МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1985

УДК 539.3

К РАСЧЕТУ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

МАДАТОВ К. С.

Рассматривается приведение систем дифференциальных уравнений пологих оболочек переменной толщины в перемещениях к одному разрешающему дифференциальному уравнению. Дается схема решений полученного уравнения. При этом дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами приводится к бесконечному числу дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Показывается возможность замены этих уравнений одним рекуррентным уравнением.

1. Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях с учетом переменности жесткостей имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(B\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(B\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial v}{\partial x}\right)-(k_1+\nu k_2)\frac{\partial}{\partial x}(Bw)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(B\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(B\frac{\partial u}{\partial y}\right)-(k_2+\nu k_1)\frac{\partial}{\partial y}(Bw)=0 \tag{1.1}$$
$$\Delta(D\Delta w)-(1-\nu)L(D,w)-B(k_1^2+k_2^2+2\nu k_1k_2)w+B(k_1+\nu k_2)\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+B(k_2+\nu k_1)\frac{\partial v}{\partial y}=P$$
$$\Delta=\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial x^2$$
$$L(D,w)=\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$B(x, y)$ и $D(x, y)$ — переменные жесткости, k_1 и k_2 — главные кривизны оболочки.

Выразим компоненты перемещений u, v и w через одну произвольную функцию $\varphi(x, y)$ в следующей дифференциальной форме:

$$u=(k_1+\nu k_2)\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{2}{B}\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+2(1+\nu)k_1\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-$$
$$-(k_1+\nu k_2)\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{2}{B}\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

$$v=(k_2+\nu k_1)\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}+\frac{2}{B}\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+2(1+\nu)k_2\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-$$
$$-(k_2+\nu k_1)\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}+\frac{2}{B}\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \tag{1.2}$$
$$w=\frac{1}{B}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)+2(1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(B\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\right]$$

В формулах (1.2) функция изменения толщины $B(x, y)$ предполагается плавно и медленно изменяющейся. Подставляя их в первые два уравнения (1.1) и пренебрегая производными высшего порядка функции $B(x, y)$ по сравнению с производной функции $\varphi(x, y)$, убеждаемся, что первые два уравнения (1.1) удовлетворяются тождественно. Третье уравнение (1.1) с учетом (1.2) принимает вид

$$\Delta[D\Delta(H^{-1}\Delta(H\Delta\varphi))]+L(D, H, \varphi)+\Delta_k(H\Delta_k\varphi)=P \tag{1.3}$$
$$H=Eh(x, y),\qquad \Delta_k=k_2\partial^2/\partial x^2+k_1\partial^2/\partial y^2$$
$$L(D,H,\varphi)=-(1+\nu)\Delta\left[D\Delta\left(\frac{1}{H}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\right)\right]-$$
$$-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\frac{1}{H}\Delta(H\Delta\varphi)\right]+$$
$$+(1-\nu^2)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{H}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\right]$$

Дифференциальное уравнение (1.3) является разрешающим уравнением оболочек переменной толщины относительно функции перемещений $\varphi(x, y)$. Решая это уравнение, из (1.2) определяются компоненты вектора перемещений u, v и w. Внутренние усилия с учетом соотношения упругости и формул (1.2) будут следующими:

$$N_1=-\frac{\partial^2}{\partial y^2}(H\Delta_k\varphi),\qquad N_2=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(H\Delta_k\varphi),\qquad S=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(H\Delta_k\varphi) \tag{1.4}$$
$$M_1=-D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\frac{1}{H}\Delta(H\Delta\varphi)-(1-\nu)L(H,\varphi)\right]$$
$$M_2=-D\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\frac{1}{H}\Delta(H\Delta\varphi)-(1-\nu)L(H,\varphi)\right]$$
$$M_{12}=(1-\nu)D\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{1}{H}\Delta(H\Delta\varphi)-(1-\nu)L(H,\varphi)\right]$$

Если в уравнении (1.3) принять $D=\mathrm{const}$, $H=\mathrm{const}$, то получим дифференциальное уравнение для пологой оболочки постоянной толщины [1], а при $H=\mathrm{const}$, $k_1=k_2=0$ с заменой $\Delta^2\varphi$ на w — для пластинки переменной толщины [2].

2. Для приближенного решения уравнения (1.3) применим метод малого параметра. Изменение толщины оболочки представим

$$h(x, y)=h_0(1+\varepsilon\sigma(x, y)) \tag{2.1}$$

где $\varepsilon=(h_{\max}-h_{\min})/(h_{\max}+h_{\min})<1$ — малый параметр, $h_0={}^1/_2(h_{\max}+h_{\min})$ — средняя толщина, $\sigma(x, y)$ — вспомогательная функция, характеризующая изменение толщины оболочки $-1\leqslant\sigma(x, y)\leqslant1$.

Принимая во внимание (2.1), переменные жесткости будут

$$D(x, y)=D_0(1+\varepsilon\sigma)^3, \quad B(x, y)=B_0(1+\varepsilon\sigma) \tag{2.2}$$
$$D_0={}^1/_{12}Eh_0^3/(1-\nu^2), \quad B_0=Eh_0/(1-\nu^2)$$

Подставляя (2.2) в исходную систему (1.3), получим

$$\Delta^4\varphi+\left(\frac{H_0}{D_0}\right)\Delta_k^2\varphi+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[\varepsilon^{k+1}L_{1k}(\sigma,\varphi)+\varepsilon^{k+2}L_{2k}(\sigma,\varphi)+ \tag{2.3}$$
$$+\varepsilon^{k+3}L_{3k}(\sigma,\varphi)+\varepsilon^{k+4}L_{4k}(\sigma,\varphi)]+\varepsilon(H_0/D_0)\Delta_k(\sigma\Delta_k\varphi)=P/D_0$$

$$L_{1k}=\Delta^2(\sigma^{k+1}\Delta^2\varphi)+\Delta^2[\sigma^k\Delta(\sigma\Delta\varphi)]+3\Delta[\sigma\Delta(\sigma^k\Delta^2\varphi)]-$$
$$-3(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\sigma^k\Delta^2\varphi)-$$
$$-(1+\nu)\Delta^2\left[\sigma^k\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$L_{2k}=-3\Delta[\sigma^2\Delta(\sigma^k\Delta^2\varphi)+\Delta[\sigma\Delta(\sigma^k\Delta(\sigma\Delta\varphi))]-3(1+\nu)\Delta\left[\sigma\Delta\left(\sigma^k\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\right)\right]-3(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\sigma^k\Delta(\sigma\Delta\varphi))-3(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\sigma^2}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\sigma^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\sigma^k\Delta^2\varphi)+(1-\nu^2)\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x}\right)\times$$
$$\times\left[\sigma^k\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\right] \tag{2.4}$$

$$L_{3k}=\Delta[\sigma^3\Delta(\sigma^k\Delta^2\varphi)]+3\Delta[\sigma^2\Delta(\sigma^k\Delta(\sigma\Delta\varphi))]-3(1+\nu)\Delta\left[\sigma^2\Delta\left(\sigma^k\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\right)\right]-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\sigma^2}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\sigma^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\sigma^k\Delta(\sigma\Delta\varphi)-(1+\nu)\sigma^k\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\right]-$$
$$-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma^3}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\sigma^3}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\sigma^3}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\sigma^k\Delta^2\varphi)$$

$$L_{4k}=\Delta[\sigma^3\Delta(\sigma^k\Delta(\sigma\Delta\varphi))]-(1+\nu)\Delta\left[\sigma^3\Delta\left(\sigma^k\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\right)\right]-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma^3}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\sigma^3}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\sigma^3}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\sigma^k\Delta(\sigma\Delta\varphi)-\right.$$

$$-(1+\nu)\sigma^k\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\Bigg]$$

Решение уравнения (2.3) ищем в виде разложения по малому параметру ε:

$$\varphi_n(x,y,\varepsilon)=\sum\varepsilon^k\varphi_k(x,y)\quad(k=0,1,\ldots,n)\tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в уравнение (2.3) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получим

$$\begin{gathered}\Delta^4\varphi_0+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_0=P/D_0\\ \Delta^4\varphi_1+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_1=-L_{10}(\sigma,\varphi_0)-(H/D_0)\Delta_k(\sigma\Delta_k\varphi_0)\\ \Delta^4\varphi_2+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_2=-L_{10}(\sigma,\varphi_1)+L_{11}(\sigma,\varphi_0)-\\ -L_{20}(\sigma,\varphi_0)-(H_0/D_0)\Delta_k(\sigma\Delta_k\varphi_1)\\ \Delta^4\varphi_3+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_3=-L_{10}(\sigma,\varphi_2)+L_{11}(\sigma,\varphi_1)-L_{12}(\sigma,\varphi_0)-\\ -L_{20}(\sigma,\varphi_1)+L_{21}(\sigma,\varphi_0)-L_{30}(\sigma,\varphi_0)-(H_0/D_0)\Delta_k(\sigma\Delta_k\varphi_2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta^4\varphi_n+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_n=-\sum_{k=0}^{n}(-1)^kL_{1k}(\sigma,\varphi_{n-1-k})-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kL_{2k}(\sigma,\varphi_{n-2-k})-\\ -\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^kL_{3k}(\sigma,\varphi_{n-3-k})-\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^kL_{4k}(\sigma,\varphi_{n-4-k})-\frac{H_0}{D_0}\Delta_k(\sigma\Delta_k\varphi_{n-1})\\ (n=1,2,\ldots,)\end{gathered}\tag{2.6}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (1.3) с переменными коэффициентами приводится к бесконечному числу дифференциальных уравнений (2.6) с постоянными коэффициентами. При известных законах изменения толщины оболочки, последовательно решая систему уравнений (2.6), можно построить приближенное решение краевой задачи с требуемой точностью для различных граничных условий.

3. Рассмотрим пример. Предварительно уравнение (2.6) приведем к виду

$$\begin{gathered}\Delta^4\varphi_0+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_0=P/D_0\\ \Delta^4\varphi_1+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_1=-\sigma[\Delta^4\varphi_0+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_0]+F_1(\sigma,\varphi_0)\\ \Delta^4\varphi_2+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_2=-\sigma[\Delta^4\varphi_1+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_1]+F_2(\sigma,\varphi_0,\varphi_1)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta^4\varphi_k+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_k=-\sigma[\Delta^4\varphi_{k-1}+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_{k-1}]+F_k(\sigma,\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1})\end{gathered}\tag{3.1}$$

где $F_k(\sigma,\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1})$ — линейные операторы, получаемые из правой части (2.6) (ввиду их громоздкости не приводятся).

Решение первого уравнения является основным решением системы (3.1); решение остальных уравнений дают поправку к решению первого уравнения с учетом переменности толщины оболочки. Отсюда можно заключить, что первые слагаемые правых частей остальных уравнений (3.1) являются основными слагаемыми по отношению к $F_k(\sigma,\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1})$.

Умножая первое, второе, третье и т. д. уравнения, соответственно, на $\varepsilon^\circ,\varepsilon,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^k$ и отбрасывая члены, содержащие $F_k(\sigma,\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1})$, и складывая их, с учетом (2.5) получим одно уравнение по малому параметру для n-го приближения вида

$$\Delta^4\varphi_n+(H_0/D_0)\Delta_k{}^2\varphi_1=\sum(-\varepsilon\sigma)^kP/D_0\quad(k=0,1,\ldots,n)\tag{3.2}$$

При определенном изменении толщины оболочки, оставляя нужные слагаемые в правой части уравнения (3.2) и решая его, получим приближенное решение одного уравнения, заменяющего решение нескольких уравнений системы (3.1). Допустим, что оболочка имеет шарнирное опирание по всем краям. Решение уравнения (3.2) и его правой части представим в виде ряда

$$\varphi_n = \sum_{mk}^{\infty} A_{n,mk} \cos\frac{m\pi x}{2a} \cos\frac{k\pi y}{2b} \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-\varepsilon\sigma)^k \frac{P}{D_0} = \sum_{mk}^{\infty} B_{n,mk} \cos\frac{m\pi x}{2a} \cos\frac{k\pi y}{2b} \quad (-a\leqslant x\leqslant a,\ -b\leqslant y\leqslant b)$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получим

$$A_{n,mk} = \frac{B_{n,mk}}{\Delta_{mk}^4 + (H_0/D_0)\Delta^2_{k,mk}}, \qquad \Delta_{mk}^4 = \left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{2b}\right)^2\right]^4 \tag{3.4}$$

$$\Delta^2_{k,mk} = \left[k_2\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + k_1\left(\frac{k\pi}{2b}\right)^2\right]^2$$

$$B_{n,mk} = \frac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\sum_{k=0}^{n}(-\varepsilon\sigma)^k \frac{P}{D_0}\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{k\pi y}{2b}$$

В третьем приближении $B_{n,\,mk}$ будет иметь вид

$$B_{3,mk} = \frac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\frac{P}{D_0}(1-\varepsilon\sigma+\varepsilon^2\sigma^2-\varepsilon^3\sigma^3)\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{k\pi y}{2b} \tag{3.5}$$

Так как $\varepsilon<1$ и $\sigma\leqslant 1$, то сходимость правой части коэффициента $B_{3,\,mk}$ по ε очевидна. Принимая $h_{\max}=2h_{\min}$ и изменение толщины оболочки в виде $h(x)=h_{\min}(1+x^2/a^2)$, из (2.1) определяем $\sigma(x)=2x^2/a^2-1$, $\varepsilon={}^1/_3$.

Подставляя $\sigma(x)$ в (3.5) и интегрируя, с учетом (3.4) из (3.3) для $\varphi_{3,\,mk}$ получим

$$\varphi_{3,mk} = \frac{16P}{\pi^2 D_0 mk}\,\frac{1-\varepsilon c_m}{\Delta_{mk}^4+(H_0/D_0)\Delta^2_{k,mk}}\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{k\pi y}{2b} \tag{3.6}$$

$$c_m = 1-4(2/(m\pi))^2-\varepsilon[1-40(2/(m\pi))^2+$$
$$+96(2/(m\pi))^4]+\varepsilon^2[1-108(2/(m\pi))^2+$$
$$+2592(2/(m\pi))^4-5760(2/(m\pi))^6]$$

Зная функции $\varphi_{3,\,mk}$, можно определить перемещения и внутренние усилия. Например, из (1.2) для w_3 получим

$$w_{3,mk} = \frac{16P}{\pi^2 D_0 mk}\left[\frac{(\Delta_{mk}^2-d_{mk})\psi_{mk}(1-\varepsilon c_m)}{\Delta_{mk}^4+(H_0/D_0)\Delta^2_{k,mk}} + \frac{e_{mk}\cos{}^1/_2 k\pi y/b\,(1-\varepsilon c_m)}{\Delta_{mk}^4+(H_0/D_0)\Delta^2_{k,mk}}\right] \tag{3.7}$$

$$d_{mk} = \frac{2}{a^2(1+x^2/a^2)}\left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 - \nu\left(\frac{k\pi}{2b}\right)^2\right]$$

$$e_{mk} = \frac{m\pi}{a^2}\left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 - \left(\frac{k\pi}{2b}\right)^2\right]\frac{2x}{a(1+x^2/a^2)}\sin\frac{k\pi y}{2b}$$

$$\psi_{mk} = \cos{}^1/_2(m\pi x/a)\,\cos{}^1/_2(k\pi y/b)$$

Из формулы (3.7) при $c_m = d_{mk} = e_{mk} = 0$ получаем выражение для прогиба оболочки постоянной толщины с жесткостью D_0 [1]. Для подтверждения правильности такого подхода — замены системы уравнений (3.1) одним уравнением (3.2) — решим второй пример для круглой пластинки переменной толщины, решение которого в замкнутом виде было получено в [2].

Принимая изменение толщины пластинки в виде $h(r) = \exp(-\beta r^2/a^2)$ и решая уравнение

$$D(r)\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr}+\frac{\varphi}{r}\right)+\frac{dD(r)}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr}+\nu\frac{\varphi}{r}\right)=\frac{1}{r}\int_0^r qr\,dr \tag{3.8}$$

в [2] получено численное значение прогиба в центре круглой пластинки при $\beta=3$:

$$w_{\max}=0{,}0639\times 6(1-\nu^2)qa^4/h_1^3 \tag{3.9}$$

Уравнение (3.8) с учетом (2.2) и (2.5) будет иметь вид

$$\begin{gathered}L(\varphi_0)={}^1/_2 qa^3r/D_0,\quad L(\varphi_1)=-3\sigma L(\varphi_0)-3d\sigma/drL_1(\varphi_0)\\ L(\varphi_2)=-3\sigma L(\varphi_1)-3\sigma^2L(\varphi_0)-6d\sigma/drL_1(\varphi_1)\\ L(\varphi_3)=-3\sigma L(\varphi_2)-3\sigma^2L(\varphi_1)-\sigma^3L(\varphi_0)-3d\sigma/drL_1(\varphi_2)\end{gathered} \tag{3.10}$$

$$L(\varphi_k)=\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi_k}{dr}-\frac{\varphi_k}{r}\right),\qquad L_1(\varphi_k)=\frac{d\varphi_k}{dr}+\nu\frac{\varphi_k}{r},\qquad \frac{dw_k}{dr}=\varphi_k$$

Отбрасывая в уравнениях (3.10) малые члены, получим

$$\begin{gathered}L(\varphi_0)={}^1/_2 qa^4\eta/D_0,\quad L(\varphi_1)=-{}^1/_2 3\sigma qa^4\eta/D_0,\\ L(\varphi_2)={}^1/_2 9\sigma^2qa^4\eta/D_0\quad L(\varphi_3)=-{}^1/_2 27\sigma^3qa^4\eta/D_0\quad (r=a\eta)\ .\end{gathered} \tag{3.11}$$

Умножая уравнения (3.11), соответственно, на ε°, ε, $\varepsilon^2\ldots$ и складывая их, получим для n-го приближения по ε одно уравнение

$$L(\varphi_n)=\sum {}^1/_2(-3\varepsilon\sigma)^k qa^4\eta/D_0\quad (k=0,1,\ldots,n) \tag{3.12}$$

При $n=3$ из (3.12) имеем

$$L(\varphi_3)={}^1/_2 qa^4\eta(1-3\varepsilon\sigma+9\varepsilon^2\sigma^2-27\varepsilon^3\sigma^3)/D_0 \tag{3.13}$$

Из равенства выражений (2.1) и $h(r)$ определим $\varepsilon\sigma$:

$$\begin{gathered}\varepsilon\sigma=2\exp(-k\eta^2)/(1+m)\\ h_0=h_1(1+m)/2,\quad m=\exp(-k),\quad k=\beta/6\end{gathered} \tag{3.14}$$

После подстановки (3.14) в (3.13) получим

$$\frac{d}{d\eta}\left[\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}(\eta\varphi_3)\right]=\frac{48(1-\nu^2)qa^4}{h_1(1+m)^3}\eta\left[40-\frac{240\exp(-k\eta^2)}{1+m}+\right.$$
$$\left.+\frac{360\exp(-2k\eta^2)}{(1+m)^2}+\frac{216\exp(-3k\eta^2)}{(1+m)^3}\right] \tag{3.15}$$

Разлагая $\exp(-t\eta^2)$ в ряд, сохраняя в нем четыре члена и решая (3.15), получим выражение для прогиба w_3 круглой пластинки переменной толщины с защемленными краями

$$w_3=\frac{15(1-\nu^2)qa^4}{h_1^3(1+m)}(1-\eta^2)\left[1-\frac{5{,}1}{1+m}\left(1-\frac{k}{3}+\frac{k^2}{12}-\frac{k^3}{60}\right)+\right.$$
$$+\frac{9}{(1+m)^2}\left(1-\frac{k}{1{,}5}+\frac{k^2}{3}-\frac{k^3}{7{,}5}\right)-\frac{5{,}4}{(1+m)^3}\left(1-k+\frac{k^2}{1{,}33}-\frac{k^3}{2{,}22}\right)\Bigg]+$$

$$+\frac{30(1-\nu^2)qa^4}{h_1^3(1+m)^3}\left[\frac{\eta^4-1}{4}-\frac{5,1}{1+m}\left(\frac{\eta^4-1}{4}-\frac{k(\eta^6-1)}{18}+\frac{k^2(\eta^8-1)}{96}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{k^3(\eta^{10}-1)}{600}\right)+\frac{9}{(1+m)^2}\left(\frac{\eta^4-1}{4}-\frac{k(\eta^6-1)}{9}+\frac{k^2(\eta^8-1)}{24}-\frac{k^3(\eta^{10}-1)}{75}\right)-$$

$$\left.-\frac{5,4}{(1+m)^3}\left(\frac{\eta^4-1}{4}-\frac{k(\eta^6-1)}{6}+\frac{k^2(\eta^8-1)}{10,66}-\frac{k^3(\eta^{10}-1)}{22,22}\right)\right] \tag{3.16}$$

Приравнивая $\eta=0$, из (3.16) определяем $w_{3\max}$ при $\beta=3$:

$$w_{3\max}=0{,}0651\times 6(1-\nu^2)qa^4/h_1^3 \tag{3.17}$$

Сопоставляя выражения (3.9) и (3.17), видим, что погрешность результатов составляет $\sim$1,8%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. А.* Основы и методы расчета пологих оболочек. М.: Стройиздат, 1966, с. 80, 81, 165.
2. *Тимошенко С. П.* Пластинки и оболочки. М.: Стройиздат, 1966, с. 200, 334–337.

Баку

Поступила в редакцию 10.VII.1984