УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ВОЗРАСТАЮЩЕМ УПРОЧНЕНИИ МАТЕРИАЛА

МАРТЫНОВА Е. Д.

Рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния тела, материал которого обладает возрастающим упрочнением, т. е. в нелинейной области рост интенсивности напряжений опережает рост интенсивности деформаций. Подобные свойства наблюдаются у пористых материалов при сжатии, а также у материалов, допускающих разрыхление, при разгрузке и повторном нагружении.

Вводится понятие обобщенного решения поставленной задачи. Доказывается, что при некоторых ограничениях на функцию Генки и нагрузки, действующее на тело, обобщенное решение существует и единственно. Для отыскания решения применяется метод последовательных приближений, в котором вместо нелинейной функции пластичности, используемой в материалах с убывающим упрочнением, известной из предыдущего приближения, считается функция Генки. Приводится доказательство сходимости применяемого итерационного процесса.

1. Сходимость метода упругих решений [1] была доказана в [2] при условии, что функция пластичности ω, зависящая от интенсивности деформаций e_u, удовлетворяет неравенствам $0\leqslant\omega\leqslant d(\omega e_u)/de_u\leqslant\lambda<1$. Для некоторых материалов, например полимеров при разгрузке, имеют место соотношения

$$3G\leqslant\sigma_u/e_u\leqslant d\sigma_u/de_u\leqslant\gamma<\infty\quad(\gamma=\text{const})\tag{1.1}$$

где G – модуль сдвига, σ_u – интенсивность напряжения. Условия (1.1) означают, что эти материалы обладают возрастающим упрочнением.

Рассмотрим задачу об определении напряженно-деформированного состояния тела, напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} которого связаны следующим образом:

$$\begin{gathered}S_{ij}={}^2/_3(\sigma_u/e_u)\,\Phi_{ij},\quad \sigma_u=3Ge_u(1-\omega(e_u))\\ S_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij},\quad \Phi_{ij}=\varepsilon_{ij}-\varepsilon\delta_{ij}\\ \sigma=K\theta,\quad 3\sigma=\sigma_{ij}\delta_{ij},\quad \theta=3\varepsilon=\varepsilon_{ij}\delta_{ij}\end{gathered}\tag{1.2}$$

при выполнении неравенств (1.1) (K – модуль объемной деформации). Заменяя в (1.1) σ_u его выражением через e_u, получим

$$-\infty<\gamma^0\leqslant d(\omega e_u)/de_u\leqslant\omega\leqslant0,\quad \gamma^0=1-{}^1/_3\gamma/G\tag{1.3}$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\sigma_{ij,\,j}+X_i=0\tag{1.4}$$

где $\mathbf{X}(X_i)$ – массовые силы; запятая перед индексом указывает на дифференцирование по соответствующей декартовой координате. Граничные условия примем в форме

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_1}=0,\quad \sigma_{ij}l_j|_{\Sigma_2}=R_i,\quad \Sigma_1\cup\Sigma_2=\Sigma\tag{1.5}$$

где $\mathbf{u}(u_i)$ – вектор перемещения точек тела, Σ – его поверхность, l_i – направляющие косинусы нормали к поверхности. Деформации и перемещения связаны линейными соотношениями

$$\varepsilon_{ij}={}^1/_2(u_{i,\,j}+u_{j,\,i})\tag{1.6}$$

Пусть C – множество вектор-функций $\mathbf{u}$, удовлетворяющих условию $\mathbf{u}|_{\Sigma_1}=0$ и таких, что $u_i\in C^{(2)}(V')$, где $V'=V\cup\Sigma$. Введем на C скалярное произведение и соответствующую ему норму

$$(\mathbf{u},\mathbf{u}^0)_1=2G\int\limits_V\Phi_{ij}\Phi_{ij}{}^0\,dv+K\int\limits_V\theta\theta^0\,dv$$

$$\|\mathbf{u}\|_1=\left(3G\int\limits_V e_u{}^2\,dv+K\int\limits_V\theta^2\,dv\right)^{1/2}\tag{1.7}$$

Замыкая C по норме (1.7), получим гильбертово пространство H, которое будет энергетическим пространством, связанным с оператором теории упругости [3]. Используя неравенство Корна и свойство энергетических пространств, согласно которому $H\subset L_2(V)$, можно показать, что если $\mathbf{u}\in H$, то u_i интегрируемы и имеют интегрируемые с квадратом обобщенные первые производные в V, т. е. $u_i\in W_2^{(1)}(V)$.

Отсюда на основании теорем вложения С. Л. Соболева $u_i \in L_q(V)$, $1<q<6$, $u_i \in L_r(\Sigma)$, $1<r<4$, причем выполняются неравенства

$$\|\mathbf{u}\|_{L_q(V)} \leqslant m\|\mathbf{u}\|_1, \quad \|\mathbf{u}\|_{L_r(\Sigma)} \leqslant m\|\mathbf{u}\|_1 \quad (m=\text{const}) \tag{1.8}$$

Вектор-функцию $\mathbf{u} \in H$ назовем обобщенным решением задачи (1.4), (1.5), если для любого $\mathbf{u}^0 \in H$:

$$\int\limits_V S_{ij}\Phi_{ij}{}^0\, dv + \int\limits_V \sigma\theta^0\, dv = \int\limits_V \mathbf{X}\mathbf{u}^0\, dv + \int\limits_{\Sigma_2} \mathbf{R}\mathbf{u}^0\, ds \tag{1.9}$$

где S_{ij}, σ выражаются через $\mathbf{u}$ по формулам (1.2), (1.6). Рассуждениями, аналогичными приведенным в [1], можно показать, что если обобщенное решение существует, то оно единственно. Заметим, что из равенства (1.9) следует выполнение условий равновесия и статических граничных условий, сформулированных при помощи принципа возможных перемещений Лагранжа.

Введем функцию $\psi(\sigma_u)$ соотношением $e_u={}^1/_3\sigma_u(1-\psi(\sigma_u))/G$. Очевидно, что $\psi(\sigma_u)=-\omega(e_u)/(1-\omega(e_u))$, причем в силу неравенств (1.3) она должна удовлетворять условиям

$$0 \leqslant \psi(\sigma_u) \leqslant d(\psi\sigma_u)/d\sigma_u \leqslant \Gamma < 1 \quad (\Gamma=\text{const}) \tag{1.10}$$

2. Будем искать обобщенное решение методом последовательных приближений, определив итерационный процесс следующим образом:

$$\int\limits_V S_{ij}^{(n+1)}\Phi_{ij}{}^0\, dv + \int\limits_V \sigma^{(n+1)}\theta^0\, dv = \int\limits_V \mathbf{X}\mathbf{u}^0\, dv + \int\limits_{\Sigma_2} \mathbf{R}\mathbf{u}^0\, ds \tag{2.1}$$

$$S_{ij}^{(n+1)} = 2G\Phi_{ij}^{(n+1)} + \psi(\sigma_u^{(n)})S_{ij}^{(n)}, \qquad \sigma^{(n+1)}=K\theta^{(n+1)} \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(n+1)} = {}^1/_2(u_{i,j}^{(n+1)} + u_{j,i}^{(n+1)}), \qquad \mathbf{u}^{(n+1)}|_{\Sigma_1}=0 \tag{2.3}$$

Будем считать, что $X_i \in L_s(V)$, ${}^6/_5<S<\infty$, $R_i \in L_t(\Sigma_2)$, ${}^4/_3<t<\infty$. Это обеспечивает существование интегралов в правой части равенства (2.1).

Подставим в выражение (2.1) соотношения (2.2). В результате получим

$$(\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{u}^0)_1 = \int\limits_V \mathbf{X}\mathbf{u}^0\, dv + \int\limits_{\Sigma_2} \mathbf{R}\mathbf{u}^0\, dS - \int\limits_V \psi(\sigma_u^{(n)})S_{ij}^{(n)}\,\Phi_{ij}{}^0\, dv \tag{2.4}$$

Поскольку $u_i{}^0 \in W^{(1)}(V)$, то $\Phi_{ij}{}^0 \in L_2(V)$, следовательно, если $S_{ij}^{(n)} \in L_2(V)$, то

$$\left|\int\limits_V S_{ij}^{(n)}\,\Phi_{ij}{}^0\, dv\right| \leqslant \left(\int\limits_V S_{ij}^{(n)}S_{ij}^{(n)}\, dv\right)^{1/2}\left(\int\limits_V \Phi_{ij}{}^0\Phi_{ij}{}^0\, dv\right)^{1/2} \leqslant m_1\|\mathbf{u}^0\|_1$$

$$(m_1=\text{const}>0)$$

Отсюда на основании неравенств (1.8), (1.10) получим оценку правой части равенства (2.4):

$$\left|\int\limits_V \mathbf{X}\mathbf{u}^0\, dv + \int\limits_{\Sigma_2} \mathbf{R}\mathbf{u}^0\, ds - \int\limits_V \psi(\sigma_u^{(n)})S_{ij}^{(n)}\,\Phi_{ij}{}^0\, dv\right| \leqslant m_2\|\mathbf{u}^0\|_1 \qquad (m_2=\text{const}>0)$$

При фиксированном $S_{ij}^{(n)} \in L_2(V)$ правая часть равенства (2.4) является линейным ограниченным функционалом в H относительно $\mathbf{u}^0$, следовательно, по теореме Рисса в левой части этого равенства $\mathbf{u}^{(n+1)} \in H$. Отсюда на основании формул (2.2), (2.3) получаем, что $\varepsilon_{ij}^{(n+1)}$, $\sigma_{ij}^{(n+1)} \in L_2(V)$. Взяв $\sigma_{ij}^{(0)} \in L_2(V)$ (например, можно положить $\sigma_{ij}^{(0)} \equiv 0$, что соответствует $\psi(\sigma_u^{(0)}) \equiv 0$), будем иметь $\mathbf{u}^{(n)} \in H$, $\varepsilon_{ij}^{(n)}$, $\sigma_{ij}^{(n)} \in L_2(V)$ для любого n, что обеспечивает существование интегралов в левой части равенства (2.1).

Докажем сходимость рассматриваемого итерационного процесса. Из выражения (2.1), положив $\mathbf{u}^0=\mathbf{u}^{(n+1)}-\mathbf{u}^{(n)}$, будем иметь

$$\int\limits_V (S_{ij}^{(n+1)} - S_{ij}^{(n)})(\Phi_{ij}^{(n+1)} - \Phi_{ij}^{(n)})\, dv + \int\limits_V (\sigma^{(n+1)}-\sigma^{(n)})(\theta^{(n+1)}-\theta^{(n)})\, dv=0 \tag{2.5}$$

Используя соотношения (2.2), найдем выражения для Φ_{ij}^{n+1} и $\theta^{(n+1)}$ и подставим их в (2.5). В результате получим

$$\frac{1}{2G}\int\limits_V (S_{ij}^{(n+1)}-S_{ij}^{(n)})(S_{ij}^{(n+1)}-S_{ij}^{(n)})\,dv+\frac{1}{K}\int\limits_V (\sigma^{(n+1)}-\sigma^{(n)})^2\,dv= \tag{2.6}$$

$$=\frac{1}{2G}\int\limits_V (S_{ij}^{(n+1)}-S_{ij}^{(n)})(\psi(\sigma_u^{(n)})S_{ij}^{(n)}-\psi(\sigma_u^{(n-1)})S_{ij}^{(n-1)})\,dv$$

Для вектор-функции $\boldsymbol{\sigma}(\sigma_{ij})$ введем скалярные произведения и нормы

$$(\boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{\sigma}^0)=S_{ij}S_{ij}^{\circ},\quad \|\boldsymbol{\sigma}\|=\sqrt{2/3}\,\sigma_u \tag{2.7}$$

$$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}^0)_2=\frac{1}{2G}\int\limits_V(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}^0)\,dv+\frac{1}{K}\int\limits_V\sigma\sigma^0\,dv$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_2=\left(\frac{1}{3G}\int\limits_V\sigma_u^2\,dv+\frac{1}{K}\int\limits_V\sigma^2\,dv\right)^{1/2} \tag{2.8}$$

Теперь равенство (2.6) запишется в виде

$$\|\delta\boldsymbol{\sigma}\|_2^2=\frac{1}{2G}\int\limits_V[\psi^{(n)}(\boldsymbol{\sigma}^{(n)},\delta\boldsymbol{\sigma})-\psi^{(n-1)}(\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)},\delta\boldsymbol{\sigma})]\,dv \tag{2.9}$$

$$\psi^{(n)}\equiv\psi(\sigma_u^{(n)}),\qquad \delta\boldsymbol{\sigma}\equiv\boldsymbol{\sigma}^{(n+1)}-\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$$

Обозначим подынтегральное выражение в (2.9) через A и оценим его, используя неравенства Шварца, треугольника, (1.10) и равенство (2.7):

$$A=\psi^{(n)}(\boldsymbol{\sigma}^{(n)}-\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)},\delta\boldsymbol{\sigma})+(\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)})(\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)},\delta\boldsymbol{\sigma})\leqslant\psi^{(n)}\|\boldsymbol{\sigma}^{(n)}-\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)}\|\|\delta\boldsymbol{\sigma}\|+$$

$$+\left|\frac{\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)}}{\sigma_u^{(n)}-\sigma_u^{(n-1)}}\right|\frac{|\|\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\|-\|\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)}\||}{\|\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)}\|}\sigma_u^{(n-1)}\|\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)}\|\|\delta\boldsymbol{\sigma}\|\leqslant$$

$$\leqslant\|\delta\boldsymbol{\sigma}\|\|\boldsymbol{\sigma}^{(n)}-\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)}\|\left(\psi^{(n)}+\left|\frac{\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)}}{\sigma_u^{(n)}-\sigma_u^{(n-1)}}\right|\sigma_u^{(n-1)}\right)$$

Согласно неравенствам (1.10), $d\psi/d\sigma_u\geqslant0$, $d(\psi\sigma_u)/d\sigma_u\leqslant\Gamma$, следовательно $A\leqslant\Gamma\|\delta\boldsymbol{\sigma}\|\|\boldsymbol{\sigma}^{(n)}-\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)}\|$.

Подставляя эту оценку в соотношение (2.9) и используя неравенство Буняковского, получим

$$\|\delta\boldsymbol{\sigma}\|_2^2\leqslant\Gamma\left(\frac{1}{2G}\int\limits_V\|\delta\boldsymbol{\sigma}\|^2\,dv\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2G}\int\limits_V\|\boldsymbol{\sigma}^{(n)}-\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)}\|^2\,dv\right)^{1/2}\leqslant\Gamma\|\delta\boldsymbol{\sigma}\|_2\|\boldsymbol{\sigma}^{(n)}-\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)}\|_2$$

Считая, что $\delta\boldsymbol{\sigma}\equiv\boldsymbol{\sigma}^{(n+1)}-\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\neq0$, будем иметь $\|\boldsymbol{\sigma}^{(n+1)}-\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\|_2\leqslant\Gamma\|\boldsymbol{\sigma}^{(n)}-\boldsymbol{\sigma}^{(n-1)}\|_2$, откуда в силу неравенств (1.10) следует сходимость итерационного процесса по норме (2.8). Из полученного результата вытекает сходимость последовательностей $\{\sigma_{ij}^{(n)}\}$, $\{\varepsilon_{ij}^{(n)}\}$ по норме пространства $L_2(V)$ и последовательности $\{\mathbf{u}^{(n)}\}$ по норме пространства H.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.— Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений.— Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4, с. 740—743.
3. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л.: Гостехтеориздат, 1952. 216 с.

Москва

Поступила в редакцию 17.IV.1985