

УДК 539.3

**МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЯ**

ЛИБЕРЗОН А. С.

Численные методы теории оптимального управления, как правило, не позволяют эффективно учесть индивидуальные особенности проектируемых объектов, связанные с наличием локальных ограничений на функции состояния и их производные. Прямое использование традиционных методов (штрафных функций, преобразования Валентайна, проекции градиента) может привести к не точным результатам в сочетании с большими вычислительными затратами [1]. Указанные обстоятельства связаны с ухудшением дифференциальных свойств функционалов качества и необходимостью проверки выполнения фазовых ограничений на каждом шаге итерационного процесса варьирования управлений.

Следствием отмеченного, по-видимому, и является популярность используемых в механике твердого деформируемого тела постановок оптимизационных задач, исключаящих из рассмотрения локальные ограничения по прочности и жесткости. К последним, например, относятся задачи оптимизации интегральных функционалов податливости (минимизации работы внешних сил) [2-5] либо жесткости (максимизации потенциальной энергии деформации) [6, 7], либо задачи, в которых локальные ограничения на функции состояния заменяются приближенно интегральными [2, 8]. Найденные таким образом оптимальные проекты не могут удовлетворять в общем случае искомым локальным ограничениям.

В публикуемой работе предлагается метод численного решения класса задач оптимального управления, к которому сводятся многие практические задачи проектирования. Метод основан на вычислительной схеме последовательных вариаций в пространстве состояния, предусматривающей на каждом шаге автоматическое выполнение локальных условий прочности.

1. Рассмотрим постановку вариационной задачи управления на примерах обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба упругих пластин. Обозначим через $\sigma_{(1)}$ и u — тензор напряжения и вектор перемещения обобщенного плоского напряженного состояния, соответствующего нагружению массовыми силами f ; $\sigma_{(2)}$, w — максимальные по толщине напряжения изгиба и прогиб пластины, изгибаемой нормальным давлением q . Распределение функций состояния удовлетворяет уравнениям статики

$$\nabla \cdot (H\sigma_{(1)}) + f = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \cdot H^2\sigma_{(2)}) + 6q = 0 \quad (1.1)$$

и линейным соотношениям упругости $\sigma_{(i)} = E \cdot \varepsilon_{(i)}$ ($i=1, 2$), устанавливающим связь между $\sigma_{(i)}$ и тензором деформации

$$2\varepsilon_{(1)} = \nabla u + (\nabla u)^*, \quad 2\varepsilon_{(2)} = H \nabla \nabla w \quad (1.2)$$

Тензор упругости E предполагается зависящим от угла ориентации осей анизотропии, $E = E(\varphi)$; H — толщина пластины, звездочкой обозначена операция транспонирования, точкой — операция свертки.

Несмотря на различное механическое содержание уравнений обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба соответствующие оптимальные задачи обнаруживают математическую идентичность, заключающуюся в присутствии функций управления $H(x, y)$, $\varphi(x, y)$, в главной части дифференциальных операторов. Вводя дивергентный оператор $D(H)$ и оператор состояния $G(\varphi, H)$, представим (1.1) и (1.2) единой

формой

$$D(H) \cdot \sigma + f(H, u) = 0, \quad \sigma = \sigma(\varphi, H)u \quad (1.3)$$

К уравнениям (1.3) добавляются известные граничные условия на контуре области.

Для элемента материала, находящегося в произвольном сложном напряженном состоянии, тензор напряжений должен удовлетворять условию прочности. Используя общее представление применяемых на практике феноменологических критериев [9] через тензоры прочности второго и четвертого рангов $-\Pi_0$, Π , представим ограничения по прочности в виде

$$\Phi^c(\sigma) = \Pi_0 \cdot \sigma + \sigma \cdot \Pi \cdot \sigma \leq 1 \quad (1.4)$$

Условия, накладываемые на распределение толщин, определяются конструктивными и технологическими ограничениями (H^- , H^+ — известные функции координат):

$$H^- \leq H \leq H^+ \quad (1.5)$$

Оптимальная задача состоит в определении управлений $H(x, y)$, $\varphi(x, y)$ и соответствующих им решений задачи (1.3) $-\sigma(x, y)$, $u(x, y)$, удовлетворяющих ограничениям (1.4), (1.5), доставляющих минимум функционалу объема

$$V = \int_S H(x, y) ds \quad (1.6)$$

2. Рассмотрим предварительно вопрос о приведении к каноническому виду квадратичной формы напряжений $\Phi^c(\sigma)$. Используя свойство самосопряженности [5, 10], представим тензор прочности четвертого ранга в виде диадного разложения по симметричным собственным тензорам второго ранга $a_{(i)}$:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{(i)} a_{(i)} \quad (i \in [1, n]) \quad (2.1)$$

Число n — слагаемых разложения (2.1) — совпадает с числом компонент тензора напряжений рассматриваемой среды. Например, в случае двумерной классической среды $n=3$, трехмерной — $n=6$, объемного континуума Коссера — $n=12$.

Собственные значения λ_i самосопряженного тензора всегда вещественны и вместе с собственными тензорами $a_{(i)}$ определяются из уравнений $\Pi \cdot a_{(i)} = \lambda_i a_{(i)}$, $a_{(i)} \cdot a_{(k)} = \delta_{ik}$ ($i, k \in [1, n]$)

Совокупность линейно независимых тензоров $a_{(i)}$ образует базис в пространстве симметричных тензоров второго ранга. В частности, тензор напряжений может быть представлен разложением по базисным тензорам

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \xi_k a_{(k)}, \quad \xi_k = \sigma \cdot a_{(k)} \quad (k \in [1, n]) \quad (2.2)$$

При помощи (2.1), (2.2) условие прочности (1.4) преобразуется к виду ($\pi_k = \Pi_0 \cdot a_{(k)}$):

$$\Phi^c(\xi) = \sum_{k=1}^n (\pi_k \xi_k + \lambda_k \xi_k^2) \leq 1, \quad \xi = \{\xi_k\} \quad (k \in [1, n]) \quad (2.3)$$

Примем для определенности, что число положительных собственных значений λ_k равно p , отрицательных — q , нулевых — r , $p+q+r=n$. Можно принять, что $\lambda_k=0$, если $k \in [1, p]$, $\lambda_k < 0$, если $k \in [p+1, p+q]$, $\lambda_k=0$ при $k \in [p+q+1, n]$. Очевидно, что p, q, r являются инвариантными харак-

теристиками тензора Π и не зависят от системы координат. Это позволяет привести (2.3) к канонической форме

$$\begin{aligned} \Phi^c(\xi) = \sum_{h=1}^p |\lambda_h| \left(\xi_h + \frac{\pi_h}{2\lambda_h} \right)^2 - \sum_{h=p+1}^{p+q} |\lambda_h| \left(\xi_h + \frac{\pi_h}{2\lambda_h} \right)^2 + \\ + \sum_{h=p+q+1}^n \pi_h \xi_h \leq C^2 \\ C^2 = 1 + \sum_{h=1}^{p+q} \frac{\pi_h^2}{2\lambda_h} \end{aligned} \quad (2.4)$$

В случае, когда $p=n$ ($q=r=0$), все собственные значения положительны, $\lambda_h > 0$, и следовательно, $\Phi^c(\xi)$ — положительно определенная квадратичная форма. Уравнение соответствующей предельной поверхности гомеоморфно сфере радиуса C . Если $0 < p < n-r$ — квадратичная форма $\Phi^c(\xi)$ неопределенного знака, в случае $p=0$ квадратичная форма отрицательно определена.

Анализ различных критериев прочности показывает, что соответствующие предельные поверхности могут принадлежать различным каноническим типам. Так, например, критерий Мизеса — Хилла определяет поверхность прочности эллипсоидального типа, критерий И. Н. Миролюбова — в виде однополостного гиперболоида вращения, критерий Ю. И. Ягна — эллиптический параболоид либо цилиндр и так далее [9].

На основании (2.4) для функций состояния $\xi = \{\xi_k\}$, $k \in [1, n]$ подбирается параметрическое представление $\xi = \xi(\Phi)$, $\Phi = \{\Phi_k\}$, $k \in [0, n-1]$ тождественно удовлетворяющее условию прочности независимо от типа соответствующей предельной поверхности

$$\begin{aligned} \xi_k = \left[\frac{1}{|\lambda_k|} \left(C^2 - \sum_{i=p+q+1}^n \pi_i \Phi_i \right) \right]^{1/2} \sin \Phi_0, \quad \prod_{i=s(h)}^{h-1} \sin \Phi_i (\eta_{kp} \operatorname{ch} \Phi_p + \eta_{pk} \operatorname{sh} \Phi_p) \\ [1 + (\cos \Phi_k - 1)(1 - \delta_{kp})(1 - \delta_{k,p+q})] - \frac{\pi_k}{2\lambda_k} \quad (k \in [1, p+q]) \\ \xi_k = \Phi_k \quad (k \in [p+q+1, n]) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь η_{kp} — единичная функция целочисленного аргумента, $\eta_{kp} = 1$ при $k \geq p$, $\eta_{kp} = 0$ при $k < p$; δ_{kp} — символ Кронекера, $\delta_{kp} = 1$ при $k=p$, $\delta_{kp} = 0$ при $k \neq p$; $s(k) = 1 + (p-1)\eta_{kp}$. Кроме того, принято правило $\sum_i(\dots) = 0$ и $\Pi_i(\dots) = 1$ (i меняется от k до m) при $k > m$.

Соотношения (2.5) устанавливают соответствие между областью в пространстве функций напряжений, ограниченной предельной поверхностью прочности, и неограниченным пространством функций $\Phi_k(x, y) \in (-\infty, \infty)$, $k \in [1, n-1]$. Различным по типу формам области соответствуют различные частные параметрические представления, следующие из (2.6). К примеру, для эллипсоидальной формы предельной поверхности $q=r=0$, $\Phi_p=0$ и, следовательно, из параметрического представления исчезают гиперболические функции, характеризующие гиперболоидную форму границы. Взаимно однозначное соответствие между точками пространств допустимых напряжений и функций состояния Φ можно установить, если ограничиться рассмотрением замкнутой области (параллелепипеда) $|\Phi_0| \leq \pi/2$, $0 \leq \Phi_k \leq 2\pi$ при $p=n$, $k \in [1, n-1]$ либо открытой области (слоя) $|\Phi_0| \leq \pi/2$, $0 \leq \Phi_k \leq 2\pi$ для $k \in [1, p+q]$, $k \neq p$ и $\Phi_k \in (-\infty, \infty)$

при $k=p$, $k \in [p+q+1, n]$. При этом предельной поверхности прочности соответствует пара плоскостей $\Phi_0 = \pm\pi/2$.

Исключая из (2.5) параметры Φ_i , $i \in [1, n-1]$, получаем выражение

$$\sin \Phi_0 = \sqrt{\Phi^c(\xi)} / C \quad (2.6)$$

позволяющее интерпретировать $(\sin \Phi_0)^{-1}$ как запас прочности в данной точке при сложном напряженном состоянии.

Вернемся снова к исходной постановке (1.3)–(1.6). Замена функций распределения толщин управлением $h(x, y)$:

$$H(x, y) = 1/2(H^+ - H^-) + 1/2(H^+ + H^-) \sin h(x, y) \quad (2.7)$$

позволяет исключить (1.5) из формулировки задачи проектирования.

Следует отметить, что преобразование (2.5) в пространстве состояния и (2.7) в пространстве управлений, обладая формальной схожестью, по-разному определяют методику конструирования оптимизационного алгоритма. Если замена управлений типа (2.7) практически не ограничивает выбор стратегии поиска экстремума [1, 2], то представление (2.5) функций состояния в нелинейной параметрической форме приводит к решению исходной задачи на базе вычислительных схем вариаций в пространстве состояния.

3. Основной шаг построения минимизирующей последовательности функций базируется на конструкции малых конечных приращений, при помощи которой осуществляется переход от данного распределения напряжений и смещений σ , u к улучшенным $\sigma + \delta\sigma$, $u + \delta u$. Пусть известно некоторое начальное распределение функций $H(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\sigma(x, y)$, $u(x, y)$, при которых ограничения (1.4), (1.5) выполняются и, следовательно, состоянию σ , u соответствует точка в пространствах функций Φ , h . Линеаризуя уравнения (1.3) в окрестности начального состояния, запишем соответствующие уравнения в вариациях

$$D(h) \cdot \delta\sigma + f_u \delta u = \delta F, \quad \delta\sigma = G(\varphi, h) \delta u + \delta\sigma_0 \quad (3.1)$$

$$\delta F = -[D_h \cdot \sigma + f_h] \delta h, \quad \delta\sigma_0 = [G_\varphi \delta\varphi + G_h \delta h] u$$

$$D_h = \partial[D(h + \varepsilon \delta h)] / \partial \varepsilon |_{\varepsilon=0} / \delta h$$

$$G_h = \partial[G(h + \varepsilon \delta h, \varphi)] / \partial \varepsilon |_{\varepsilon=0} / \delta h$$

$$G_\varphi = \partial[G(h, \varphi + \varepsilon \delta\varphi)] / \partial \varepsilon |_{\varepsilon=0} / \delta\varphi$$

$$f_u = \{\partial f / \partial u_i\} \quad (i \in [1, m]), \quad f_h = \partial f / \partial h$$

Являясь по форме идентичными задаче прямого расчета (1.3), уравнения (3.1) описывают распределение напряжений δG и перемещений δu при воздействии вектора массовых сил δF и начального напряженного состояния $\delta\sigma_0$. С использованием функции Грина прямой задачи вариации $\delta\sigma$, удовлетворяющие (3.1), могут быть представлены в форме скалярных произведений в соответствующих метрических пространствах. Приравнявая последние вариациям напряжений, найденным на основании параметрических представлений (2.5), получим систему линейных функциональных уравнений, обеспечивающих на каждом шаге выполнение условий прочности с точностью до квадратов малых конечных приращений

$$(\sigma_h, \delta h) + (\sigma_\varphi, \delta\varphi) = (\sigma_\Phi, \delta\Phi) \quad (3.2)$$

Здесь σ_h , σ_φ — функции чувствительности тензора напряжений к изменению управлений h и φ ; $\mathbf{J} = \{\partial\sigma / \partial\Phi_k\}$, $k \in [0, n-1]$. Система (3.2), состоящая из n скалярных уравнений, содержит $n+2$ независимых переменных и в принципе позволяет представить n неизвестных через две свободные функции. Считая эту операцию разрешимой (на базе, напри-

мер, дискретных аппроксимаций), выразим вариацию функции распределения толщины через вариации $\delta\Phi_0$, $\delta\varphi$:

$$\delta h = (h_\Phi, \delta\Phi_0) + (h_\varphi, \delta\varphi) \quad (3.3)$$

Величина $\delta\Phi_0$ в соответствии с (2.6) характеризует изменение запаса прочности и, следовательно, h_Φ является функцией чувствительности распределения толщины к изменению этого запаса; h_φ — является функцией чувствительности распределения толщины к изменению угла армирования при сохранении неизменным запаса прочности.

Остается подставить выражение (3.3) в формулу приращения функционала качества и указать правило определения приращений $\delta\Phi_0$ и $\delta\varphi$. Интегрируя в соответствии с (1.6) и (3.3) вариацию функционала по площади, найдем

$$\delta V = (V_\Phi, \delta\Phi_0) + (V_\varphi, \delta\varphi) \quad (3.4)$$

$$V_\Phi = \int_S h_\Phi(M, Q) ds_Q, \quad V_\varphi = \int_S h_\varphi(M, Q) ds_Q$$

где Q, M — точки истока и наблюдения соответственно.

Минимум (3.4) при ограничениях, обеспечивающих справедливость линейного приближения

$$|\delta\Phi_0| \leq \delta\Phi_0^+, \quad |\delta\varphi| \leq \delta\varphi^+ \quad (3.5)$$

реализуется на решениях релейного типа

$$\delta\Phi_0 = -\delta\Phi_0^+ \text{sign } V_\Phi, \quad \delta\varphi = -\delta\varphi^+ \text{sign } V_\varphi \quad (3.6)$$

Решение этой задачи позволяет осуществить основной шаг итерационного процесса — переход к состоянию $\Phi_0 + \delta\Phi_0$ и управлению $\varphi + \delta\varphi$, при этом (2.2), (2.5) и (3.2) обеспечивают выполнение условий (1.4) с точностью до $O(\|\delta\Phi\|^2)$, (2.7) — выполнение геометрического ограничения (1.6). Причем (3.6) обеспечивает максимальное понижение V при переходе к заданному возможному управлению.

4. Рассмотрим схему построения алгоритма весовой оптимизации круглой сплошной изотропной пластины переменной толщины, изгибаемой поперечным давлением. В основу решения прямой задачи положена конечно-элементная модель в форме метода сил, обладающая определенными достоинствами в задаче оптимального проектирования с ограничениями на напряжения.

Проблема прямого расчета заключается в отыскании минимума дополнительной работы

$$\Psi = \frac{6}{E} \int_0^R r H^{-3}(r) (M_r^2 + M_\theta^2 - 2\nu M_r M_\theta) dr \quad (4.1)$$

на множестве функций распределения моментов, удовлетворяющих уравнению равновесия

$$(rM_r)' - M_\theta - f(r) = 0, \quad f(r) = \int_0^R r q(r) dr \quad (4.2)$$

и статическим граничным условиям.

Для перехода к дискретной модели отрезок $[0, R]$ разбивается на N отрезков введением равномерной сетки $r_i = iR/N$ ($i \in [0, N]$). В качестве функций состояния фигурируют узловые значения радиальных $M_i = M_r(r_i)$ и кольцевых моментов $M_{\theta i} = M_\theta(r_i)$, в качестве функций управления — узловые значения толщин $H_i = H(r_i)$. Внутри каждого элемента задается распределение радиальных моментов $M_r^i(r) = M_{i-1}\varphi_{1i}(r) + M_i\varphi_{2i}(r) + \varphi_{0i}(r)$ ($i \in [1, N]$); $\varphi_{1i}(r_{i-1}) = \varphi_{2i}(r_i) = 1$, $\varphi_{1i}(r_i) = \varphi_{2i}(r_{i-1}) =$

$=\varphi_{0i}(r_{i-1})=\varphi_{0i}(r_i)=0$ совместно с линейной аппроксимацией толщин $H^i(r)=H_{i-1}+(H_i-H_{i-1})(r-r_{i-1})/(r_i-r_{i-1})$.

Распределение кольцевых моментов удовлетворяет уравнениям равновесия (4.2) для каждого элемента

$$\begin{aligned} M_{\theta^i}^i(r) &= M_{i-1}\psi_{1i}(r) + M_i\psi_{2i}(r) + \psi_{i0}(r) \quad (i \in [1, N]) \\ \psi_{hi} &= (r\varphi_{hi})' \quad (k=1, 2), \quad \psi_{0i} = (r\varphi_{0i})' + f(r) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Минимуму функционала (4.1) соответствуют решения уравнений

$$\sum_{h=1}^3 A_{hi} M_{i+h-2} = D_i \quad (i \in [1, N]) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} A_{1i} &= A_{1i}(H_{i-1}, H_i), \quad A_{2i} = A_{2i}(H_{i-1}, H_i, H_{i+1}) \\ A_{3i} &= A_{3i}(H_i, H_{i+1}) = A_{i, i+1}, \quad D_i = D_i(H_{i-1}, H_i, H_{i+1}) \end{aligned}$$

выражающих условия совместности деформирования смежных элементов. К уравнениям (4.4) добавляются известные условия на границе.

В соответствии с (3.1) запишем уравнения совместности деформаций (4.4) в вариациях:

$$\sum_{h=1}^3 A_{hi} \delta M_{i+h-2} = \delta F_i \quad (i \in [1, N]) \quad (4.5)$$

$$\delta F_i = \sum_{h=1}^3 R_{hi} \delta H_{i+h-2}, \quad R_{hi} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial A_{li}}{\partial H_{i+h-2}} M_{i+l-2} - \frac{\partial D_i}{\partial H_{i+h-2}} \quad (k=1, 2, 3),$$

откуда, учитывая трехдиагональный вид матрицы A_{hi} , получим представление $\delta M_i = \sum M_{ij}^H \delta H_j$ ($j=1, 2, \dots, N$). Подставляя полученное выражение в уравнения равновесия, записанные в вариациях, найдем аналогичное представление для кольцевых моментов

$$\delta M_{\theta i} = \sum_{j=1}^N M_{\theta ij}^H \delta H_j, \quad M_{\theta ij}^H = \psi_{1i}(r_i) M_{i-1, j}^H + \psi_{2i}(r_i) M_{ij}^H \quad (4.6)$$

Рассмотрим условие прочности. Соответствующая (1.4) предельная поверхность в пространстве напряжений представляется в форме полинома второй степени, позволяющего описать разрушение материала, неодинаково сопротивляющегося растяжению — сжатию [9]:

$$p_{10}\sigma_r + p_{20}\sigma_\theta + p_{11}\sigma_r^2 + 2p_{12}\sigma_r\sigma_\theta + p_{22}\sigma_\theta^2 \leq p_0^2 \quad (4.7)$$

Однородная квадратичная форма характеризуется собственными значениями симметричной матрицы p_{ik} ($i, k=1, 2$):

$$\sum_{k=1}^2 p_{ik} a_k = \lambda^i a_i \quad (i=1, 2) \quad (4.8)$$

Из (4.8) и условия ортонормирования собственных векторов следует

$$\lambda^j = 0,5(p_{11} + p_{22}) + (-1)^j \sqrt{0,25(p_{11} - p_{22})^2 + p_{12}^2} \quad (4.9)$$

$$a_1^j = [1 + ((\lambda^j - p_{11})/p_{12})^2]^{1/2}$$

$$a_2^j = a_1^j (\lambda^j - p_{11}) p_{12} \quad (j=1, 2)$$

Линейным преобразованием поворота осей $\sigma_r = a_1^1 \sigma + a_2^1 s$, $\sigma_\theta = a_1^2 \sigma + a_2^2 s$

условие прочности (4.7) преобразуется к виду

$$\lambda_1(\sigma + \sigma_0)^2 + \lambda_2(s + s_0)^2 \leq p_{00}^2, \quad p_{00}^2 = p_0^2 + \lambda_1 \sigma_0^2 + \lambda_2 s_0^2 \quad (4.10)$$

$$\sigma_0 = 1/2(p_{10} a_1^4 + p_{20} a_2^4) / \lambda_1, \quad s_0 = 1/2(p_{10} a_1^2 + p_{20} a_2^2) / \lambda_2$$

На основании (4.10) можно подобрать параметрические представления функций состояния $\sigma(r)$, $s(r)$ через две свободные функции координат $\Phi_0(r)$, $\Phi_1(r)$:

$$\sigma = -\sigma_0 + \frac{p_{00}}{\sqrt{\lambda_1}} \sin \Phi_0 \cos \Phi_1 \quad (4.11)$$

$$s = -s_0 + \frac{p_{00}}{\sqrt{\lambda_2}} \sin \Phi_0 \sin \Phi_1 \quad \text{при } \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$$

$$\sigma = -\sigma_0 + \frac{p_{00}}{\sqrt{\lambda_1}} \sin \Phi_0 \operatorname{ch} \Phi_1$$

$$s = -s_0 + \frac{p_{00}}{\sqrt{-\lambda_2}} \sin \Phi_0 \operatorname{sh} \Phi_1 \quad \text{при } \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Наконец, используя (4.11), найдем

$$\delta M_r = 1/6 \delta(\sigma_r H^2) = M_r^H \delta H + M_r^0 \delta \Phi_0 + M_r^1 \delta \Phi_1 \quad (4.12)$$

$$\delta M_\theta = 1/6 \delta(\sigma_\theta H^2) = M_\theta^H \delta H + M_\theta^0 \delta \Phi_0 + M_\theta^1 \delta \Phi_1$$

$$M_r^0 = 1/6 H^2 p_{00} \cos \Phi_0 (a_1^4 \lambda_1^{-1/2} \cos \Phi_1 + a_2^4 \lambda_2^{-1/2} \sin \Phi_1)$$

$$M_r^1 = 1/6 H^2 p_{00} \sin \Phi_0 (-a_1^4 \lambda_1^{-1/2} \sin \Phi_1 + a_2^4 \lambda_2^{-1/2} \cos \Phi_1)$$

$$M_\theta^0 = 1/6 H^2 p_{00} \cos \Phi_0 (a_1^2 \lambda_1^{-1/2} \cos \Phi_1 + a_2^2 \lambda_2^{-1/2} \sin \Phi_1)$$

$$M_\theta^1 = 1/6 H^2 p_{00} \sin \Phi_0 (-a_1^2 \lambda_1^{-1/2} \sin \Phi_1 + a_2^2 \lambda_2^{-1/2} \cos \Phi_1)$$

$$M_r^H = 1/3 \sigma_r H, \quad M_\theta^H = 1/3 \sigma_\theta H \quad \text{при } \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0.$$

Таким образом представление (4.12) обеспечивает выполнение условия прочности в процессе поиска, а представление (4.6) — уравнений равновесия и совместности деформаций. Приравнявая соответствующие выражения друг к другу, найдем

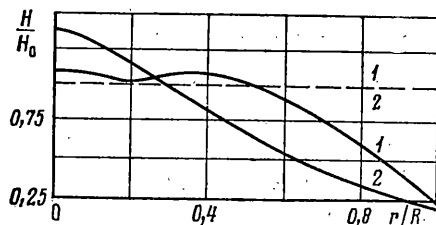
$$\sum_{j=1}^N B_{ij} \delta H_j = M_{ri}^0 \delta \Phi_{0i} + M_{ri}^1 \delta \Phi_{1i}, \quad B_{ij} = M_{ij}^H - M_{rj}^H \delta_{ij} \quad (4.13)$$

$$\sum_{j=1}^N C_{ij} \delta H_j = M_{\theta i}^0 \delta \Phi_{0i} + M_{\theta i}^1 \delta \Phi_{1i}, \quad C_{ij} = M_{\theta ij}^H - M_{\theta i}^H \delta_{ij}$$

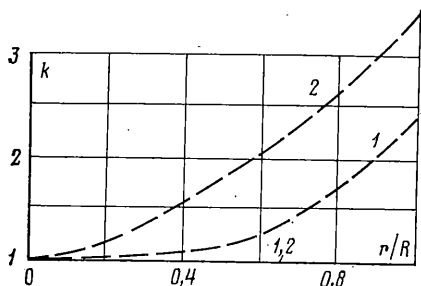
В соответствии с (3.3) получим из (4.13) выражение вариации управляющей функции δH_i через вариации запасов прочности $\delta \Phi_{0i}$: $\delta H_i = \sum H_{ij}^0 \delta \Phi_{0j}$ ($j=1, 2, \dots, N$). Подставляя это выражение в формулу приращения объема, найдем (α_i — коэффициенты квадратурной формулы):

$$\delta V = \sum_{i=1}^N \alpha_i r_i \delta H_i \Delta r = \sum_{i=1}^N \gamma_i \delta \Phi_{0i} \quad (4.14)$$

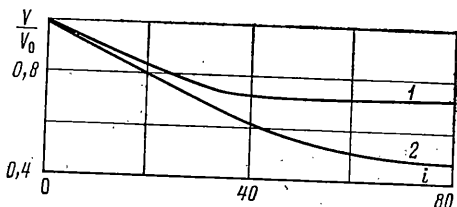
$$\gamma_i = \Delta r \sum \alpha_j r_j H_{ji}^0, \quad H_{ji}^0 = (M_{rj}^0 M_{\theta j}^1 - M_{\theta j}^0 M_{rj}^1) / (B_{ji} M_{\theta j}^1 - C_{ji} M_{rj}^1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В итоге максимальное снижение целевой функции на каждой итерации определяется максимальным допустимым значением шага варьирования в пространстве состояния $\delta\Phi_{oi}^+$ и знаком γ_i : $\delta\Phi_{oi} = -\delta\Phi_{oi}^+ \text{sign } \gamma_i$. Очевидно, что в процессе итерации функционал V не возрастает $\delta V = -\sum \gamma_i \text{sign } \gamma_i \delta\Phi_{oi}^+ \leq 0$ ($i=1, 2, \dots, N$).

В целом стратегия описываемого алгоритма, как и в методе локальных вариаций [11], может включать несколько вложенных друг в друга итерационных процессов: уменьшения шага варьирования в пространстве состояния $\delta\Phi_{oi}^+$; уменьшения шага геометрической сетки Δr ; процесс итераций с заданными $\delta\Phi_{oi}^+$, Δr до полной сходимости.

В качестве примера рассмотрим задачу минимизации объема круглой пластины радиуса R , изгибаемой нормальной осесимметричной нагрузкой, свободно опертой по контуру. Тестовые результаты расчета напряжений по конечно-элементной модели в форме метода сил показали практическое совпадение (при числе элементов $N \geq 10$) с аналитическим решением [12] в широком диапазоне распределения толщин и краевых условий. Параметры пластинки полагались равными: $R=0,400$ м, $\sigma_+=0,28$ Н/м², $\sigma_-=0,44$ Н/м², $\nu=0,3$ (σ_+ , σ_- — пределы прочности на растяжение и сжатие, ν — коэффициент Пуассона).

Использовался критерий прочности П. П. Баландина для материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению — сжатию [9]: $(\sigma_- - \sigma_+) (\sigma_r + \sigma_\theta) + \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 \leq \sigma_+ \sigma_-$.

Фиг. 1–3 иллюстрируют результаты расчета оптимальных форм для двух вариантов нагружения пластины: равномерно распределенной по всей площади нагрузкой интенсивности $q=10^8$ Н/м² (кривые 1) и равномерно распределенной внутри центрального элемента радиуса $0,1R$ давлением $q=10^8$ Н/м² (кривые 2). На фиг. 1 показаны распределения по радиусу отношений толщин оптимального проекта к соответствующим начальным значениям $-H_0$ (сплошные линии) и относительные толщины начального приближения (штриховая линия).

На фиг. 2 представлены соответствующие распределения запасов прочности. Изменения относительного объема V/V_0 , где V_0 — объем пластинки с толщиной H_0 , по числу итераций показаны на фиг. 3. В случае равномерно распределенной нагрузки $H_0=9,23$ мм, $V_0=4,64$ м³; при локальном нагружении $-H_0=1,87$ мм, $V_0=0,939$ м³. Из полученных численных результатов следует, что пластинкам минимального объема при осесимметричном нагружении соответствуют равнонапряженные состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978, 487 с.
2. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел, М.: Наука, 1980, 255 с.
3. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики, М.: Наука, 1975, 478 с.
4. Чень Гэндун, Ольхофф Н. Исследование задач оптимального проектирования сплошных упругих пластин. — В кн.: Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций, М.: Мир, 1981, с. 196–225.
5. Лурье К. А. Некоторые задачи оптимального изгиба и растяжения упругих пластин. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 86–93.
6. Григорулэ Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин, Киев: Наук. думка, 1979, 364 с.
7. Серегин Г. А., Троицкий В. А. О наилучшем расположении плоскостей упругой симметрии в ортотропном теле. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 185–189.
8. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование, М.: Мир, 1983, 479 с.
9. Гольденблат И. И., Конов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов, М.: Машиностроение, 1968, 191 с.
10. Веква И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов, М.: Наука, 1978, 296 с.
11. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления, М.: Наука, 1973, 238 с.
12. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки, М.: Наука, 1966, 635 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.IX.1984