

УДК 539.217

УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К ТРЕЩИНЕ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

БАЛУЕВА А. В., ЗАЗОВСКИЙ А. Ф.

Рассматривается связанная упругогидродинамическая задача об установившемся притоке жидкости к одиночной трещине в безграничной упругой пористой среде при зависимости гидравлической проводимости трещины от ее раскрытия. Задачи такого рода возникают при анализе работы нефтескважин при наличии в прискважинной зоне естественных или искусственно созданных трещин. В этих случаях характерно нелинейное изменение расхода жидкости с изменением давления в скважине — эффект, связанный с зависимостью проводимости прискважинной зоны от распределения в ней давления и обусловленный смыканием или раскрытием имеющихся в ней трещин.

В публикуемой работе используются две схемы для моделирования зависимости проводимости трещины от ее раскрытия: течение жидкости в трещине считается ламинарным и описывается формулой Буссинеска для движения жидкости в узкой щели; локальная проводимость трещины считается бесконечной, но учитывается уменьшение поверхности фильтрации за счет частичного или полного смыкания поверхностей трещины и образования так называемых зон налегания. Показано, что обе схемы приводят к немонотонным зависимостям расхода от давления в скважине (сначала расход увеличивается с уменьшением давления, затем, достигнув максимума, убывает и обращается в нуль при смыкании поверхностей трещины).

Конкретные расчеты с использованием первой схемы проведены для осесимметричной задачи о притоке жидкости к дискообразной трещине с эллиптическим начальным раскрытием. В рамках второй схемы разработан метод решения пространственных упругогидродинамических задач о притоке жидкости к плоской трещине произвольной формы в плане и произвольного начального раскрытия в неоднородном поле напряжений с учетом налегания поверхностей. Проанализировано влияние начальной формы трещины и ее раскрытия на вид зависимости расхода от давления в скважине.

1. Пусть в пористой насыщенной жидкостью среде имеется дискообразная трещина ($r \leq R, z=0$), начальное раскрытие которой равно $2w_0(r)$, с центрально расположенной относительно нее скважиной (фиг. 1). Радиус скважины r_0 мал по сравнению с радиусом трещины R . Деформирование среды описывается системой уравнений теории консолидации Био [1, 2], имеющей в стационарном случае в перемещениях вид

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \alpha^2 M + \mu) \text{grad } e - \alpha M \text{grad } \xi = 0$$
$$\nabla^2 \xi = 0, \quad \xi = p/M + \alpha e, \quad e = \text{div } \mathbf{u}$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений, p — поровое давление жидкости, λ и μ — коэффициенты Ламе скелета пористой среды, α и M — некоторые постоянные [2].

Отбор жидкости производится через скважину снижением в ней давления p_0 ниже начального давления жидкости в пористой среде p° . При этом снижение давления в трещине вызывает фильтрацию жидкости в трещину через ее поверхности и одновременно уменьшение начального раскрытия трещины под действием горного давления, т. е. уменьшение ее гидравлической проводимости.

Обозначим через $\varphi(r)$ разность между истинным давлением жидкости в трещине и начальным поровым давлением, $\varphi_0 = p_0 - p^\circ$ — соответствующий

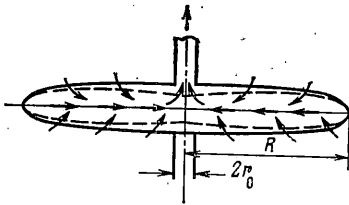
перепад давления жидкости, $2w(r)$ — раскрытие трещины, k — проницаемость пористой среды, μ' — вязкость жидкости и $G(r)$ — расход жидкости через цилиндрическое сечение трещины $r = \text{const}$. Тогда в случае установившегося движения будем иметь

$$\varphi(r) = \varphi_0 \quad (0 \leq r \leq r_0) \quad (1.1)$$

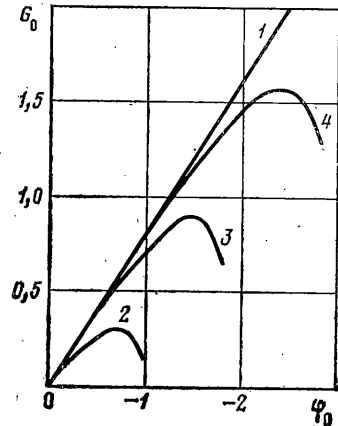
$$d\varphi(r)/dr = -3\mu' / [2w^3(r)] G(r) / (2\pi r) \quad (r_0 \leq r \leq R) \quad (1.2)$$

$$G(r) = -\frac{4\pi k}{\mu'} \int_r^R q(\rho) \rho d\rho, \quad q(r) = \left. \frac{\partial p(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (1.3)$$

Условие (1.1) означает постоянство давления жидкости в скважине, уравнение (1.2) следует из предположения о ламинарности движения



Фиг. 1



Фиг. 2

жидкости в трещине (формула Буссинеска), а (1.3) — из условия неразрывности потока в трещине.

При задании условий на границе трещины и ее продолжении наличием скважины пренебрегается в силу малости ее радиуса. Имеем

$$\sigma_{rz} = 0 \quad (r > 0), \quad u(r, 0) = 0, \quad \partial p(r, 0) / \partial z = 0 \quad (r > R) \quad (1.4)$$

$$p(r, 0) = \varphi(r), \quad \sigma_{zz}(r, 0) = -\varphi(r), \quad w(r) = w_0(r) + u(r, 0) \quad (r < R)$$

где σ_{zz} , σ_{rz} , p , u — полные напряжения, действующие на элемент двухфазной среды, поровое давление и смещение скелета пористой среды в направлении оси z , отсчитываемые от начального напряженно-деформированного состояния.

Связь между функциями $\varphi(r)$, $q(r)$, $w(r)$ находится с помощью обобщенного представления Ман-Нейми — Гибсона общего решения системы уравнений теории консолидации Био для полупространства [2]:

$$\begin{aligned} u &= -\partial E / \partial z + z \partial S / \partial z + (1 - 2D) S \\ \frac{1}{2} \sigma_{zz} / \mu &= \nabla^2 E - \partial^2 E / \partial z^2 + z \partial^2 S / \partial z^2 - D \partial S / \partial z \\ \frac{1}{2} \sigma_{rz} / \mu &= (\partial / \partial r) [-\partial E / \partial z + z \partial S / \partial z + (1 - D) S] \\ \frac{1}{2} p / \mu &= (-\eta \nabla^2 E + \partial S / \partial z) / \kappa \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$D = \frac{\lambda + \alpha^2 M + 2\mu}{\lambda + \alpha^2 M + \mu}, \quad \eta = \frac{\lambda + 2\mu}{2\alpha^2 M (D - 1)}, \quad \kappa = \frac{\mu}{\alpha M (D - 1)}$$

где E и S — произвольные бигармоническая и гармоническая функции.

Применяя преобразование Ханкеля по переменной r к (1.4) и (1.5) и выполняя обращение, получим систему трех уравнений относительно неизвестных функций $\varphi(r)$, $q(r)$, $w(r)$ [3]:

$$w(r) = w_0(r) - c \int_r^R \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^1 \frac{\rho[p_0 - \sigma_0 + \varphi(t\rho)] d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}, \quad c = \frac{D(2\eta - \kappa)}{\pi\mu(2\eta - 1)} \quad (1.6)$$

$$\varphi(r) = \varphi_0 + 3k \int_{r_0}^r \frac{dt}{tw^3(t)} \int_t^R \rho q(\rho) d\rho \quad (r_0 \leq r \leq R)$$

$$\varphi(r) = -\frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \int_t^R \frac{q(\rho)\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} \quad (r_0 \leq r \leq R)$$

Первое соотношение (1.6) совпадает по виду с формулой Снеддона для раскрытия дискообразной трещины в упругой среде [4]. В случае несжимаемой жидкости коэффициент c перед интегралом равен $2(1+\nu)/(\pi E)$ и отличается от соответствующего коэффициента для упругой среды на множитель $2(1-\nu)$ (σ_0 — вертикальное горное давление).

Второе уравнение (1.6) получено интегрированием уравнения движения жидкости в трещине (1.2) с учетом уравнения неразрывности (1.3).

Расчеты проводились для эллипсоидальных трещин, начальное раскрытие которых задавалось в виде

$$w_0(r) = c(R^2 - r^2)^{1/2} p' \quad (1.7)$$

где p' — некоторое фиктивное давление жидкости в трещине, препятствующее ее смыканию.

Решение нелинейной системы интегральных уравнений строилось методом последовательных приближений [3]¹. Сначала задавалось начальное приближение для смещения, например $w(r) = w_0(r)$. Затем оно подставлялось во второе уравнение (1.6), после чего правые части последних двух уравнений приравнявались. Получаемое в результате линейное интегральное уравнение первого рода относительно функции $q(r)$ решалось методом минимальных невязок. Найденное решение использовалось для вычисления $\varphi(r)$ и уточнения смещения и т. д.

Результаты расчетов в виде зависимости расхода извлекаемой жидкости $G_0 = G(r_0)$ от перепада давления φ_0 приведены на фиг. 2 ($R=1$, $r_0=0,05$, $k=0,001$, $\mu'=0,01$). Кривые 1–4 соответствуют $p'=1, 2, 3, \infty$; кривая 4 отвечает «идеальной» трещине, обладающей бесконечной гидравлической проводимостью. При малом снижении давления в скважине расход G_0 через поверхности трещины мало отличается от расхода через идеальную трещину. При больших значениях $-\varphi_0$ зависимость $G_0(\varphi_0)$ носит экстремальный характер, что является следствием уменьшения раскрытия трещины и резкого снижения ее гидравлической проводимости. При этом наибольшее относительное сближение поверхностей трещины наблюдается в ее центре, т. е. на стенках скважины.

2. Смыкание поверхностей трещин и возникновение зон налегания может оказывать существенное влияние на вид зависимости расхода G_0 от перепада давления φ_0 . При этом возможны две ситуации. Одна из них аналогична рассмотренной выше и состоит в том, что с увеличением $-\varphi_0$ первоначальный контакт поверхностей трещины реализуется непосредственно на стенке скважины и приводит к полному прекращению притока. Видимо, более распространенной является другая ситуация, когда в кон-

¹ См.: Завозский А. Ф. Исследование некоторых задач подземной гидродинамики в деформируемых пористых средах. Дис. на соискание уч. ст. канд. техн. наук. М.: Ин-т нефтехим. и газовой пром-ти, 1978. 212 с.

такт приходят поверхности трещины вдали от скважины (см., например, [5-7]), а дальнейшее снижение давления в скважине сопровождается образованием областей налегания. В результате уменьшается поверхность фильтрации жидкости в трещину и возрастает ее гидравлическое сопротивление. Исследование последнего эффекта проводилось на примере плоских трещин произвольной формы в плане и произвольного начального раскрытия $2w_0(x_1, x_2)$. Считалось, что трещина занимает в плоскости $x_3=0$ область $D(x_1, x_2)$. При этом пренебрегалось конечностью локальной гидравлической проводимости трещины там, где ее раскрытие $2w(x_1, x_2)$ отлично от нуля, а область (или области) налегания поверхностей трещины $D' \subset D$ считалась непроницаемой. Таким образом, давление жидкости в трещине $p^\circ + \varphi(x_1, x_2)$ всюду, за исключением областей налегания, принималось равным давлению в скважине $p_0 = p^\circ + \varphi_0$; сама же скважина исключалась из рассмотрения.

В этом случае задача сводится к отысканию решения уравнений теории консолидации Био в полупространстве $x_3 \geq 0$ при следующих граничных условиях на его поверхности:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad u = 0, \quad \partial p / \partial x_3 = 0 \quad (x_1, x_2) \in D \quad (2.1)$$

$$u \geq 0 \quad (x_1, x_2) \in D$$

$$\sigma_{33} \leq -\varphi_0, \quad \partial p / \partial x_3 = 0 \quad \text{при} \quad u + w_0 = 0 \quad (x_1, x_2) \in D \quad (2.2)$$

$$\sigma_{33} = -\varphi_0, \quad p = \varphi_0 \quad \text{при} \quad u + w_0 > 0 \quad (x_1, x_2) \in D \quad (2.3)$$

Условие (2.2) учитывает, что в областях контакта напряжение σ_{33} меньше внешних воздействий φ_0 из-за действия сил реакций от соприкасающихся поверхностей. Полные напряжения σ_{ij} , поровое давление p и нормальное смещение u поверхностей трещины, отсчитываемые от начального напряженно-деформированного состояния, выражаются через одну бигармоническую и две гармонические функции при помощи обобщенного представления Мак-Нейми - Гибсона общего решения уравнений теории консолидации Био

$$u = -\partial E / \partial x_3 + x_3 \partial S / \partial x_3 + (1-2D)S$$

$${}^{1/2}\sigma_{33}/\mu = \nabla^2 E - \partial^2 E / \partial x_3^2 + x_3 \partial^2 S / \partial x_3^2 - D \partial S / \partial x_3 \quad (2.4)$$

$$\frac{\sigma_{13}}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[-\frac{\partial E}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial S}{\partial x_3} + (1-D)S \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\sigma_{23}}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[-\frac{\partial E}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial S}{\partial x_3} + (1-D)S \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x_3} \right)$$

$${}^{1/2}p/\mu = (-\eta \nabla^2 E + \partial S / \partial x_3) / \kappa, \quad \nabla^2 \Theta = 0$$

В задаче (2.1)-(2.4) искомыми являются раскрытие трещины $2w = 2w_0 + 2u$ и плотность фильтрационного потока жидкости через ее поверхности, пропорциональная функции $q(x_1, x_2) = \partial p / \partial x_3$. Из (2.2)-(2.4) следует, что данная задача расщепляется на две, которые могут решаться последовательно (это связано с пренебрежением конечностью локальной гидравлической проводимости трещины). Поэтому сначала может быть найдено решение задачи теории упругости с массовыми силами, обусловленными действием градиентов давления фильтрующейся в пористой среде жидкости, т. е. функция $w(x_1, x_2)$ и область $D' \subset D$, в которой $w=0$. После чего определение $q(x_1, x_2)$ сводится к решению задачи теории фильтрации в полупространстве $x_3 \geq 0$, часть границы которого непроницаема, а на остальной части уже известной области $D'' = D/D'$ задано постоянное давление φ_0 . Указанные задачи далее будем называть соответственно задачей I и задачей II.

Воспользуемся для решения задач I, II вариационно-разностным ме-

тодом². Соответствующие функционалы строятся с помощью обобщенного преобразования Фурье по переменным x_1 и x_2 :

$$\varphi^*(\xi_1, \xi_2) = F\{\varphi(x_1, x_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) \exp(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.5)$$

Применяя (2.5) к (2.4), выбирая E^* , S^* и Θ^* в виде ($x_3 \geq 0$):
 $E^* = A_1 e^{-x_3 |\xi_1|} + A_2 x_3 e^{-x_3 |\xi_1|}$, $S^* = B e^{-x_3 |\xi_1|}$, $\Theta^* = C e^{-x_3 |\xi_1|}$, $|\xi| = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$
 и используя граничные условия (2.1)–(2.3), находим два уравнения для определения $u(x_1, x_2)$ и $q(x_1, x_2)$:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| u^*(\xi_1, \xi_2) \exp[-(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 = c \varphi_0 \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\xi|} q^*(\xi_1, \xi_2) \exp[-(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 = \varphi_0 \quad (2.7)$$

$$u^* = F\{u\} = \int_D u(x_1, x_2) \exp(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) dx_1 dx_2$$

$$q^* = F\{q\} = \int_{D''} q(x_1, x_2) \exp(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) dx_1 dx_2$$

Таким образом, вариационная постановка задачи I состоит в минимизации функционала

$$J_I = \frac{1}{c(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| u^*(\xi) \overline{u^*(\xi)} d\xi - 2\varphi_0 \int_D u(x) dx \quad (2.8)$$

на функциях $u(x_1, x_2)$, определенных в области D и удовлетворяющих в ней ограничению $u \geq -w_0$ (при расчетах полагалось $c=1$) [8].

Вариационная постановка задачи II заключается в безусловной минимизации функционала

$$J_{II} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\xi|} q^*(\xi) \overline{q^*(\xi)} d\xi - 2\varphi_0 \int_{D''} q(x) dx \quad (2.9)$$

на функциях $q(x_1, x_2)$, определенных в области D'' , которая находится из решения задачи I³.

В (2.8) и (2.9) $\overline{u^*}$ и $\overline{q^*}$ — величины, комплексно-сопряженные u^* и q^* .

Для отыскания функции $u(x_1, x_2)$ исходная область D разбивается на равные квадраты со стороной h и аппроксимируется сеточной областью $D(h)$. Решение ищется в виде разложения

$$u(x_1, x_2) = \sum_{p_1 p_2} U_{p_1 p_2} \Psi_{p_1 p_2}(x_1, x_2, h) \quad (2.10)$$

$$\Psi_{p_1 p_2}(x_1, x_2, h) = \begin{cases} (1 - |x_1/h - p_1|)(1 - |x_2/h - p_2|), & x \in g_{p_1 p_2}^{2h} \\ 0, & x \in g_{p_1 p_2} \end{cases}$$

$$g_{p_1 p_2}^{2h} = \{x: |x_1/h - p_1|, |x_2/h - p_2| \leq 1\}$$

² См.: Гольдштейн Р. В., Клейн И. С., Эскин Г. И. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости. — Препринт Ин-та проблем. механики АН СССР. М., 1973, № 33. 55 с.

³ См.: Гольдштейн Р. В., Завоский А. Ф. Численный метод решения пространственных задач теории упругости для тел с плоскими разрезами и уплотненными полостями. — Препринт Ин-та проблем. механики АН СССР. М., 1982, № 192. 45 с.

где неизвестные коэффициенты $U_{p_1 p_2}$, подлежащие определению, совпадают со значениями $u(x_1, x_2)$ в узлах сетки. Дискретная вариационная задача I принимает вид

$$\min_{U_{p_1 p_2} \geq -w_0(p_1 h, p_2 h)} \left\{ J_I(h) = \sum_{p_1 p_2} \sum_{q_1 q_2} a_{p_1 p_2 q_1 q_2} U_{p_1 p_2} U_{q_1 q_2} + 2 \sum_{p_1 p_2} U_{p_1 p_2} b_{p_1 p_2} \right\} \quad (2.11)$$

$$a_{p_1 p_2 q_1 q_2} = a'_{|p_1 - p_2| |q_1 - q_2|} = \frac{1}{c(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| \Psi_{p_1 p_2}(\xi, h) \overline{\Psi_{q_1 q_2}(\xi, h)} d\xi$$

$$b_{p_1 p_2} = \varphi_0 \iint_{\xi_{p_1 p_2}^{2h}} \Psi_{p_1 p_2}(x, h) dx, \quad \Psi_{p_1 p_2}(\xi, h) = h^2 \exp[ih(p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2)] \times \\ \times \frac{\sin^2(1/2 h \xi_1) \sin^2(1/2 h \xi_2)}{(1/2 h \xi_1)^2 (1/2 h \xi_2)^2}$$

Минимизация функционала осуществлялась методом проекции градиента с автоматическим выбором шага по соотношению между действительным приращением функционала и его линейной части [9].

Приведем краткое описание алгоритма метода [8]. Пусть известно некоторое приближение решения $U_{p_1 p_2}^{(i)}$, удовлетворяющее ограничениям $U_{p_1 p_2} \geq w_0(p_1 h, p_2 h)$. Его уточнение осуществляется посредством следующих действий: вычисляется значение функционала $J_I = J_I^{(i)}$ по формуле (2.11); находятся компоненты вектора-градиента функционала на смещениях U

$$d_{p_1 p_2}^{(i)} = \frac{\partial J_I(U_{p_1 p_2}^{(i)})}{\partial U_{p_1 p_2}} = 2 \left(\sum_{q_1 q_2} U_{q_1 q_2}^{(i)} a_{|p_1 - q_1| |p_2 - q_2|} + b_{p_1 p_2} \right)$$

выбирается шаг $\tau = \tau^{(i)}$; вычисляется приближение вектора $U_{p_1 p_2}^{(i+1)} = U_{p_1 p_2}^{(i)} - \tau^{(i)} d_{p_1 p_2}^{(i)}$; проверяется выполнение ограничений: если $U_{p_1 p_2}^{(i+1)} < -w_0(p_1 h, p_2 h)$, то соответствующее значение $U_{p_1 p_2}^{(i+1)}$ заменяется на $-w_0(p_1 h, p_2 h)$; вычисляется новое значение функционала $J_I^{(i+1)}$; проверяется условие убывания функционала: если $J_I^{(i+1)} < J_I^{(i)}$, то осуществляется переход к новой итерации с начальным приближением $U_{p_1 p_2}^{(i+1)}$; если $J_I^{(i+1)} > J_I^{(i)}$, то производится корректировка шага (в расчетах шаг $\tau^{(i)}$ уменьшался вдвое) и значения $U_{p_1 p_2}^{(i+1)}$ вычисляются заново.

Процесс продолжается до тех пор, пока изменения функционала на каждом шаге $-\Delta J_I^{(i)} = J_I^{(i)} - J_I^{(i+1)}$ превосходят некоторую заданную величину ϵ , подбираемую экспериментально.

Величина $\tau^{(i)}$ выбиралась не оптимальным образом, а корректировалась на каждом шаге по формуле $\tau^{(i+1)} = \alpha^{(i)} \tau^{(i)}$; при этом коэффициент изменения шага $\alpha^{(i)}$ вычислялся в соответствии с правилом

$$\alpha^{(i)} = 1 \quad \text{при} \quad 0,7\Delta J_L < \Delta J_I^{(i)} < 0,3\Delta J_L$$

$$\alpha^{(i)} = 1,2 \quad \text{при} \quad \Delta J_I^{(i)} \leq 0,7\Delta J_L; \quad \alpha^{(i)} = 0,7 \quad \text{при} \quad \Delta J_I^{(i)} \geq 0,3\Delta J_L$$

$$\Delta J_L = \sum_{p_1 p_2} \Delta U_{p_1 p_2}^{(i)} d_{p_1 p_2}^{(i)}$$

$$\Delta U_{p_1 p_2}^{(i)} = -\tau^{(i)} d_{p_1 p_2}^{(i)} \quad \text{при} \quad U_{p_1 p_2}^{(i+1)} \geq -w_0(p_1 h, p_2 h)$$

$$\Delta U_{p_1 p_2}^{(i)} = w_0(p_1 h, p_2 h) - U_{p_1 p_2}^{(i)} \quad \text{при} \quad U_{p_1 p_2}^{(i+1)} < -w_0(p_1 h, p_2 h)$$

Здесь ΔJ_L — изменение функционала J_I , предсказываемое линейной теорией. Начальное приближение $U_{p_1 p_2}^{(0)}$ выбиралось достаточно произвольно, например $U_{p_1 p_2}^{(0)} = 0$, начальный шаг $\tau^{(0)}$ — из условия минимума значения функционала $J_I^{(1)}$ на смещениях $U_{p_1 p_2}^{(0)}$ без учета ограничений (эта задача решается точно, так как $J_I^{(1)}$ выражается в виде квадратичной функции $\tau^{(0)}$).

После решения задачи I находилась сеточная область $D'(h)$ — максимальная область, внутри которой $U_{p_1 p_2} = 0$, и затем область $D''(h) = D(h) / D'(h)$, через которую происходит фильтрация жидкости в трещину. Решение вариационной задачи II минимума функционала (2.9) строилось аналогично: функция $q(x_1, x_2)$ отыскивалась в виде разложения по той же системе координатных функций, и потому различие состояло лишь в вы-

r_1	$r_2=0$	1	2	3	4	5
0	0,335806	0,188135	0,083493	0,054094	0,040216	0,032047
1	—	0,128607	0,074035	0,051227	0,038991	0,031416
2	—	—	0,057602	0,044747	0,035895	0,029720
3	—	—	—	0,037879	0,032490	0,027430

числении коэффициентов $a_{p_1 p_2 q_1 q_2} = a_{|p_1 - p_2|, |q_1 - q_2|}$. Первые несколько значений $a_{r_1 r_2}$ (таблица) находились численным интегрированием, остальные — по асимптотической формуле

$$a_{r_1 r_2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{|r|} + \frac{1}{6} \frac{1}{|r|^3} + \frac{19}{240} \frac{1}{|r|^5} + \frac{17}{224} \frac{1}{|r|^7} + \frac{7}{24} \frac{r_1^2 r_2^2}{|r|^9} + \frac{3}{8} \frac{r_1^2 r_2^2}{|r|^{11}}, \quad |r| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \right] \quad (2.12)$$

Следует отметить, что сходимость вариационно-разностного метода в случае задачи II хуже, чем в случае задачи I. Это связано с различным типом ядер функционалов (2.8) и (2.9). Кроме того, функция $q(x_1, x_2)$ имеет корневую особенность на границе области D'' . Для решения задачи II коэффициенты $a_{r_1 r_2}$ требуется вычислять с большей точностью, в противном случае сгущение сетки, начиная с некоторого значения шага h , сопровождается снижением точности результатов, осцилляциями и «разбалтыванием» счета. Этот вопрос требует дальнейшего исследования.

После определения функции $q(x_1, x_2)$ находился расход жидкости через поверхность трещины

$$G_0 = 2 \frac{k}{\mu'} \iint_{D''} q(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Коэффициент фильтрации k/μ' далее полагался равным единице.

Расчеты проводились для круговых и эллиптических в плане трещин

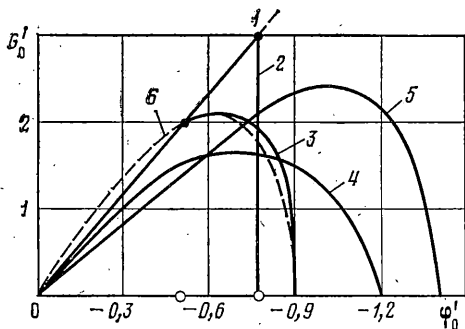
$$D: (x_1/A_1)^2 + (x_2/A_2)^2 \leq 1 \quad (2.13)$$

начальное раскрытие которых задавалось в виде $w_0(x_1, x_2) = W_0 [1 - (x_1/A_1)^2 - (x_2/A_2)^2]^{\beta/2}$, где A_1, A_2, W_0 и β — некоторые постоянные. Затем строились зависимости расхода жидкости G_0 от перепада давления φ_0 .

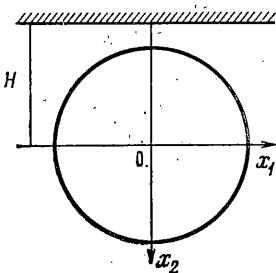
Первая серия расчетов была проведена для круговых в плане трещин ($A_1 = A_2 = 1$) с максимальным раскрытием в центре трещины $W_0 = 0,01$, так что отношение $\lambda = W_0/A_1 = 0,01$ при различных показателях β , характеризующих раскрытие трещины вблизи ее кромки. Результаты расчетов для $\beta = 1; 1,5; 3$ представлены на фиг. 3 (кривые 2—4 соответственно), где $G_0' = G_0 / (2\lambda k c A_1)$ и $\varphi_0' = \varphi_0 / (\lambda k)$. Из графиков видно, что зависимость расхода от перепада давления имеет немонотонный характер. При небольших значениях φ_0 расход совпадает с расходом через идеальную трещину (кривая 1) и отличается от него при налегании поверхностей. Моменту начала налегания соответствуют значения $\varphi_0 = \varphi_0^*(\beta)$, показанные точками на оси абсцисс. Установлено, что для трещин с начальным раскрытием (2.14) налегание происходит вблизи контура трещины, причем $\varphi_0^* = 0$ при $\beta > 2$ и

$-\varphi_0^*$ возрастает с уменьшением β от двух до единицы (как это и должно быть в силу теорем сравнения для объемлемых и объемлющих трещин [10]).

При $\beta=1$ значение $-\varphi_0^*$ максимально и налегание происходит сразу по всей поверхности трещины. При дальнейшем уменьшении показателя β налегание поверхностей трещин начинается в их центре так же, как это



Фиг. 3



Фиг. 4

имело место в примере п.1. Таким образом, для трещин с плавно смыкающимися поверхностями (например, при $\beta=3$) расход начинает отличаться от расхода через идеальную трещину даже при небольшом снижении давления на скважине (кривая 4). Если трещина имеет эллипсоидальную форму ($\beta=1$), то расход через нее совпадает с расходом через идеальную трещину вплоть до перепада давления $-\varphi_0^*$, при котором происходит полное закрытие трещины, и равен нулю при дальнейшем снижении давления на скважине (кривая 2).

Проведены также расчеты для горизонтальной эллиптической в плане трещины с полуосями $A_1=1$, $A_2=0,5$, $\lambda=0,01$ и вертикальным раскрытием (2.14) при $\beta=1,5$ (фиг. 3, кривая 5). Сравнение с кривой 3, на которой представлены расчеты для круговой в плане трещины с радиусом $A_1=1$ при этом же показателе β , являющейся объемлющей по отношению к данной эллиптической, показывает, что расход через эллиптическую трещину сначала меньше расхода через круговую, так как меньше площадь фильтрации, но в связи с тем, что закрытие объемлемой трещины происходит при больших значениях $-\varphi_0^*$, расход через эллиптическую в плане трещину совпадает с расходом через идеальную трещину до большего значения $-\varphi_0^*$ и максимальное его значение превышает максимальное значение расхода для круговой трещины.

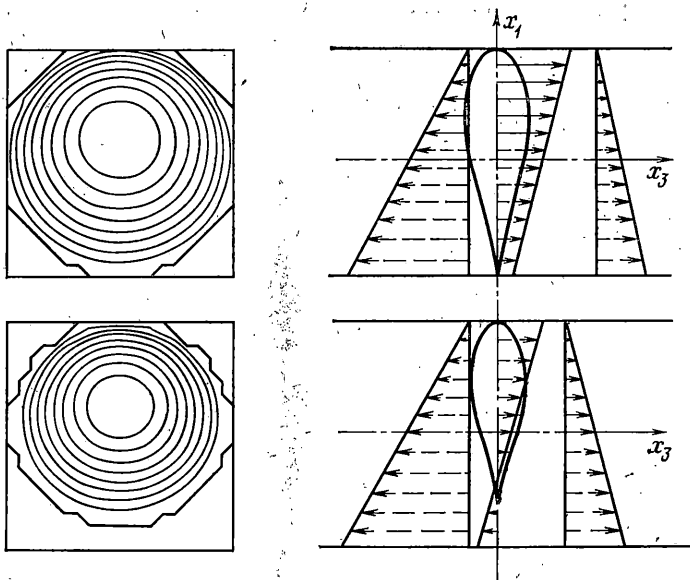
Описанным методом была решена также задача о притоке жидкости к вертикальной круговой трещине в горной породе с учетом линейно изменяющегося по вертикали горного давления σ и гидростатического распределения давления жидкости в трещине: $\sigma = k_a \rho_1 g (x_2 - H)$, $p = p_0 - \rho_2 g x_2$, где H — глубина центра трещины от поверхности земли (фиг. 4), ρ_2 и ρ_1 — плотности жидкости и горных пород, p_0 — давление жидкости в центре трещины, k_a — коэффициент активности горных пород.

При расчетах значение $c\gamma/\lambda$ полагалось равным 0,25, где $\gamma = (\rho_2 - k_a \rho_1) g$ — суммарный градиент сил по оси x_2 . Начальное раскрытие трещины (без учета неоднородности поля внешних сил) задавалось формулой (2.14) с $W_0=0,01$, $\beta=1,5$, $A_1=A_2=1$. С учетом горного давления раскрытие трещины уже не является симметричным — трещина сильнее сжата в своей нижней части и слабее — в верхней.

Зависимость расхода от перепада давления $-\varphi_0 = k_a \rho_1 g H - p_0$ относительно центра трещины приведена на фиг. 3 (кривая 6). С уменьшением давления в центре трещины в ее нижней части образуется зона налегания. Линии уровня смещений поверхностей трещины $w = w_0 + u$ при $\varphi_0' = 0,2$ и $\varphi_0' = 0,6$ показаны на фиг. 5.

3. Оба раздельно рассмотренных механизма изменения гидравлической проводимости трещины при изменении давления в скважине могут проявляться одновременно. Очевидно, в этом случае зависимость расхода от давления (так называемая индикаторная кривая или характеристика скважины) также будет немонотонной.

Наличие падающего участка у характеристики скважины является следствием нелокальной зависимости проводимости зоны, содержащей трещину, от распределения в ней давления. Чтобы убедиться в том, что падение расхода при уменьшении давления в скважине нельзя объяснить локальной зависимостью проницаемости среды от давления, рассмотрим стационарную задачу о плоскорадиальном притоке жидкости к скважине радиуса r_0 в круговом пласте радиуса R и мощности h . Пусть



Фиг. 5

на стенке скважины и контуре пласта давление равно, соответственно, p_0 и p^0 , а проницаемость среды является возрастающей функцией порового давления $k=k(p) > 0$ [1]. Тогда давление в пласте удовлетворяет уравнению $(1/r)d[k(p)rdp/dr]=0$ и дебит скважины дается формулой

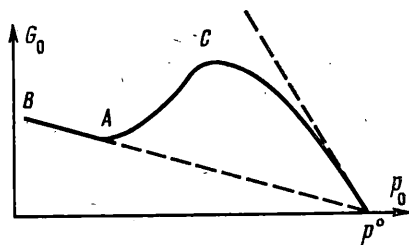
$$G_0 = \frac{2\pi h}{\mu'} \frac{P(p^0) - P(p_0)}{\ln(R/r_0)},$$

$$P(p) = \int_0^p k(p) dp$$

где $P(p)$ — аналог функции Лейбениона. Так как функция возрастающая, то при уменьшении давления на стенке скважины расход G_0 будет расти, т. е. характеристика пласта является возрастающей.

Отметим, однако, что если при некотором значении давления $p=p_0^*$ проницаемость $k(p_0^*)=0$, то при $p_0 < p_0^*$ расход G_0 обращается в нуль. В этом случае зависимость расхода от давления на скважине является немонотонной⁴, сходной с кривой 2 на фиг. 3, но непрерывный падающий участок характеристики пласта отсутствует.

Уединенную трещину в пористой среде, связанную с отбирающей скважиной, можно считать грубой моделью трещиновато-пористого пласта. Характеристика такого пласта имеет вид, показанный на фиг. 6. Линейный участок AB соответствует притоку к скважине при сомкнутых трещинах. Наличие падающего участка CA у характеристики пласта делает вероятным существование неустойчивых режимов работы скважин⁵.



Фиг. 6

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н., Басинев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
2. Керчман В. И. Задачи консолидации и связанной термоупругости для деформируемого полупространства. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1, с. 45–54.
3. Завозский А. Ф. Развитие дискообразной трещины гидроразрыва в мощном насыщенном жидкостью пласте. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5, с. 169–178.

⁴ Обстоятельство, указанное В. Н. Николаевским.

⁵ Гипотеза о том, что наличие падающей характеристики пласта связано с нелокальным эффектом и потому может иметь место при стационарном режиме, принадлежит В. М. Ентову.

4. *Снеддон И. Н.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
5. *Желтов Ю. П., Христианович С. А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта.— Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 5, с. 3—41.
6. *Баренблатт Г. И.* О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтяного пласта.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 4, с. 475—486.
7. *Желтов Ю. П.* Деформации горных пород. М.: Недра, 1966. 198 с.
8. *Goldstein R. V., Zazovskii A. F.* A numerical method for solving three-dimensional elasticity problems for bodies with flat cracks and flattened cavities with due respect of contact of their surfaces.— Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1984, v. 1, No. 3, p. 203—216.
9. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 487 с.
10. *Гольдштейн Р. В., Спектор А. А.* Вариационные оценки решений некоторых смешанных пространственных задач теории упругости с неизвестной границей.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2, с. 82—94.

Москва

Поступила в редакцию
6.11.1984