13. *Коноплев Ю. Г., Тильш А. Л.* Устойчивость цилиндрических оболочек с вырезами при кручении и внешнем давлении.— В кн.: Теория пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972, вып. 2, с. 159—165.

Москва

Поступила в редакцию
18.IV.1984

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

БЕРГМАН Р. М., ЛАТИФОВ Ф. С., МЕХТИЕВ М. Ф.

Рассмотрена задача о свободных колебаниях замкнутой упругой сферической оболочки со сплошным упругим заполнителем. В предположении, что жесткость материала оболочки намного больше жесткости материала заполнителя, а изменяемость искомого напряженно-деформированного состояния велика, проведен асимптотический анализ частот и форм колебаний оболочки.

1. Следуя [1], решения уравнений движения изотропной упругой среды в перемещениях в сферической системе координат, которыми будет описываться поведение сплошного заполнителя, имеют вид

$$s_\beta=\left(a_1\frac{\partial}{\partial\beta}Y^c-a_2\frac{k}{\sin\beta}Y^s\right)\sin\omega t \tag{1.1}$$

$$s_\theta=-\left(a_2\frac{\partial}{\partial\beta}Y^c+a_1\frac{k}{\sin\beta}Y^s\right)\sin\omega t,\qquad s_r=a_0Y^c\sin\omega t$$

$$a_0=\frac{A}{\mu_l}\frac{\partial}{\partial r}[j_n(\mu_l r)]+\frac{C\lambda_n^\circ}{\mu_t r}j_n(\mu_t r) \tag{1.2}$$

$$a_1=\frac{A}{\mu_l}j_n(\mu_l r)+\frac{C}{\mu_t r}\frac{\partial}{\partial r}[rj_n(\mu_t r)]$$

$$a_2=j_n(\mu_t r)B;\qquad Y^s=\sin k\theta p_n^k(\cos\beta)$$

$$Y^c=\cos k\theta p_n^k(\cos\beta),\qquad \lambda_n^\circ=n(n+1),\qquad \mu_l=\omega/a_l$$

$$\mu_t=\omega/a_t,\qquad a_l^2=(\lambda_s+2\mu_s)/\rho_s,\qquad a_t^2=\mu_s/\rho_s.$$

Здесь s_β, s_θ, s_r — перемещения заполнителя в направлении меридиана, параллели и нормали к поверхности сферы соответственно, ρ_s — плотность материала заполнителя, β, θ, r — сферические координаты, β — угол в меридиональной плоскости, θ — угол в плоскости параллели, r — расстояние от центра сферы, λ_s, μ_s — упругие постоянные Ламе, t — время, $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя первого рода порядка n ($n=0, 1, 2,\ldots$), $p_n^k(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра порядка n, k — число узловых меридианных плоскостей, a_l, a_t — скорости распространения продольных и поперечных волн, A, B, C — постоянные, ω — круговая частота.

Если решения уравнений движения моментной теории сферической оболочки в перемещениях u, v, w взять в виде (1.1) и положить $r=R$ в функциях $a_0(r)$, $a_1(r)$ и $a_2(r)$ (u, v, w — перемещения оболочки, соответственно, в направлении меридиана, параллели и нормали к поверхности сферы, R — радиус срединной поверхности оболочки), то первые три контактных условия на внутренней поверхности оболочки $r=R-h/2$ (h — толщина оболочки), которые можно приближенно считать поставленными при $r=R$ ($s_\beta=u$, $s_\theta=v$, $s_r=w$), автоматически выполняются. Оставшиеся контактные условия (равенства напряжений на поверхности оболочки, которые могут быть приближенно приняты при $r=R$) имеют вид

$$q_\beta=-\sigma_{r\beta},\qquad q_\theta=-\sigma_{r\theta},\qquad q_r=-\sigma_{rr} \tag{1.3}$$

где q_β, q_θ, q_r — компоненты контактного давления со стороны заполнителя на оболочку, $\sigma_{r\beta}$, $\sigma_{r\theta}$, σ_{rr} — компоненты тензора напряжений в заполнителе.

2. Выражая напряжения $\sigma_{r\beta}$, $\sigma_{r\theta}$, σ_{rr} через перемещения s_β, s_θ, s_r, используя

формулы (1.3) и уравнения движения оболочки [1], получаем частотное уравнение

$$\det\|b_{ij}\|=0 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3), \qquad b_{12}=b_{21}=b_{23}=b_{32}=0 \tag{2.1}$$

остальные элементы матрицы определителя (2.1) не приводятся. Отметим лишь, что они зависят от следующих безразмерных параметров:

$$E_s{}^*=E_s/Eh_*, \quad \rho_s{}^*=\rho_s/\rho h, \quad h_*=h/R, \quad \lambda=(1-\nu^2)\rho R^2\omega^2/E$$

$$\mu_l{}^*=\mu_l R=B_1\lambda\rho_s{}^*/E_s{}^*, \quad \mu_t=\mu_t R=A_1\lambda\rho_s{}^*/E_s{}^*$$

$$A_1=2(1+\nu_s)/(1-\nu^2), \quad B_1=(1-\nu_s-2\nu_s{}^2)/(1-\nu_s)(1-\nu^2)$$

где ν, ν_s, E, E_s – коэффициент Пуассона и модуль Юнга материалов оболочки и заполнителя, ρ – плотность материала оболочки. Число окружных полуволн k не входит в частотное уравнение, как и в случае сферической оболочки, не связанной со средой [2]. Видно, что уравнение (2.1) распадается на два уравнения относительно λ:

$$b_{22}=0, \qquad b_{11}b_{33}-b_{13}b_{31}=0 \tag{2.2}$$

которым соответствуют два типа колебаний [1]. Первый из них характеризуется деформациями оболочки и заполнителя без радиальных перемещений и относится к уравнению $b_{22}=0$, из которого определяется параметр частоты λ_1:

$$\lambda_1=\lambda_{10}-{}^1/{}_2\varkappa E_s{}^*[1-\mu_t{}^*j_n{}'(\mu_t{}^*)/j_n(\mu_t{}^*)] \tag{2.3}$$

$$\varkappa=1/A_1, \quad \lambda_{10}={}^1/{}_2(\lambda_n{}^\circ-2)(1-\nu)$$

причем λ_{10} – параметр частоты свободных колебаний сферической оболочки без заполнителя.

Второй тип колебаний характеризуется перемещениями без компонентов вращения и связан со вторым уравнением в (2.2), которое в отличие от первого уравнения имеет громоздкий вид.

Упростим уравнения (2.2), используя асимптотические формулы для логарифмических производных сферических функций Бесселя. При этом считаем, что перечисленные ниже параметры имеют следующие асимптотические порядки, измеренные степенями малого параметра h_*:

$$E_s{}^*\sim h_*{}^\alpha \quad (\alpha>0), \qquad n\sim h_*{}^{-c} \quad (0<c<1), \qquad E_s{}^*/\rho_s{}^*\sim h_*{}^\psi \quad (\psi\geqslant 0) \tag{2.4}$$

Первые два предположения выражают, соответственно, требования о том, что относительная жесткость материала заполнителя мала, а изменяемость искомого напряженно-деформированного состояния велика. Третье предположение выполняется для многих сочетаний материалов оболочки и упругой среды, например, для пары «сталь – древесина» $\psi=0$, а для пар «сталь – резина», «алюминий – резина» $\psi>0$ [3]. Рассмотрим область низших частот системы «оболочка – заполнитель». Для этого понадобится следующая асимптотическая формула [4], верная при $x\ll s^\circ$ ($s^\circ=n+{}^1/{}_2$):

$$j_n{}'(x)/j_n(x)\approx n/x-{}^1/{}_2x/s^\circ \tag{2.5}$$

Из области применимости формулы (2.5) вытекает следующее неравенство:

$$0<\lambda\ll s^{\circ 2}E_s{}^*/B_1\rho_s{}^*. \tag{2.6}$$

Можно показать, что λ_1 из (2.3) не удовлетворяет неравенству (2.6), поэтому упрощение выражения (2.3) при помощи формулы (2.5) неправомерно.

Применение формулы (2.5) ко второму уравнению в (2.2) дает кубическое уравнение относительно λ. Два относительно больших корня этого уравнения неравенству (2.6) не удовлетворяют, а относительно малый корень определяется из уравнения

$$\lambda s_1+s_2=0, \qquad s_2=\frac{2n}{B_1}E_s{}^*+s_0\left(1+\frac{A_1}{B_1}\right) \tag{2.7}$$

$$s_1=-s_0A_1\frac{\rho_s{}^*}{2n^2E_s{}^*}-\frac{A_1}{B_1}\left(1+\frac{\rho_s{}^*}{n}\right)-1, \qquad s_0=b^2n^4+1-\nu^2, \qquad b^2=\frac{h_*{}^2}{12}$$

Отметим, что корень $\lambda_2=-s_2/s_1$ уравнения (2.7) удовлетворяет неравенству (2.6), если $E_s{}^*\ll s_0(B_1+{}^1/{}_2A_1)[A_1/B_1-2+(1+A_1/B_1)(n/\rho_s{}^*)]^{-1}/n$. Формула для λ_2 при $\rho_s{}^*\to 0$ и $E_s{}^*\to 0$ с учетом $n\gg 1$ переходит в формулу для определения собственных частот сферической оболочки в вакууме [1]. Анализ показывает, что корню λ_2 соответствуют преимущественно радиальные колебания сферической оболочки, а при $\rho_s\gg n$ асимптотический порядок собственных частот системы понижается по сравнению с порядком частот собственных колебаний сферической оболочки, колеблющейся в вакууме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильгамов М. А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 181 с.
2. *Чернина В. С.* Свободные колебания тонкой замкнутой сферической оболочки.— В кн.: Тр. 8-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973, с. 575—579.
3. *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. 856 с.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Баку

Поступила в редакцию
3.VI.1984

УДК 539.374

ПОВЕДЕНИЕ ЦИЛИНДРА, ОСЛАБЛЕННОГО СИСТЕМОЙ СЛОЕВ ПОНИЖЕННОЙ ПРОЧНОСТИ, ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

КОЛОБАНОВА А. Е.

Численно исследуется процесс расширения цилиндра, содержащего систему одинаковых тонких параллельных слоев материала с прочностью, пониженной по сравнению с прочностью оболочки. Слои располагаются под углом 45° к радиальному направлению и служат моделью системы трещин сдвига. Исследованы особенности поведения этой системы в зависимости от числа слоев, их длины и относительной прочности слоя.

1. При разрушении цилиндрических оболочек под действием внутреннего давления газа при импульсном нагружении на внутренней поверхности оболочек, как правило, образуется область с многочисленными трещинами от сдвигов, ориентированных под углом 45° к радиальному направлению [1], причем эти трещины окружены узкими зонами материала с сильно деформированной структурой [2], известными как зоны адиабатического сдвига. При определенных условиях они дают в результате травления белые полосы [2]. Зоны адиабатического сдвига часто встречаются при динамическом нагружении (высокоскоростном ударе, резании и т. п.) [3]. Появление зон адиабатического сдвига объясняется локальным понижением в зоне прочности, как следствия адиабатического разогрева [4, 5]. Таким образом, разрушение сдвигом при больших скоростях деформации и общей текучести (что имеет место при импульсном нагружении) связывается с образованием узких зон пониженной прочности, существующих в процессе нагружения, вдоль которых и происходит разрушение сдвигом.

Задача решается в двумерной нестационарной постановке, т. е. моделируется расширение под действием внутреннего давления газа цилиндрической оболочки с системой тонких слоев пониженной прочности в условиях плоской деформации. Рассматривается (фиг. 1) поперечное сечение цилиндрической оболочки с системой тонких одинаковых слоев с прочностью, пониженной по сравнению с прочностью оболочки, расположенных на равном расстоянии друг от друга и ориентированных по логарифмической спирали, т. е. в каждой точке — под углом 45° к радиальному направлению. Внутри оболочки находится газ. Оболочка рассматривается как идеально упругопластическая. Процесс разрушения моделируется процессом скольжения двух частей оболочки вдоль слоя.

Система уравнений механики сплошной среды, описывающая поведение материала оболочки, в полярных координатах записывается в следующем виде:

уравнение неразрывности

$$\frac{d\gamma}{dt}+\frac{\gamma}{r}\left(\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)=0$$

уравнения движения

$$\gamma\frac{dv_r}{dt}=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}$$

$$\gamma\frac{dv_\theta}{dt}=\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}$$