1.5), находим уравнения и граничные условия соответственно

$$\begin{aligned} \rho_s u_{tt}^s + (E_s I_s u_{xxx}^s)_{xx} = - \sum_{i=1}^s (b_i^s, k_s) \rho_s q_i'' - \\ - \rho_s \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s q_i' q_j' [b_r^s \times k_s]_z - \rho_s g(k_s, e_1) \quad (s=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$u^s(t, 0) = u^s(t, l_s) = 0, \quad E_s I_s u_{xxx}^s |_{x=0} = -M_s, \quad E_s I_s u_{xxx}^s |_{x=l_s} = -M_{s+1} \quad (1.8)$$

описывающие упругие колебания звеньев манипулятора. В (1.7) при суммировании индекс  $r$  равен  $r = \max(i, j)$ ; запись  $[a \times b]_z$  означает проекцию векторного произведения векторов  $a$  и  $b$  на ось  $OZ$ ;  $\rho_s(x)$  — линейная плотность стержня,  $0 \leq \rho_{s1} \leq \rho_s(x) \leq \rho_{s2}$ ,  $0 < x < l_s$ .

Запишем систему из  $n+1$  уравнений, описывающих изменение переменных  $q$ :

$$\begin{aligned} \sum_{s=j}^{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^s q_i'' \int_{P_s} (b_i^s, b_j^s) dm_s - \sum_{i=1}^s \sum_{l=1}^s q_i' q_l' \int_{P_s} [b_j^s \times b_r^s]_z dm_s + \right. \\ \left. + g \int_{P_s} (b_j^s, e_1) dm_s \right\} = M_j - \delta M_j^y \quad (j=1, \dots, n+1), \quad r = \max(i, l) \end{aligned} \quad (1.9)$$

В (1.9) левая часть уравнений с точностью до малых членов порядка  $|u||q''|$ ,  $|u||q''|^2$  совпадает с уравнениями движения  $n$ -звенного манипулятора с абсолютно жесткими звеньями, а  $\delta M^y$  —  $(n+1)$ -мерный вектор добавочных моментов, определяемых соотношениями

$$\delta M_j^y = \sum_{s=j}^{n+1} \int_{P_s} [(b_j^s, k_s) u_{tt}^s - 2u_i^s (q_i' + \dots + q_s') [b_j^s \times k_s]_z] dm_s \quad (j=1, \dots, n+1) \quad (1.10)$$

Для однозначного нахождения движения системы зададим в начальный момент времени упругую деформацию и скорость упругой деформации звеньев манипулятора, а также начальные значения для  $q$  и  $\dot{q}$

$$\begin{aligned} q_i(t_0) = q_i^0, \quad \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_i^0 \quad (i=1, \dots, n+1) \\ u^s(0, x) = f_s(x), \quad u_i^s(0, x) = g_s(x) \quad (0 \leq x \leq l_s) \\ (f_s(0) = f_s(l_s) = 0) \quad (s=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Таким образом, движение упругого манипулятора с грузом определяется системой интегродифференциальных уравнений в частных производных (1.7), (1.9), граничных (1.8) и начальных (1.11) условий, причем уравнения (1.9) отличаются от уравнений движения манипулятора с  $n$  абсолютно жесткими звеньями наличием в правой части добавочного мо-

мента (1.10), обусловленного упругими колебаниями звеньев манипулятора.

Предположим, что на упругий манипулятор наложено  $m$  голономных связей

$$\varphi_s = \varphi_s^\circ, \dots, \varphi_{s+m-1} = \varphi_{s+m-1}^\circ \quad (1.12)$$

т. е. фиксированы углы в  $m$  шарнирах  $L_s, \dots, L_{s+m-1}$ . В зависимости от значений индексов  $s$  и  $m$  будем выделять следующие возможные случаи:

одновременно выполнены неравенства  $s > 1$  и  $s+m-1 < n+1$ , т. е. группа фиксированных шарниров является внутренней;

выполнено неравенство  $m < n+1$  и индекс  $s=1$ , т. е. группа фиксированных шарниров начинается с первого шарнира;

выполнено неравенство  $m < n+1$  и равенство  $s+m-1 = n+1$ , т. е. группа фиксированных шарниров заканчивается на последнем шарнире  $L_{n+1}$ ;

у манипулятора фиксированы все шарниры.

В первом случае в силу наложенных связей (1.12) в выражении для элементарной работы непотенциальных сил обращаются в нуль слагаемые при изменении индекса  $i$  от  $s$  до  $s+m-1$ . Интегрируя по частям в подынтегральном выражении (1.5) вариацию потенциальной энергии (1.1), находим граничные условия для функций упругой деформаций звеньев в фиксированных шарнирах

$$E_{i-1} I_{i-1} u_{xx}^{i-1} \Big|_{x=l_{i-1}} = E_i I_i u_{xx}^i \Big|_{x=0} \\ u^{i-1}(t, l_{i-1}) = u^i(t, 0) = 0 \quad (i=s, \dots, s+m-1) \quad (1.13)$$

Согласно (1.12), также выполняются соотношения

$$u_x^{i-1}(t, l_{i-1}) - u_x^i(t, 0) = q_i^y, \quad q_i^y = q_i - \varphi_i^\circ \quad (i=s, \dots, s+m-1) \quad (1.14)$$

Моменты упругих сил, действующие в фиксированных шарнирах, определяются равенствами

$$M_i^y = -E_i I_i u_{xx}^i \Big|_{x=0} \quad (i=s, \dots, s+m-1) \quad (1.15)$$

Подставляя выражения для моментов упругих сил в правую часть уравнений (1.9), получаем замкнутую систему интегродифференциальных уравнений в частных производных (1.7), (1.9), граничных условий (1.8) для свободных шарниров и (1.13), (1.14) для фиксированных шарниров, начальных условий (1.11), определяющих движение упругого манипулятора с грузом с учетом наложенных связей (1.12) в первом случае. При этом предполагается, что заданные начальные условия (1.11) являются совместными с наложенными связями.

Во втором, третьем и четвертом случаях система уравнений движения, граничных и начальных условий имеет вид, аналогичный первому случаю.

2. Рассмотрим упругий манипулятор, в шарнирах  $L_2, \dots, L_{n+1}$  которого сосредоточены точечные массы  $m_1, \dots, m_n$  и выполнено тождество  $\varphi_s(x) \equiv 0$  ( $s=1, \dots, n$ ,  $0 < x < l_s$ ). При этом уравнения (1.7) определяют равновесное положение нейтральной линии звеньев и имеют вид

$$(E_s I_s u_{xx}^s)_{xx} = 0 \quad (s=1, \dots, n) \quad (2.1)$$

а вектор добавочных моментов (1.10) обращается в нуль  $\delta M^y \equiv 0$ .

Введем следующие обозначения:  $\psi_i^+ = u_x^i \Big|_{x=l_i}$  — угол поворота правого конца  $i$ -го звена относительно линии  $L_i L_{i+1}$  его недеформированного положения и  $\psi_i^- = u_x^i \Big|_{x=0}$  — угол поворота левого конца  $i$ -го звена относительно линии  $L_i L_{i+1}$  (фиг. 1). Величины  $\psi_i^-$ ,  $\psi_i^+$  устанавливают связь между углом  $\varphi_i$  в  $i$ -м шарнире и переменной  $q_i$  при помощи соотношений

$$q_i = \varphi_i + \psi_{i-1}^+ - \psi_i^- \quad (i=1, \dots, n+1), \quad \psi_0^+ = \psi_{n+1}^- = 0 \quad (2.2)$$

Используя (2.1) а также граничные условия (1.8), получим выражения

для величин  $\psi_i^-$ ,  $\psi_i^+$ . Предполагая, что звенья манипулятора являются прямолинейными стержнями постоянной жесткости, находим

$$\psi_i^- = (M_i + \frac{1}{2}M_{i+1})/C_i, \quad \psi_i^+ = -(\frac{1}{2}M_i + M_{i+1})/C_i, \\ C_i = 3E_i I_i / l_i \quad (2.3)$$

В (2.3)  $C_i$  — жесткость на изгиб  $i$ -го звена,  $0 < C_i < \infty$ . Уравнения (1.9), соответствующие переменным  $q_i$ , запишем в виде

$$Aq'' + \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} [q^s D_{ps} q^p] \eta_s - M_g = M \quad (2.4)$$

Здесь  $\eta_s$  —  $(n+1)$ -мерный вектор с  $s$ -й ненулевой составляющей,  $M_g$  —  $(n+1)$ -мерный вектор силы тяжести

$$M_{gj} = -g \sum_{p=j}^{n+1} m_p (\mathbf{b}_j^p, \mathbf{e}_1) \quad (j=1, \dots, n+1) \quad (2.5)$$

$A$  — матрица размерности  $(n+1) \times (n+1)$ , элементы которой равны

$$a_{ij} = \Theta + \sum_{p=1}^{n+1} m_p h(p-i) h(p-j) (\mathbf{b}_i^p, \mathbf{b}_j^p) \quad (2.6)$$

В (2.6)  $\Theta$  — центральный момент инерции груза относительно оси, перпендикулярной плоскости  $OXY$ , вектор  $\mathbf{b}_i^p$  соединяет  $i$ -й шарнир с  $p$ -й массой; функция  $h(x) \equiv 1$  при  $x \geq 0$  и  $h(x) \equiv 0$  при  $x < 0$ .

Матрица символов Кристоффеля первого рода размером  $(n+1) \times (n+1)$  имеет следующую структуру:

$$D_{ps} = -m_p h(p-s) \times \\ \times \left\| \begin{array}{cc} h(p-1) [\mathbf{b}_s^p \times \mathbf{b}_1^p]_z & h(p-2) [\mathbf{b}_s^p \times \mathbf{b}_2^p]_z \\ \vdots & \vdots \\ h(p-n-1) [\mathbf{b}_s^p \times \mathbf{b}_{n+1}^p]_z \\ \hline h(p-n-1) [\mathbf{b}_s^p \times \mathbf{b}_{n+1}^p]_z & h(p-n-1) [\mathbf{b}_s^p \times \mathbf{b}_{n+1}^p]_z \end{array} \right\| \quad (2.7)$$

а ее элементами являются проекции векторных произведений векторов  $\mathbf{b}_i^p$  на ось  $OZ$ .

Предположим, что в начальный момент времени  $t_0=0$  моменты, развиваемые приводами в шарнирах, равны нулю и, следовательно, согласно (2.3), равны нулю упругие деформации звеньев. Положение системы упругий манипулятор — груз в момент времени  $t_0=0$  определим заданием начальных углов и угловых скоростей в шарнирах

$$\varphi_i(t_0=0) = \varphi_i^0, \quad \dot{\varphi}_i(t_0=0) = \omega_i^0 \quad (i=1, \dots, n+1) \quad (2.8)$$

В момент времени  $t_0+0$  при приложении в шарнирах моментов  $M$  возникают упругие деформации звеньев (2.3), а положение шарниров, груза и ориентация груза будут определяться переменными  $q$ , для которых выполняются начальные условия

$$q_i(t_0) = \varphi_i^0, \quad \dot{q}_i(t_0) = \omega_i^0 \quad (i=1, \dots, n+1) \quad (2.9)$$

Следовательно, движение упругого манипулятора с грузом описывается системой дифференциальных уравнений (2.4) и начальных условий (2.9), а упругие деформации звеньев манипулятора находятся из соотношений (2.3).

Рассмотрим случай программного управления моментами  $M(t)$ , завися-

щими от времени. При этом обобщенные переменные  $q$  в силу уравнений движения (2.4) и начальных условий (2.9) изменяются аналогично углам  $\Phi$  в шарнирах при движении манипулятора с абсолютно жесткими звеньями, управляемого теми же программными моментами  $M(t)$ . Так как обобщенные переменные  $q$  определяют положение шарниров, а также положение и ориентацию груза, то при управлении программными моментами  $M(t)$  упругие деформации звеньев не влияют на точность прохождения груза по траектории.

Если управление манипулятором с жесткими звеньями строится с использованием обратной связи по углам в шарнирах, то для упругого манипулятора для движения без погрешности следует формировать обратную связь, используя переменные  $q$  (2.2), которые зависят от углов в шарнирах и упругих деформаций звеньев.

Предположим, что на упругий манипулятор с безынерционными звеньями наложены связи (1.12). Определим упругие деформации звеньев и моменты упругих сил (1.15), действующие в фиксированных шарнирах в первом случае. Для этого запишем граничные условия (1.13), (1.14) в виде рекуррентных соотношений, связывающих углы упругого поворота концов  $(i-1)$ -го и  $i$ -го звеньев

$$\begin{aligned} \psi_i^+ &= -(C_{i-1}/C_i)\psi_{i-1}^- - 2(1+C_{i-1}/C_i)\psi_{i-1}^+ + 2q_i^y \\ \psi_i^- &= \psi_{i-1}^+ - q_i^y \quad (i=s, \dots, s+m-1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

При этом граничные условия (1.8) определяют два соотношения в начале и конце рекуррентной цепи

$$2\psi_{s-1}^- + \psi_{s-1}^+ - {}^3/2 M_{s-1}/C_{s-1} = 0, \quad \psi_{s+m-1}^- + 2\psi_{s+m-1}^+ + {}^3/2 M_{s+m}/C_{s+m-1} = 0 \quad (2.11)$$

Введем в рассмотрение функцию  $\sigma_1(\psi_{s-1}^-)$  упругой переменной  $\psi_{s-1}^-$ :

$$\sigma_1(\psi_{s-1}^-) = \psi_{s+m-1}^- + 2\psi_{s+m-1}^+ + {}^3/2 M_{s+m}/C_{s+m-1} \quad (2.12)$$

Из линейности рекуррентных соотношений (2.10), а также первого условия (2.11) следует, что  $\sigma_1$  — линейная функция упругой переменной  $\psi_{s-1}^-$ . Нулевой корень  $\psi_{s-1,0}^-$  линейной функции (2.12) находим вычисляя ее значение в двух, произвольно выбранных точках,  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\psi_{s-1,0}^- = x_1 + (x_1 - x_2)\sigma_1(x_1)/(\sigma_1(x_2) - \sigma_1(x_1)) \quad (2.13)$$

Значение  $\psi_{s-1,0}^-$  упругой деформации  $s-1$  звена позволяет определить из первого соотношения (2.11) значение упругой деформации  $\psi_{s-1,0}^+$ , а из (2.10) — упругие деформации  $\psi_i^-$ ,  $\psi_i^+$  ( $i=s, \dots, s+m-1$ ). При этом в силу выбора функции (2.12) будет выполняться второе условие (2.11) на правом конце рекуррентной цепи. Определим моменты упругих сил в фиксированных шарнирах  $L_s, \dots, L_{s+m-1}$  через упругие переменные  $q_s^y, \dots, q_{s+m}^y$  и моменты  $M_{s-1}$ ,  $M_{s+m}$ , развиваемые приводами в шарнирах  $L_s$ ,  $L_{s+m}$ , при помощи соотношений

$$M_i^y = {}^2/3 C_i (\psi_i^+ + 2\psi_i^-) \quad (i=s, \dots, s+m-1) \quad (2.14)$$

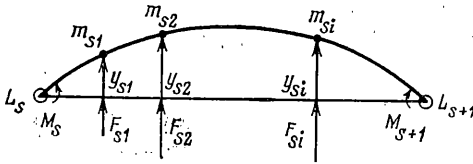
Подставляя выражения (2.14) для моментов упругих сил в правую часть уравнений (2.4), получаем уравнения движения манипулятора с фиксированными углами в  $m$  шарнирах. При этом упругие деформации  $s-1, \dots, s+m-1$  звеньев определяются соотношениями (2.10), (2.11), а для остальных звеньев — соотношениями (2.3).

Второй, третий и четвертый случаи исследуются аналогично первому.

3. Предположим, что каждое звено упругого манипулятора состоит из  $t_1, \dots, t_n$  точечных масс, соединенных между собой невесомыми однородными упругими стержнями различной жесткости и длины. Для описания

движения системы в качестве обобщенных координат выберем переменные  $q_1, \dots, q_{n+1}$ , а также линейные смещения  $y_{si}$  ( $s=1, \dots, n; i=1, \dots, t_s$ ) точечных масс, расположенных на упругом звене перпендикулярно линии  $L_s L_{s+1}$  недеформированного положения звена (фиг. 2).

Рассмотрим  $s$ -е звено манипулятора и определим упругие силы  $F_{si}^y$ , действующие по обобщенным переменным  $y_{si}$ . Функция  $u^s(x)$  упругого смещения нейтральной линии звена на каждом невесомом участке звена удовлетворяет уравнению и граничным условиям соответственно:



Фиг. 2

$$(u^{si})^{IV} = 0 \quad (i=1, \dots, t_s+1) \quad (3.1)$$

$$u^{si}(l_{si}) = u^{s(i+1)}(0) = y_{si},$$

$$u_x^{si}(l_{si}) = u_x^{s(i+1)}(0)$$

$$E_{si} I_{si} u_{xxx}^{si}(l_{si}) =$$

$$= E_{s(i+1)} I_{s(i+1)} u_{xxx}^{s(i+1)}(0) \quad (i=1, \dots, t_s) \quad (3.2)$$

Здесь  $l_{si}$  — длина,  $E_{si}$  — модуль Юнга,  $I_{si}$  — момент инерции сечения стержня  $i$ -го участка  $s$ -го звена.

Кроме того, для первого и последнего участка выполнены условия

$$u^{s1}(0) = 0, \quad E_{s1} I_{s1} u_{xxx}^{s1}(0) = -M_s, \quad u^{sj}(l_{sj}) = 0$$

$$E_{sj} I_{sj} u_{xxx}^{sj}(l_{sj}) = -M_{s+1} \quad (j=t_s+1). \quad (3.3)$$

Решением дифференциального уравнения (3.1) является полином третьей степени  $u^{si}(x) = a_{si}x^3 + b_{si}x^2 + c_{si}x + d_{si}$  ( $i=1, \dots, t_s+1$ ), а граничные условия (3.2), (3.3) образуют систему  $4t_s+4$  линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов кубических полиномов, определяющих функцию  $u^{si}$  на каждом невесомом участке звена.

Подставив в (3.2) вместо функции  $u^{si}$  ее полиномиальное выражение, получим рекуррентные соотношения между коэффициентами полиномов на  $i$ -м и  $(i+1)$ -м участках

$$d_{s(i+1)} = y_{si}, \quad c_{s(i+1)} = 3a_{si}l_{si}^2 + 2b_{si}l_{si} + c_{si}, \quad b_{s(i+1)} = \xi_i(3a_{si}l_{si} + b_{si}),$$

$$a_{s(i+1)} = -b_{s(i+1)}/l_{s(i+1)} - c_{s(i+1)}/l_{s(i+1)}^2 - (y_{s(i+1)} - y_{si})/l_{s(i+1)}^3 \quad (i=1, \dots, t_s),$$

$$\xi_i = E_{si} I_{si} / E_{s(i+1)} I_{s(i+1)} \quad (3.4)$$

При этом соотношения (3.3) имеют вид

$$d_{s1} = 0, \quad 2b_{s1} = -M_s / E_{s1} I_{s1}, \quad a_{sj} l_{sj}^3 + b_{sj} l_{sj}^2 + c_{sj} l_{sj} + d_{sj} = 0,$$

$$6a_{sj} l_{sj} + 2b_{sj} = -M_{s+1} / E_{sj} I_{sj}, \quad j = t_s + 1 \quad (3.5)$$

Разрешая систему линейных уравнений (3.4), (3.5) и определяя функцию  $u^{si}(x)$  и ее производные, находим упругие силы, действующие по обобщенным переменным  $y_{si}$ :

$$F_{si}^y = E_{si} I_{si} u_{xxx}^{si}(l_{si}) - E_{s(i+1)} I_{s(i+1)} u_{xxx}^{s(i+1)}(0) \quad (i=1, \dots, t_s) \quad (3.6)$$

В случае наложенных связей (1.12) граничные условия (1.13), (1.14) для фиксированных шарниров совместно с соотношениями (3.2) и граничными условиями (3.3) для свободных шарниров образуют систему алгебраических уравнений, определяющую упругие деформации звеньев и, следовательно, моменты упругих сил (1.15) в фиксированных шарнирах, а также упругие силы  $F_{si}^y$  (3.6).

Составим уравнения движения, используя выражения (1.1), (1.2),

(1.4) для потенциальной и кинетической энергии, а также соотношения (3.6) для упругих сил, где интегрирование по элементам массы звеньев в (1.2), (1.4) заменено суммированием.

В результате находим  $K$  уравнений, описывающих изменение упругих переменных  $y_{si}$ :

$$m_{si} y_{si}'' = F_{si}^y - \sum_{j=1}^s m_{sj} (b_j^{si}, k_s) q_j'' - \sum_{l=1}^s \sum_{j=1}^s m_{sl} [b_r^{sl} \times k_s]_z q_l' q_j' - m_{si} g(k_s, e_1) \quad (s=1, \dots, n), \quad r = \max(l, j) \quad (3.7)$$

Здесь  $K = \sum_{s=1}^n t_s$ ,  $m_{si}$  — точечная масса с индексом  $i$ , расположенная на  $s$ -м упругом звене; вектор  $b_j^{si}$  соединяет  $j$ -й шарнир с массой  $m_{si}$ . Уравнения, описывающие изменение переменных  $q$ , имеют вид (1.9), (1.10), начальные условия для упругих переменных  $y_{si}$  определяются соотношениями

$$y_{si}(t_0) = y_{si}^{\circ}, \quad y_{si}'(t_0) = y_{si}^{\circ} \quad (i=1, \dots, t_s, \quad s=1, \dots, n) \quad (3.8)$$

Система дифференциальных уравнений и начальных условий (1.9) — (1.11), (3.7), (3.8) позволяет моделировать движение упругого манипулятора с грузом, каждое звено которого обладает конечным числом колебательных степеней свободы, и производить оценку влияния упругой податливости звеньев манипулятора на точность прохождения груза по траектории.

4. Рассмотрим двузвенный манипулятор, на каждом упругом невесомом звене которого расположена одна сосредоточенная масса. Движение упругого манипулятора описывается тремя обобщенными координатами  $q_1, q_2, q_3$  и двумя упругими координатами  $y_{11}, y_{21}$ . Разрешая систему линейных уравнений (3.4), (3.5) при  $t_s=1$ , определим упругие силы, действующие по обобщенным переменным  $y_{11}, y_{21}$ :

$$F_{si}^y = - \frac{C_s^{\circ}}{l_s^{\circ}} \left( \frac{y^{s1}}{l_s^{\circ}} - \frac{M_s}{2C_{s1}} - \frac{M_{s+1}}{2C_{s2}} \right) + \frac{M_s}{l_{s1}} + \frac{M_{s+1}}{l_{s2}} \quad (4.1)$$

$$C_s^{\circ} = C_{s1} C_{s2} / (C_{s1} + C_{s2}), \quad l_s^{\circ} = l_{s1} l_{s2} / (l_{s1} + l_{s2}) \quad (s=1, 2)$$

Запишем уравнения (3.7) упругих колебаний звеньев

$$y_{11}'' = F_{11}^y / m_{11} - l_{11} q_1'' - g \cos q_1, \quad y_{21}'' + l_1 \sin q_2 q_1'^2 = F_{21}^y / m_{21} - l_1 \cos q_2 q_1'' - l_{21} (q_1'' + q_2'') - g \cos (q_1 + q_2) \quad (4.2)$$

При этом явный вид уравнений (1.9) считается известным (2.4) и, чтобы не загромождать изложение, не приводится.

Определим вектор (1.10) добавочных моментов

$$\delta M_1^y = m_{11} l_{11} y_{11}'' + m_{21} [y_{21}'' (l_{21} + l_1 \cos q_2) - 2y_{21}' (q_1' + q_2')] l_1 \sin q_2$$

$$\delta M_2^y = m_{21} y_{21}'' l_{21}, \quad \delta M_3^y = 0 \quad (4.3)$$

Подставив соотношения (4.2), (4.3) в (1.9), находим уравнения, описывающие изменение обобщенных переменных  $q_1, q_2, q_3$ .

Предположим, что упругий манипулятор управляется программными моментами  $M(t)$ . Разрешая уравнения (1.9) относительно переменных  $q''$  и подставив найденные значения в (4.2), определим из уравнения частот [10] собственные частоты малых колебаний системы упругий манипулятор — груз

$$w_{1,2}^2 = 1/2 (n_1^2 + n_2^2) \pm 1/2 [(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2 n_2^2 \gamma_0^2]^{1/2}$$

$$n_1^2 = C_1^{\circ} (1 + a_{11}^{-1} m_{11} l_{11}^2) / m_{11} l_1^{\circ 2}, \quad n_2^2 = C_2^{\circ} (1 / m_{21} +$$



$$+a_{11}^{-1}(l_{21}+l_1 \cos q_2)^2 + 2a_{12}^{-1}l_{21}(l_{21}+l_1 \cos q_2) + a_{22}^{-1}l_{21}^2 / l_2^{\circ 2}$$

$$\gamma_0^2 = [a_{11}^{-1}(l_{21}+l_1 \cos q_2) + a_{12}^{-1}l_{21}]^2 l_{11}^{\circ 2} C_1^{\circ} C_2^{\circ} (l_1^{\circ} l_2^{\circ} n_1 n_2)^{-2}$$

Отметим, что если массо-инерционные характеристики перемещаемого груза намного превосходят массо-инерционные характеристики манипулятора и конфигурация манипулятора не является вырожденной, то коэффициент связанности [10] двух линейных колебательных систем  $\sigma = 2\gamma_0 n_1 n_2 / |n_1^2 - n_2^2|$  близок к нулю, т. е. колебания первого и второго звеньев упругого манипулятора происходят независимо с частотами  $n_1^2 \approx C_1^{\circ} / m_{11} l_1^{\circ 2}$  и  $n_2^2 \approx C_2^{\circ} / m_{21} l_2^{\circ 2}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 118–124.
2. Лакота Н. А., Разманов Е. В., Шведов В. Н. Управление упругим манипулятором на траектории. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 2, с. 53–59.
3. Разманов Е. В., Стрелков А. Н., Шведов В. Н. Разработка математической модели упругого манипулятора на подвижном основании. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 4, с. 109–114.
4. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Об управляемом вращении упругого стержня. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 587–595.
5. Черноусько Ф. Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 142–152.
6. Черноусько Ф. Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 101–113.
7. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
9. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
10. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. Л.: Гостехтеориздат, 1951. 334 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
30.III.1984