достигает предела текучести. Видно, что зона развитых пластических деформаций лежит в зоне «возможной» пластичности, полученной из упругого решения, т. е. упругое решение позволяет оценивать размер пластической зоны с некоторым запасом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыков Г. В., Скобеев А. М.* Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках. М.: Наука, 1978. 168 с.
2. *Соколовский В. В.* Распространение упруговязкопластических волн в стержнях.— ПММ, 1948, т. 12, вып. 3, с. 261—280.
3. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
4. *Кукуджанов В. Н.* Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.
5. *Кукуджанов В. Н.* Одномерные задачи распространения волн напряжений в стержнях. М.: ВЦ АН СССР, 1977. 54 с.
6. *Дашевский М. А.* Распространение волн при колебаниях тоннелей метро.— Строит. механика и расчет сооружений, 1974, № 6, с. 29—34.
7. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
8. *Никитин И. С.* Задача о подвижной нагрузке на границе упругого полупространства с цилиндрической полостью.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 3, с. 93—99.
9. *Ляхов Г. М.* Определение вязких свойств грунта.— ПМТФ, 1968, № 2, с. 68—71.

Москва

Поступила в редакцию
27.III.1984

УДК 624.07:534.1

ТЕРМОУСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

СОЛОМЕНЦЕВ Ю. Е.

Общие постановки и методы решения задач термовязкоупругости рассмотрены в [1]. Некоторые задачи устойчивости вязкоупругих систем исследовались в [2—4]. В публикуемой работе рассмотрена задача устойчивости неоднородно-стареющего вязкоупругого стержня под действием температурных напряжений.

1. Рассмотрим прямолинейный стержень длины l, изготовленный из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала. Поперечное сечение стержня имеет ось симметрии, его площадь равна S, а момент инерции относительно главной оси перпендикулярной оси симметрии равен J. Изгиб происходит в плоскости, проходящей через ось симметрии и продольную ось стержня Ox. В момент времени $t=0$ к стержню приложена распределенная поперечная нагрузка интенсивности $q(x)$. Температура стержня $\theta(t, x)$ считается заданной, причем $\theta(0, x)=0$; $\theta(t, x)=\partial\theta(t, x)/\partial t\geqslant 0$, $\forall x\in[0, l]$; функция $\theta_0(x)=\lim_t \theta(t, x)$, $t\to\infty$ непрерывна и ограничена.

Возраст элемента материала стержня в окрестности точки x при $t=0$ обозначим $\rho(x)$, $\rho(0)=0$. Функция ρ кусочно непрерывна и ограничена. При одноосном напряженном состоянии напряжение $\sigma(t, x)$ и деформация $\varepsilon(t, x)$ связаны соотношениями [3] $\varepsilon=E^{-1}(I+K)\sigma+\alpha\theta=E^{-1}(I-R)^{-1}\sigma+\alpha\theta$, $\sigma=E(I+K)^{-1}(\varepsilon-\alpha\theta)=E(I-R)\cdot(\varepsilon-\alpha\theta)$, где E — мгновенный модуль Юнга, $\alpha>0$ — коэффициент линейного теплового расширения, I — единичный оператор, K — оператор ползучести с ядром $k(t, \tau)\geqslant 0$, R — оператор релаксации с ядром $r(t, \tau)\geqslant 0$. Функции $k(t, \tau)$ и $r(t, \tau)$ предполагаются слабосингулярными

$$K\sigma(t,x)=\int_0^t k(t+\rho(x),\tau+\rho(x))\,\sigma(\tau,x)\,d\sigma$$

$$R\varepsilon(t,x)=\int_0^t r(t+\rho(x),\tau+\rho(x))\,\varepsilon(\tau,x)\,d\tau$$

Пусть прогиб $y(t, x)$ мал так, что $(y'(t, x))^2=(\partial y(t, x)/\partial x)^2\ll 1$ и выполняется гипотеза плоских сечений.

Определение. Стержень называется устойчивым на бесконечном интервале времени, если для любого числа $A>0$ найдется такое число $\delta=\delta(A)$, что из неравенства $\sup_x |q(x)|<\delta$ следует оценка $\sup_{t,x} |y(t, x)|<A$, $x\in[0, l]$, $t\in[0, \infty)$.

2. Рассмотрим поведение жестко заделанного по торцам стержня на интервале времени $[0, T]$. Прогибы и продольные смещения $u(t, x)$ удовлетворяют граничным условиям

$$u(t, 0)=u(t, l)=0, \quad y(t, 0)=y(t, l)=0, \quad y'(t, 0)=y'(t, l)=0 \qquad (2.1)$$

Нормальное усилие $N=ES(I-R)(u'-\alpha\theta)$ и изгибающий момент $M=EJ(I-R)y''$ удовлетворяют уравнениям равновесия, и поэтому изогнутая ось бруса находится из соотношения

$$EJ[(I-R)y'']''=(Ny')'+q \qquad (2.2)$$

Введем обозначения

$$Y_j^2(t)=\int_0^l\left(\frac{\partial^j y(t,x)}{\partial x^j}\right)^2 dx \quad (j=0,1,2)$$

$$Z_j(t)=\sup_\tau Y_j(\tau) \quad (0\leqslant\tau\leqslant t) \qquad (2.3)$$

Предположим, что существует такая функция $r_1(t, \tau)$, что для любого $x\in[0, l]$:

$$0\leqslant r(t+\rho(x), \tau+\rho(x))\leqslant r_1(t, \tau)$$

$$|r_1|=\sup_t\int_0^t r_1(t,\tau)\,d\tau<1 \qquad (2.4)$$

Умножая (2.2) на $y(t, x)$ и интегрируя по x в пределах от 0 до l, получим

$$Y_2(t)=\int_0^l y''Ry''\,dx+EJ^{-1}\int_0^l qy\,dx-(EJ)^{-1}N(t)Y_1^2(t) \qquad (2.5)$$

Пользуясь неравенством Коши — Буняковского и тождеством Рэлея [5], из (2.4), (2.5) получим оценку

$$Y_2(t)(1-|N(t)|(EJ\lambda)^{-1})\leqslant\int_0^t r_1(t,\tau)Y_2(\tau)\,d\tau+Q(EJ\lambda_1^{1/2})^{-1}, \qquad Q^2=\int_0^l q^2(x)\,dx \qquad (2.6)$$

где $\lambda>0$, $\lambda_1>0$ — минимальные собственные значения краевых задач $d^4\psi/dx^4-\lambda_1\psi=0$, $d^4\psi/dx^4+\lambda\psi''=0$ с граничными условиями $\psi(0)=\psi(l)=0$, $\psi'(0)=\psi'(l)=0$.

Из леммы Гронуола — Беллмана следует, что если

$$1-(EJ\lambda)^{-1}|N(t)|>0 \qquad (2.7)$$

то существует постоянная $c_1>0$, что при всех $0\leqslant t\leqslant T$ будет $Y_2(t)\leqslant c_1 Q$.

Вычислим $N(t)$. Из уравнений равновесия следует, что

$$N(t)=ES(I-R)(u'(t, x)-\alpha\theta(t, x))=ES(I-R^\vee)(u'(t, 0)-\alpha\theta(t, 0))$$

где $R^\vee$ — оператор релаксации с ядром $r(t, \tau)$. Значит, $u'(t, x)=(I-R)^{-1}(I-R^\vee)\cdot(u'(t, 0)-\alpha\theta(t, 0))+\alpha\theta(t, x)$. Отсюда и из граничных условий (2.1) следует, что $u(t, l)=0=l(I+K_2)(I-R^\vee)(u'(t, 0)-\alpha\theta(t, 0))+\alpha v(t)$, где K_2 — оператор с ядром

$$k_2(t,\tau)=l^{-1}\int_0^l k(t+\rho(x), \tau+\rho(x))\,dx, \qquad v(t)=\int_0^l \theta(t,x)\,dx$$

Тогда имеем

$$N(t)=-\alpha_1(I+K_2)^{-1}v(t)=-\alpha_1(I-R_2)v(t), \quad \alpha_1=\alpha ESl^{-1} \tag{2.8}$$

Ядро оператора R_2 обозначим $r_2(t, \tau)$. Из (2.8) видно, что если стержень упругий, то нормальное усилие имеет вид $N_1(t)=-\alpha_1 v(t)$. Вводя меру релаксации $\omega(t,\tau)$ соотношениями

$$r_2(t, \tau)=\partial\omega(t, \tau)/\partial\tau, \quad \omega(t, \tau)\geqslant 0$$

$$0\leqslant\tau\leqslant t, \quad \omega(t, t)=0 \tag{2.9}$$

причем функция $\omega(t, \tau)$ при $t\to\infty$ стремится к своему предельному значению $\omega_0(\tau)$ равномерно по τ на любом конечном интервале изменения τ, и предполагая, что $|r_2|<1$, получим

$$N(t)=N_1(t)+\alpha_1\int_0^t \omega(t,\tau)v(\tau)d\tau \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует, что условие (2.7) выполнено, если справедливо неравенство

$$\alpha<lJ\lambda(Sv_0)^{-1}, \quad v_0=\int_0^l \theta_0(x)dx \tag{2.11}$$

3. Рассмотрим устойчивость на бесконечном интервале времени. Пусть существует функция $r_0(t, \tau)$, для которой равномерно по $t\geqslant T$ при $T\to\infty$ будет

$$\int_T^t \sup_x|r(t+\rho(x), \tau+\rho(x))-r_0(t,\tau)|d\tau\to 0, \quad |r_0|<1 \tag{3.1}$$

Оператор релаксации с ядром $r_0(t, \tau)$ обозначим через R_0.

Предельное значение N_0 нормального усилия имеет вид

$$N_0=\lim_t N(t)=-\alpha_1\int_0^\infty (1-\omega_0(\tau))v^\bullet(\tau)d\tau \tag{3.2}$$

Теорема. Пусть выполнены условия (2.10), (3.1). Тогда стержень устойчив, если при всех $t\geqslant 0$ выполнено (2.7) (или (2.11)) и, кроме того, $1-|r_0|-N_0(\lambda EJ)^{-1}>0$.

Доказательство. Запишем (2.5) в виде

$$Y_2{}^2(t)=\int_0^l y''R_0y''\,dx+(EJ)^{-1}\int_0^l [qy-N_0(y')^2-(N-N_0)(y')^2+EJy''(R-R_0)y'']dx \tag{3.3}$$

Аналогично (2.6) имеем оценки

$$\left|\int_0^l y''R_0y''\,dx\right|\leqslant|r_0|Y_2(t)Z_2(t), \qquad \left|\int_0^l N_0(y')^2\,dx\right|\leqslant|N_0|\lambda^{-1}Y_2{}^2(t) \tag{3.4}$$

Для двух последних слагаемых в правой части получаем, что для фиксированных ε_1, $t_1(\varepsilon_1)$:

$$\left|\int_0^l (N-N_0)(y')^2\,dx\right|\leqslant\varepsilon_1\lambda^{-1}Y_2{}^2(t), \quad t>t_1$$

$$\left|\int_0^l y''(R-R_0)y''\,dx\right|\leqslant Y_2(t)[(|r_0|+|r_1|)Z_2(t)+\varepsilon_1Z_2(t)] \tag{3.5}$$

Пользуясь неравенствами (3.4), (3.5) из (3.3), получаем

$$\beta_1 Z_2(t) \leqslant (|r_0|+|r_1|) Z_2(t) + Q(EJ\lambda_1^{1/2})^{-1} \tag{3.6}$$

$$\beta_1 = 1 - |r_0| - N_0(\lambda EJ)^{-1} - \varepsilon_1[1+(\lambda EJ)^{-1}]$$

Правая часть (3.6) может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора $q(x)$.

Полученные достаточные условия устойчивости существенно зависят от вида функции $\rho(x)$. В частности, возможны такие режимы температуры, при которых упругий стержень потеряет устойчивость, а вязкоупругий будет устойчивым. Механически это является следствием релаксации напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. *Огибалов П. М., Грибанов В. Ф.* Термоустойчивость пластин и оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1968. 520 с.
3. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
4. *Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д.* Устойчивость стержней из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала.– Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 177–187.
5. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.VI.1984