УДК 539.376

ЗАДАЧА О НАГРУЗКЕ, ПРИЛОЖЕННОЙ К НЕУПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

НИКИТИН И. С.

Численно, методом распада произвольного разрыва, решается модельная задача о взаимодействии волны, идущей от границы неупругого полупространства с заглубленной цилиндрической полостью. В результате решения получена картина полей напряжений и зон пластической деформации вокруг полости. Производится сравнение с упругим решением.

1. Экспериментальные исследования поведения грунтов при динамических нагрузках указывают на их выраженные вязкопластические свойства за статическим пределом текучести [1]. Для описания этих свойств требуется знание некоторой экспериментально определяемой функции, входящей в закон неупругого деформирования за пределом текучести. Одномерный вариант модели упруговязкопластической среды применительно к одноосному деформированию стержней был предложен в [2]. Обобщение на сложное напряженное состояние приведено в [3]. В общей форме выражение для тензора скоростей неупругой деформации $e_{ij}{}^p$ в упруговязкопластической среде имеет вид

$$2\mu e_{ij}{}^p=\frac{\langle\Phi(J_2{}^{1/2}/m-1)\rangle}{J_2{}^{1/2}/m}\,\frac{s_{ij}}{\tau_0}$$

где s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений, $J_2={}^1/_2 s^{ij}s_{ij}$ — второй инвариант девиатора, m — статический предел текучести, λ, μ — модули упругости Ламе, τ_0 — константа материала размерности времени, $\langle\Phi(z)\rangle=\Phi(z)\theta(z)$ — некоторая функция своего аргумента, $\theta(z)$ — функция Хэвисайда.

Примем простейшую линейную зависимость для функции $\Phi(z)-\langle\Phi(z)\rangle=z\theta(z)$, входящей в закон неупругого деформирования: $2\mu e_{ij}{}^p=\langle J_2{}^{1/2}/m-1\rangle s_{ij}m/J_2{}^{1/2}\tau_0$. Фактически это есть среда типа Максвелла, в которой время релаксации напряжений τ существенно нелинейно меняется с изменением напряженного состояния, а именно: $\tau^{-1}=0$, если напряжения не превысили предела текучести $\tau=\tau_0 J_2{}^{1/2}/(m\langle J_2{}^{1/2}/m-1\rangle)$ в противном случае. Из физических соображений можно ожидать, что если характерное время релаксации среды τ_0 много меньше времени пробега волны по характерному размеру задачи L, то $\tau_0\ll L/a$ или $\varepsilon=\tau_0 a/L\ll 1$ (a — скорость упругой продольной волны) и поведение среды будет мало отличаться от поведения идеальной упругопластической среды (за исключением окрестностей резких волновых фронтов, где характерное время изменения функций порядка или меньше характерного времени релаксации).

В одномерном случае строгое исследование этого вопроса проведено в [4], где для произвольной степенной зависимости $\Phi(z)=z^k$ показано, что при $\varepsilon\ll 1$ асимптотическое решение упруговязкопластической задачи отличается от предельного (при $\tau_0\to 0$) упругопластического лишь в окрестности сильных разрывов, и получены формулы для ширины размазанного пластического скачка.

В рассматриваемом случае ($k=1$) стремление решения к предельным значениям носит экспоненциальный характер, а эффективная ширина Δx переходной зоны не зависит от интенсивности пластической ударной волны. Оценка для Δx такова: $\Delta x\sim(\varepsilon t)^{1/2}$. Поэтому на фиксированном интервале времени для достаточно малых ε решение упруговязкопластической задачи действительно можно считать приближенным решением для идеальной упругопластической среды с критерием пластичности Мизеса [5].

Сформулируем следующую динамическую задачу: к границе полупространства, занимающего в декартовой системе координат x, y, z область $y\leqslant 0$ с цилиндрической полостью радиуса R на глубине H в момент $t=0$, прикладывается нормальная нагрузка величины $\sigma_0(t)$. Ось полости направлена вдоль оси z. Граница полости свободна от напряжений. Деформации предполагаются малыми.

В произвольной криволинейной системе координат для изотропной среды справедлива система уравнений

$$\rho v_{,t}{}^i=\nabla_j p^{ij},\qquad p_{,t}{}^{ij}=\lambda e_k{}^k g^{ij}+2\mu g^{i\alpha}g^{j\beta}e_{\alpha\beta}-\frac{\langle J_2{}^{1/2}/m-1\rangle}{J_2{}^{1/2}/m}\,\frac{s^{ij}}{\tau_0}$$

$$e_{\alpha\beta}={}^1/_2(\nabla_\alpha v_\beta+\nabla_\beta v_\alpha)$$

где p^{ij}, s^{ij}, v^i — контравариантные компоненты тензора напряжений, его девиатора и вектора скорости, g^{ij} — метрический тензор используемой системы координат, ρ — плотность среды.

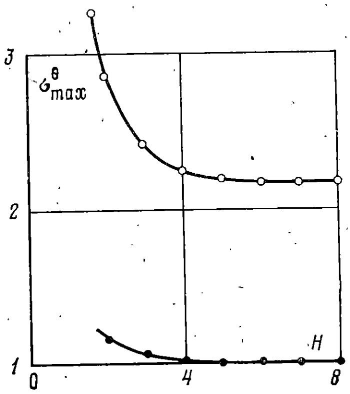
Введем биполярные координаты $x_1=\alpha$ и $x_2=\beta$ по формулам $x=a_0\sin\beta/(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)$, $y=-a_0\operatorname{sh}\alpha/(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)$, $a_0=(H^2-R^2)^{1/2}$ и безразмерные величины

$\sigma^{ij}=p^{ij}/(\lambda+2\mu)$, $u^i=-v^i/a$, $t^\circ=at/R$. Отметим, что биполярные координаты применялись в [6] для решения подобных упругих динамических задач – в несколько иной постановке и другим методом. В силу симметрии относительно оси $x=0$ задачу будем решать в правой полуплоскости $x\geqslant0$ $(\beta\geqslant0)$. В прямоугольнике $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0$, $0\leqslant\beta\leqslant\leqslant\beta_0$, где $\alpha_0=\mathrm{ch}\,(H/R)$, $\beta_0=\pi$, имеем систему уравнений

$$
\begin{gathered}
g\sigma_t^{11}+u_\alpha^1+\lambda u_\beta^2+2\,\frac{\lambda+\mu}{\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta}\,(u^2\sin\beta-u^1\,\mathrm{sh}\,\alpha)+g\,\frac{\sigma^{11}-\sigma}{\tau}=0\\
g\sigma_t^{12}+\mu u_\alpha^2+\mu u_\beta^1+g\sigma^{12}/\tau=0\\
g\sigma_t^{22}+\lambda u_\alpha^1+u_\beta^2+2\,\frac{\lambda+\mu}{\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta}\,(u^2\sin\beta-u^1\,\mathrm{sh}\,\alpha)+g\,\frac{\sigma^{22}-\sigma}{\tau}=0\\
u_t^1+\sigma_\alpha^{11}+\sigma_\beta^{12}+\frac{\sigma^{22}\,\mathrm{sh}\,\alpha+4\sigma^{12}\sin\beta-3\sigma^{11}\,\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta}=0\\
u_t^2+\sigma_\alpha^{12}+\sigma_\beta^{22}+\frac{3\sigma^{22}\sin\beta-4\sigma^{12}\,\mathrm{sh}\,\alpha-\sigma^{11}\sin\beta}{\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta}=0\\
\sigma=\frac{\sigma^{11}+\sigma^{22}+\sigma^{33}/g}{3},\quad g=\frac{a_0^2}{(\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta)^2},\quad \tau=\tau_0\,\frac{J_2^{1/2}/m}{\langle J_2^{1/2}/m-1\rangle}
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Граничные условия: $\sigma^{11}=\sigma_0(t)\,(1+\cos\beta)^2/a_0^2$, $\sigma^{12}=0$ при $\alpha=0$; $\sigma^{11}=\sigma^{12}=0$ при $\alpha=\alpha_0$; $\sigma^{12}=u^2=0$ (условия симметрии) при $\beta=0$ и $\beta=\beta_0$.

Система [1] решалась численно методом распада произвольного разрыва [7]. Расчеты проводились на сетке размером 50×50. Число Куранта для шага по времени выбиралось равным единице. Подробности построения численной схемы и оценки точности численных результатов приведены в [8]. Приложенная нагрузка выбиралась в виде «ступеньки» $\sigma_0(t)=\sigma_0\theta(t)$. Характерные константы среды типа грунта имеют порядок [1]: плотность $\sim1{,}5\times10^3$ кг/м^3, скорость продольных волн $\sim200-600$ м/с, предел текучести $\sim0{,}1-0{,}3$ МПа, модули Ламе приблизительно равны. Оценка для характерного времени релаксации $\sim10^{-3}$ с [9].



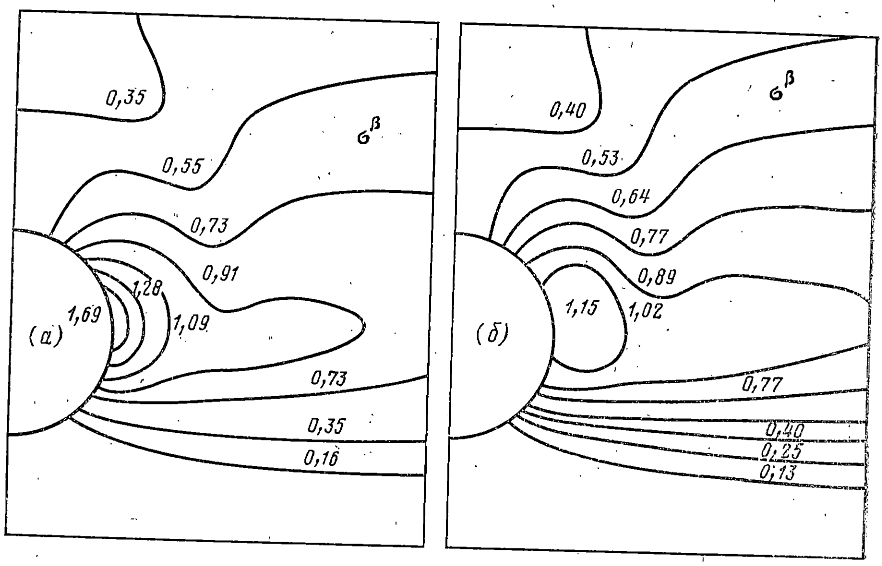
Фиг. 1

Модельные расчеты проводились при следующих значениях безразмерных параметров: $\lambda=\mu=0{,}33$, $\tau_0=0{,}03$, $\sigma_0=1$, $m=0{,}46$. При этих значениях падающая на полость волна была упругой, а возникновение и развитие пластических зон происходило только за счет дифракции на полости. Все результаты сравнивались с упругим решением, которое получается, если в уравнениях (1) положить $\tau^{-1}=0$. Изменение τ_0 в довольно широком интервале $\sim0{,}02-0{,}08$ на картине напряженного состояния вокруг полости после прохождения волнового фронта сказывается мало. При этом напряженное состояние вокруг полости таково, что в области ненулевых пластических деформаций условие пластичности можно считать практически выполненным.

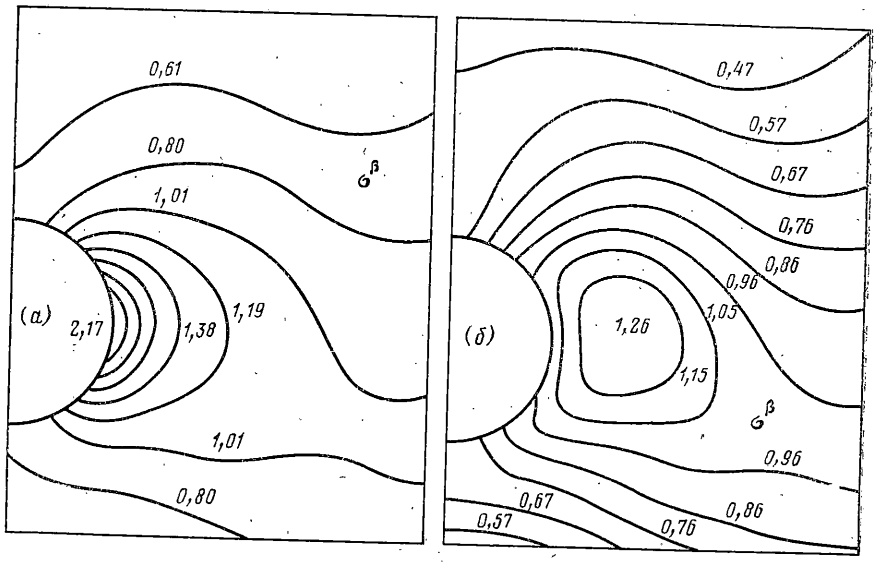
На фиг. 1 представлены зависимости величины $\sigma^\vartheta_{\max}$ в точке $\vartheta=\pi/2$ на полости от величины H. Верхняя линия соответствует упругому решению, нижняя – неупругому. Видно, что с уменьшением H до глубины $H\sim4$ концентрация напряжений у полости почти не меняется. С дальнейшим уменьшением концентрация возрастает, причем в неупругом решении значительно слабее, чем в упругом. Более подробный анализ результатов при $H=6$ приведен на фиг. 2, 3. На фиг. 2 представлены линии уровня величины σ^β (эта величина близка к σ^ϑ в окрестности полости и к σ^x вблизи границы полупространства) в момент $t_1=6{,}95$ (фронт продольной волны прошел полость), на фиг. 3 – в момент $t_2=8{,}95$. Фиг. 2, *а* и 3, *а* соответствуют полям напряжений в неупругой среде, а фиг. 2, *б* и 3, *б* – упругой среде.

Сравним основные особенности этих двух решений. Во-первых, значительное снижение концентрации напряжений в окрестности полости по сравнению с упругостью. В момент t_2 максимум σ^β достигает величины $\sim2{,}17$ в упругом решении и только $\sim1{,}26$ в неупругом (фиг. 3, *а*, *б*). Во-вторых, точка, в которой достигается максимум σ^β, смещается от свободной границы полости в упругом решении внутрь среды на расстояние $\sim R$ в неупругом.

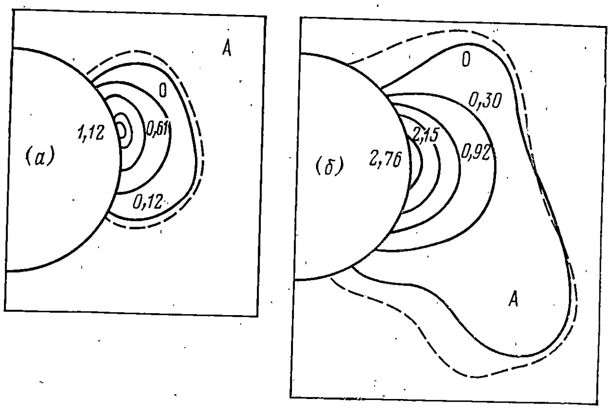
На фиг. 4, *а*, *б* приведены линии уровня пластической работы $A=\int s^{ij}e_{ij}{}^p dt$ в неупругом решении в момент t_1 и t_2. По ним можно судить о размерах пластической зоны вокруг полости. Штрихами на этих рисунках проведены линии, на которых величина второго инварианта девиатора напряжений в упругом решении



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

достигает предела текучести. Видно, что зона развитых пластических деформаций лежит в зоне «возможной» пластичности, полученной из упругого решения, т. е. упругое решение позволяет оценивать размер пластической зоны с некоторым запасом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыков Г. В., Скобеев А. М.* Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках. М.: Наука, 1978. 168 с.
2. *Соколовский В. В.* Распространение упруговязкопластических волн в стержнях.— ПММ, 1948, т. 12, вып. 3, с. 261—280.
3. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
4. *Кукуджанов В. Н.* Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.
5. *Кукуджанов В. Н.* Одномерные задачи распространения волн напряжений в стержнях. М.: ВЦ АН СССР, 1977. 54 с.
6. *Дашевский М. А.* Распространение волн при колебаниях тоннелей метро.— Строит. механика и расчет сооружений, 1974, № 6, с. 29—34.
7. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
8. *Никитин И. С.* Задача о подвижной нагрузке на границе упругого полупространства с цилиндрической полостью.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 3, с. 93—99.
9. *Ляхов Г. М.* Определение вязких свойств грунта.— ПМТФ, 1968, № 2, с. 68—71.

Москва — Поступила в редакцию 27.III.1984

УДК 624.07:534.1

ТЕРМОУСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

СОЛОМЕНЦЕВ Ю. Е.

Общие постановки и методы решения задач термовязкоупругости рассмотрены в [1]. Некоторые задачи устойчивости вязкоупругих систем исследовались в [2—4]. В публикуемой работе рассмотрена задача устойчивости неоднородно-стареющего вязкоупругого стержня под действием температурных напряжений.

1. Рассмотрим прямолинейный стержень длины l, изготовленный из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала. Поперечное сечение стержня имеет ось симметрии, его площадь равна S, а момент инерции относительно главной оси перпендикулярной оси симметрии равен J. Изгиб происходит в плоскости, проходящей через ось симметрии и продольную ось стержня Ox. В момент времени $t=0$ к стержню приложена распределенная поперечная нагрузка интенсивности $q(x)$. Температура стержня $\theta(t, x)$ считается заданной, причем $\theta(0, x)=0$; $\theta(t, x)=\partial\theta(t, x)/\partial t\geqslant 0$, $\forall x\in[0, l]$; функция $\theta_0(x)=\lim_t \theta(t, x)$, $t\to\infty$ непрерывна и ограничена.

Возраст элемента материала стержня в окрестности точки x при $t=0$ обозначим $\rho(x)$, $\rho(0)=0$. Функция ρ кусочно непрерывна и ограничена. При одноосном напряженном состоянии напряжение $\sigma(t, x)$ и деформация $\varepsilon(t, x)$ связаны соотношениями [3] $\varepsilon=E^{-1}(I+K)\sigma+\alpha\theta=E^{-1}(I-R)^{-1}\sigma+\alpha\theta$, $\sigma=E(I+K)^{-1}(\varepsilon-\alpha\theta)=E(I-R)\cdot(\varepsilon-\alpha\theta)$, где E — мгновенный модуль Юнга, $\alpha>0$ — коэффициент линейного теплового расширения, I — единичный оператор, K — оператор ползучести с ядром $k(t, \tau)\geqslant 0$, R — оператор релаксации с ядром $r(t, \tau)\geqslant 0$. Функции $k(t, \tau)$ и $r(t, \tau)$ предполагаются слабосингулярными

$$K\sigma(t,x)=\int\limits_0^t k(t+\rho(x),\tau+\rho(x))\,\sigma(\tau,x)\,d\sigma$$

$$R\varepsilon(t,x)=\int\limits_0^t r(t+\rho(x),\tau+\rho(x))\,\varepsilon(\tau,x)\,d\tau$$

Пусть прогиб $y(t, x)$ мал так, что $(y'(t, x))^2=(\partial y(t, x)/\partial x)^2\ll 1$ и выполняется гипотеза плоских сечений.

Определение. Стержень называется устойчивым на бесконечном интервале вре-