

ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГЛЫМ ВЫРЕЗОМ

ИШЕНИЧНОВ С. Г.

Общая теория локальной устойчивости тонких упругих оболочек с вырезами, изложенная ранее в [1, 2], разработана достаточно подробно. Известен ряд работ [3-6], посвященных проблемам устойчивости пластин и оболочек с отверстиями, собран обширный экспериментальный материал. Тем не менее количество решенных конкретных задач весьма ограничено вследствие их математической сложности. В частности, локальная устойчивость цилиндрической оболочки с круговым вырезом теоретически исследовалась, главным образом, при воздействии равномерного осевого сжатия по торцам [7-9]. В публикуемой работе аналогичная задача решается для более широкого класса внешних нагрузок.

1. Рассмотрим тонкую упругую круговую цилиндрическую оболочку с неподкрепленным круглым вырезом на боковой поверхности, подверженную внешнему воздействию, симметричному относительно поперечного сечения и образующей, проходящих через центр отверстия. Считая радиус выреза меняющимся в пределах от нуля до значения порядка длины полуволны выпучивания при общей потере устойчивости соответствующей сплошной оболочки (для заданного вида внешней нагрузки), в качестве критерия локальной потери устойчивости оболочки примем бифуркационный. Будем считать возмущения мембранных усилий, прогиба и моментов затухающими с удалением от выреза, а оболочку — достаточно длинной, чтобы можно было не учитывать условия на ее торцах. Будем, кроме того, рассматривать оболочку как пологую.

В полярной на развертке срединной поверхности оболочки системе координат ρ , θ с началом в центре выреза (угол θ отсчитывается от образующей) уравнения устойчивости [2] приводятся к виду

$$\begin{aligned} \nabla^4 \varphi - \alpha \nabla_*^2 w + \frac{1}{16} \lambda L(w^0, w) &= 0 \\ \alpha \nabla^4 w + \chi \nabla_*^2 \varphi - \lambda L(w, \varphi^0) - \frac{1}{16} (\chi \lambda / \alpha) L(w^0, \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\alpha = h/R, \quad \chi = 12(1-\nu^2)\gamma^2, \quad \gamma = \rho_0^2/(Rh), \quad \lambda = 6(1-\nu^2)\gamma\sigma/E$$

Здесь R , h , ρ_0 — радиус оболочки, ее толщина и радиус выреза соответственно, σ — некоторое характерное напряжение ($\sigma > 0$), $w(r, \theta)$, $\varphi(r, \theta)$ — возмущения ($r = \rho/\rho_0$), $w^0(r, \theta)$, $\varphi^0(r, \theta)$ — прогиб и функция усилий в докритическом состоянии, выражения для которых около отверстия выберем в форме [10].

На контуре выреза ($r=1$) должны обращаться в нуль нормальное T_r и касательное $T_{r\theta}$ дополнительные мембранные усилия, а также изгибающий момент G_r и обобщенная перерезывающая сила Q_r^* . При $r \rightarrow \infty$ должен стремиться к нулю прогиб w вместе со своими производными, а также все дополнительные мембранные усилия.

Требуется определить минимальное положительное собственное значение λ_* поставленной задачи.

Выберем возмущения w , φ в виде (N задано):

$$w = r^{-\kappa} \sum_{k=0,2,4}^N A_k w_k(r) \cos k\theta, \quad \varphi = \sum_{m=0,2,4}^M \Phi_m(r) \cos m\theta \quad (1.2)$$

$$w_k(r) = 1 + \alpha_k^{(1)} r^{-\xi} + \alpha_k^{(2)} r^{-2\xi} \quad (\kappa > 1, \xi > 0)$$

Представление w в форме (1.2) удовлетворяет условиям затухания, а константы $\alpha_k^{(1)}$, $\alpha_k^{(2)}$ позволяют точно выполнить граничные условия для G_r и Q_r^* на контуре

выреза. После подстановки выражений (1.2) в первое уравнение системы (1.1) и использования граничных условий для φ определяются функции $\Phi_m(r)$ и число M . В предположении, что зона распространения локальных возмущений представляет собой область $1 \leq r \leq z$, второе уравнение (1.1) методом Бубнова сводится к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно A_k , для существования нетривиального решения которой требуется обращение в нуль ее детерминанта

$$\det(A + \lambda B + \lambda^2 C) = 0 \quad (1.3)$$

где A , B , C — квадратные матрицы порядка $N/2 + 1$.

Для всех элементов указанных матриц получены аналитические выражения, содержащие неопределенные параметры z , κ , ξ . Для вычисления λ_* следует при

$z \rightarrow \infty$ определить наименьший положительный корень уравнения (1.3) и минимизировать его по χ и ξ . Граница зоны возмущений определяется из анализа зависимости от z значения наименьшего положительного корня уравнения (1.3) при фиксированных параметрах χ_* , ξ_* , соответствующих λ_* . Отметим, что параметр ξ (в отличие от χ) слабо влияет на собственное значение и это существенно сокращает объем численного счета.

2. Пусть рассматриваемая оболочка подвержена равномерному осевому сжатию интенсивности P . В этом случае $\sigma = P$. Пренебрежем моментными докритическими состояниями. Для случая свободного выреза это допустимо [4] лишь при $\gamma < 2$, однако в результате использования решения [10] для $\gamma > 2$ изгибные докритические напряжения оказываются на порядок меньше мембранных при $r=1$, $\theta = \pm\pi/2$, т. е. в наиболее опасном месте с точки зрения локальной устойчивости. При этом, хотя решение [10] для $\gamma > 1$ дает погрешность в детальном распределении напряжений около выреза, полученная по [10] концентрация напряжений на контуре отверстия, имеющая основное значение при локальной потере устойчивости, при $\gamma < 5$ близка к реальной [4], полученной с учетом напряжений изгиба. Таким образом, по крайней мере для $\gamma < 5$, данное решение можно считать приемлемым. Проверочные расчеты критических нагрузок с учетом и без учета докритических моментов обнаружили совпадение результатов с точностью 1-3% при $1 < \gamma < 12$. Отметим, что, взяв докритическое состояние более близким к реальному, при $\gamma > 2$ докритические моменты следует учитывать.

Зависимость величины $\eta_1 = P_1/P_0$ (P_1 - критическая нагрузка для оболочки с вырезом, $P_0 = [3(1-\nu^2)]^{-0.5} E \alpha$) от γ при $R/h=300$ и $\nu=0,4$ представлена на фиг. 1 (кривая 1). Темными и светлыми точками отмечены данные опытов [9, 11], а так как в [11] в качестве P_0 выбиралось экспериментальное значение, то соответствующие результаты опытов представлены с учетом поправки. Установлено, что η_1 при фиксированном γ практически не зависит от α и слабо зависит от ν (этот вывод ранее сделан в [7]).

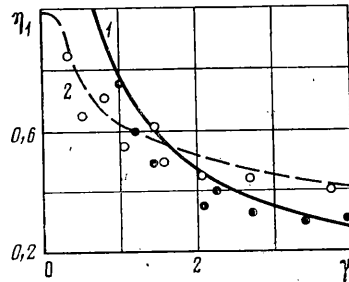
Для $\gamma > 5,5$ результаты расчетов оказались несколько ниже, чем в [8], где учитывалась геометрическая нелинейность (на фиг. 2, соответственно, кривые 1 и 3, $\nu=0,3$, $R/h=300$). Это объясняется тем, что для $\gamma > 4,5$ концентрация напряжений на контуре выреза в докритическом состоянии согласно [10] оказывается выше, чем наблюдаемая в опытах [11] или найденная на основе более точных численных исследований [4]. Умножением расчетных значений η_1 на поправочный коэффициент $k_\sigma = k'/k''$ (где k' и k'' - концентрации напряжений на контуре отверстия в докритическом состоянии, полученные с учетом изгиба, соответственно, из [10, 4]) строится кривая 2, уточняющая кривую 1 (фиг. 2). Она достаточно близка к кривой 3.

Характерная форма прогиба w на контуре выреза при $\gamma=2,5$, $R/h=300$ показана на фиг. 3 (кривая 1), где по оси ординат отложена величина $v = w/A_0$. Прогиб w максимален при $r=1$, $\theta = \pm\pi/2$; область возмущений распространяется от выреза на расстояние около $4r_0$.

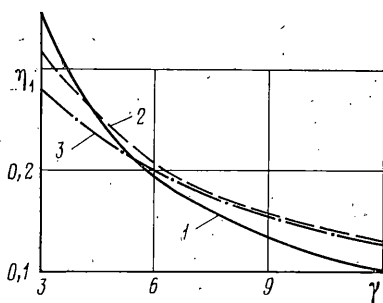
Потеря несущей способности оболочек с вырезами в статье не рассматривается, однако для сравнения при $0 < \gamma < 4$ приведены соответствующие результаты [12] (фиг. 1, кривая 2), полученные с помощью численного анализа при учете геометрической нелинейности и сопоставления с опытами [9]. Эти данные относятся к случаю двух диаметрально противоположных вырезов и равномерного сближения торцов оболочки. Для $\gamma > 1,5$ кривая 1 расположена ниже кривой 2, т. е. локальное выпучивание, вообще говоря, не ведет к общей потере устойчивости, что согласуется с выводами [9]. Для $\gamma > 4$ расхождение с результатами [12] значительно, более того, при $\gamma=3,6$ для случая двух вырезов обнаружено [12], что η_1 зависит не только от γ , но и от h/R . При больших γ становится существенным взаимное влияние отверстий, а также эффекты, связанные с нелинейностью.

Для равномерного осевого растяжения оболочки зависимость $\eta_2 = P_2/P_0$ (P_2 - критическая нагрузка для оболочки с вырезом) от γ при $R/h=300$ и $\nu=0,3$ показана на фиг. 4. При вариации параметров α и ν вид этой кривой практически не меняется. Расчеты проводились без учета докритических моментов. На фиг. 3 (кривая 2) представлена характерная форма прогиба w на контуре выреза при $\gamma=2,5$, $R/h=300$. Прогиб w максимален при $r=1$, $\theta=0$ и $r=1$, $\theta=\pi$; возмущения распространяются от выреза на расстояние около $8r_0$.

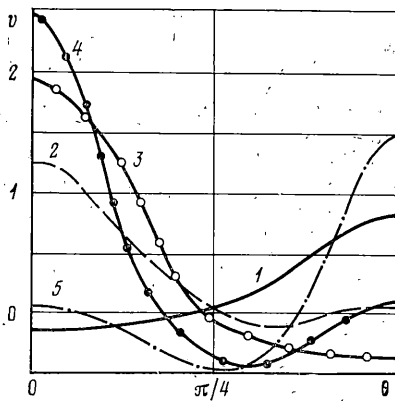
Рассмотрим случай равномерного внешнего давления Q на боковую поверхность оболочки. Отверстие закрыто крышкой, передающей на его контур лишь равномерную перерезывающую силу, при этом $\sigma = Q/\alpha$. Зависимость величины $\eta = Q_*/Q_\infty$ (Q_* - критическое давление для оболочки с вырезом, $Q_\infty = 1/4 E \alpha^3 / (1-\nu^2)$) от γ при $R/h=326$, $\nu=0,3$ представлена на фиг. 5. Кривая 1 соответствует расчетам при учете докритических моментов, кривая 2 - без их учета. В обоих вариантах величина η при фиксированном γ слабо зависит от ν и обратно пропорциональна α . Характер-



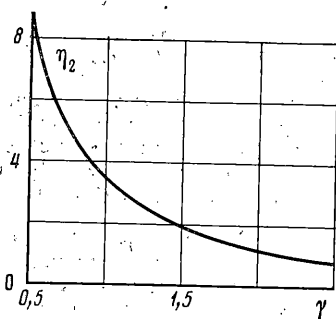
Фиг. 1



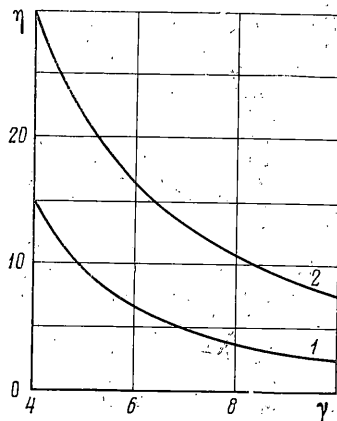
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



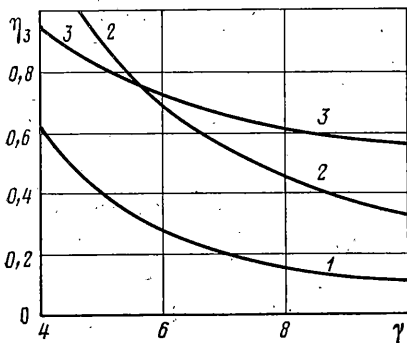
Фиг. 5

ная форма w на контуре выреза, найденная с учетом и без учета докритических моментов, для $\gamma=6$, $R/h=326$ показана на фиг. 3. (соответственно, кривые 3 и 4). Прогиб w максимален при $r=1$, $\theta=0$ и $r=1$, $\theta=\pi$, а возмущения распространяются на расстояние свыше $10r_0$.

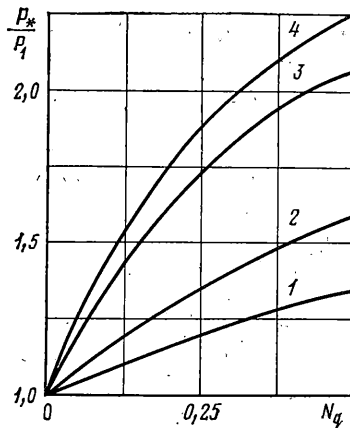
Для оболочки с параметрами $l/R=3,5$ (l — длина оболочки), $R/h=326$, $\nu=0,3$ и жестко зашпеленными торцами построена зависимость величины $\eta_3=Q_*/Q_0$ (где $Q_0=1,3E\alpha^{3/2}R/l$ — нагрузка общей потери устойчивости такой же оболочки без выреза) от γ при учете и без учета докритических моментов (соответственно, кривые 1 и 2 на фиг. 6). Здесь же цифрой 3 отмечена экспериментальная кривая [13], где значения Q_* соответствуют началу существенно нелинейного нарастания прогибов около выреза, предшествующему локальной потере устойчивости. Кривая 2 более близка к опытной. Это объясняется тем, что, во-первых, в [13] при вычислении η_3 величина Q_0 бралась из эксперимента и была ниже теоретической и, во-вторых, решение [10] для рассматриваемого диапазона изменения γ дает завышенную концентрацию напряжений около выреза в докритическом состоянии, причем эта концентрация, вычисленная без учета докритических моментов, является примерно такой же, какая получается с учетом моментов из более точных численных расчетов или наблюдается в опытах [4]. Кривую 1 можно уточнить умножив значения η_3 на коэффициент k_σ , аналогичный введенному для случая осевой силы.

В рассматриваемом диапазоне изменения параметра γ кривые 1 и 2 на фиг. 5, 6 заметно различаются между собой, поскольку при внешнем давлении для таких значений γ напряжения изгиба в докритическом состоянии существенны. Согласно решению [10], величины изгибных и мембранных напряжений оказываются одного порядка также и для меньших значений γ , вплоть до $\gamma=1$. Как показал численный расчет, сближение кривых 1 и 2 становится весьма заметным лишь для $\gamma < 1$; при $\gamma \rightarrow 0$ кривые 1 и 2 сливаются, а соответствующие величины η и η_3 неограниченно возрастают. Это означает, что если γ не превосходит определенного значения, зависящего от параметров R/h , l/R , а также условий на торцах оболочки, локальной потери устойчивости около отверстия не произойдет (при этом $\eta_3 > 1$) и оболочка будет терять устойчивость как сплошная.

Пусть рассматриваемая оболочка подвержена одновременно равномерному осе-



Фиг. 6



Фиг. 7

вому сжатию интенсивности P и равномерному внутреннему давлению Q (отверстие закрыто крышкой с указанными выше свойствами). Докритическое состояние представим как суперпозицию соответствующих решений из [10], учитывая при этом докритические моменты лишь за счет внутреннего давления.

Зависимость отношения P^*/P_1 (P^* — критическая сжимающая нагрузка при наличии внутреннего давления, P_1 — соответственно, при его отсутствии) от величины $N_q = Q/(P_0 \alpha)$ для $R/h=325$, $\nu=0,3$ и $\gamma=1,55$; 2; 2,8; 3,2 представлена на фиг. 7 (кривые 1–4). При фиксированном γ влияние α и ν на кривую зависимости P^*/P_1 от N_q пренебрежимо мало. Прогиб w максимален при $r=1$, $\theta=\pm\pi/2$ для всех рассмотренных значений N_q . Характерная форма w на контуре выреза при $\gamma=3,2$, $R/h=325$, $N_q=0,25$ изображена на фиг. 3 (кривая 5).

Во всех исследованных задачах в разложении (1.2) для w достаточно было сохранить первые три — пять членов, причем величины критических нагрузок при трех членах ряда оказывались больше соответствующих величин при пяти членах ряда менее чем на 3%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашмарин Ю. А. Теория упругой устойчивости цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием. — Прикл. механика, 1972, т. 8, № 1, с. 27–34.
2. Гузь А. Н. О постановке задач устойчивости пластин и оболочек, ослабленных отверстиями. — В кн.: Концентрация напряжений. Киев: Наук. думка, 1971, вып. 3, с. 51–53.
3. Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Кулиев Г. Г., Милованова О. Б. Разрушение и локальная потеря устойчивости тонкостенных тел с вырезами. — Прикл. механика, 1981, т. 17, № 8, с. 3–24.
4. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н., Чехов Вик. Н., Шнеренко К. И. Методы расчета оболочек. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. Киев: Наук. думка, 1980. 636 с.
5. Преображенский И. Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. М.: Машиностроение, 1981. 191 с.
6. Преображенский И. Н. Об исследованиях устойчивости тонкостенных оболочек с вырезами (обзор). Ч. 1, 2. — Пробл. прочности, 1982, № 1, с. 21–32; № 2, с. 74–81.
7. Голда Ю. Л. Исследование устойчивости цилиндрической оболочки с отверстием при осевом сжатии. — В кн.: Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси: Мецниереба, 1975, т. 1, с. 577–583.
8. Зацепина М. В., Хазанов Х. С. Устойчивость цилиндрической оболочки с круглым вырезом на боковой поверхности. — Тр. Куйбышев. авиац. ин-та, 1973, вып. 66, с. 22–28.
9. Starnes J. H., Jr. Effect of a circular hole on the buckling of cylindrical shells loaded by axial compression. — AIAA Journal, 1972, v. 10, No. 11, p. 1466–1472.
10. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.—Л.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
11. Tennyson R. C. The effects of unreinforced circular cutouts on the buckling of circular cylindrical shells under axial compression. — Trans. ASME. Ser. B. J. Engng for Industry, 1968, v. 90, No. 4, p. 541–546.
12. Almroth B., Brogan F., Marlowe M. Stability analysis of cylinders with circular cutouts. — AIAA Journal, 1973, v. 11, No. 11, p. 1582–1584.

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ
О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,
КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

БЕРГМАН Р. М., ЛАТИФОВ Ф. С., МЕХТИЕВ М. Ф.

Рассмотрена задача о свободных колебаниях замкнутой упругой сферической оболочки со сплошным упругим наполнителем. В предположении, что жесткость материала оболочки намного больше жесткости материала наполнителя, а изменчивость искомого напряженно-деформированного состояния велика, проведен асимптотический анализ частот и форм колебаний оболочки.

1. Следуя [1], решения уравнений движения изотропной упругой среды в перемещениях в сферической системе координат, которыми будет описываться поведение сплошного наполнителя, имеют вид

$$s_{\beta} = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial \beta} Y^c - a_2 \frac{k}{\sin \beta} Y^s \right) \sin \omega t \quad (1.1)$$

$$s_{\theta} = - \left(a_2 \frac{\partial}{\partial \beta} Y^c + a_1 \frac{k}{\sin \beta} Y^s \right) \sin \omega t, \quad s_r = a_0 Y^c \sin \omega t \quad (1.2)$$

$$a_0 = \frac{A}{\mu_l} \frac{\partial}{\partial r} [j_n(\mu_l r)] + \frac{C \lambda_n^0}{\mu_l r} j_n(\mu_l r)$$

$$a_1 = \frac{A}{\mu_l} j_n(\mu_l r) + \frac{C}{\mu_l r} \frac{\partial}{\partial r} [r j_n(\mu_l r)]$$

$$a_2 = j_n(\mu_l r) B, \quad Y^s = \sin k \theta p_n^k(\cos \beta)$$

$$Y^c = \cos k \theta p_n^k(\cos \beta), \quad \lambda_n^0 = n(n+1), \quad \mu_l = \omega / a_l$$

$$\mu_l = \omega / a_l, \quad a_l^2 = (\lambda_s + 2\mu_s) / \rho_s, \quad a_t^2 = \mu_s / \rho_s.$$

Здесь s_{β} , s_{θ} , s_r — перемещения наполнителя в направлении меридиана, параллели и нормали к поверхности сферы соответственно, ρ_s — плотность материала наполнителя, β , θ , r — сферические координаты, β — угол в меридиональной плоскости, θ — угол в плоскости параллели, r — расстояние от центра сферы, λ_s , μ_s — упругие постоянные Ламе, t — время, $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя первого рода порядка n ($n=0, 1, 2, \dots$), $p_n^k(\cos \theta)$ — присоединенная функция Лежандра порядка n , k — число узловых меридианов плоскостей, a_l , a_t — скорости распространения продольных и поперечных волн, A , B , C — постоянные, ω — круговая частота.

Если решения уравнений движения моментной теории сферической оболочки в перемещениях u , v , w взять в виде (1.1) и положить $r=R$ в функциях $a_0(r)$, $a_1(r)$ и $a_2(r)$ (u , v , w — перемещения оболочки, соответственно, в направлении меридиана, параллели и нормали к поверхности сферы, R — радиус срединной поверхности оболочки), то первые три контактных условия на внутренней поверхности оболочки $r=R-h/2$ (h — толщина оболочки), которые можно приближенно считать поставленными при $r=R$ ($s_{\beta}=u$, $s_{\theta}=v$, $s_r=w$), автоматически выполняются. Оставшиеся контактные условия (равенства напряжений на поверхности оболочки, которые могут быть приближенно приняты при $r=R$) имеют вид

$$q_{\beta} = -\sigma_{r\beta}, \quad q_{\theta} = -\sigma_{r\theta}, \quad q_r = -\sigma_{rr} \quad (1.3)$$

где q_{β} , q_{θ} , q_r — компоненты контактного давления со стороны наполнителя на оболочку, $\sigma_{r\beta}$, $\sigma_{r\theta}$, σ_{rr} — компоненты тензора напряжений в наполнителе.

2. Выражая напряжения $\sigma_{r\beta}$, $\sigma_{r\theta}$, σ_{rr} через перемещения s_{β} , s_{θ} , s_r , используя