

УДК 534.1

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫЕ КОЛЕБАНИЯ
В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

БОЛОТИН В. В.

В [1-3] было исследовано явление захватывания в автоколебательных системах при действии на них периодических параметрических возмущений, рассмотрены автоколебательные системы Релея и Ван-дер-Поля, а также более общие системы, полученные добавлением полиномиальных нелинейностей. Показано, что для рассмотренных систем не существует порога захватывания по коэффициенту параметрического возмущения, т. е. явление захватывания существует при сколь угодно малых значениях этого коэффициента.

В публикуемой статье рассмотрен еще один класс автоколебательных систем — систем с запаздывающими силами. Механическим примером таких систем служат гибкие плохо обтекаемые тела, находящиеся в ветровом потоке. При амплитудах колебаний, сопоставимых с поперечными размерами тел, устанавливается механизм взаимодействия между образованием вихревой дорожки в следу за телом и колебаниями тела: моменты срыва вихрей в определенной степени синхронизируются с колебаниями тела. Схематизация этой задачи приводит к дифференциальному уравнению для колебательной системы, содержащей запаздывающую силу. При определенных фазах запаздывания возможно существование устойчивых предельных циклов. Если к такой системе приложить параметрическое возмущение (например, нагрузить упругий стержень периодическими продольными силами), то приходим к новому классу неавтономных систем. Цель работы состоит в изучении амплитудно-частотных зависимостей для систем этого класса с установлением условий, при которых возникают явления типа захватывания.

1. Рассмотрим колебательную систему с уравнением

$$u'' + \beta \omega_0 u' + \omega_0^2 (1 + 2\mu \cos \omega t) u = -\omega_0^2 A_\tau \operatorname{sign} u(t - \tau) \quad (1.1)$$

Здесь ω_0 — собственная частота консервативной системы, β — безразмерный коэффициент демпфирования, ω — частота, μ — коэффициент параметрического возбуждения. Уравнение (1.1) содержит член, который описывает запаздывающую силу. Эта сила имеет заданную амплитуду с параметром A_τ и зависит лишь от знака обобщенного перемещения $u(t)$. Пусть время запаздывания τ таково, что в автономной системе, получаемой из (1.1) при $\mu=0$, существует устойчивый предельный цикл. Приближенные условия на τ можно получить отыскивая решение уравнения (1.1) при $\mu=0$ в виде $u=A \cos \omega t + \dots$, где A — амплитуда, ω — частота автоколебаний; точками обозначены члены, содержащие гармоники. Тогда $\operatorname{sign} u(t - \tau) = (4/\pi) \cos \omega(t - \tau) + \dots$. Подстановка этих выражений в (1.1) приводит к системе двух уравнений

$$\omega^2 - \beta \omega \omega_0 \operatorname{ctg} \omega \tau - \omega_0^2 = 0, \quad A = (4\omega_0 / (\pi \beta \omega)) A_\tau \sin \omega \tau \quad (1.2)$$

Из второй формулы (1.2) видно, что при $A_\tau > 0$ для существования автоколебательных режимов требуется, чтобы фаза запаздывания $\psi = \omega \tau$ лежала в интервале $(0, \pi)$. В дальнейшем полагаем фазу ψ заданной характеристикой колебательной системы. При $\beta \operatorname{ctg} \psi \ll 1$ уравнения (1.2) имеют приближенное решение $\omega \approx \omega_{SE}$, $A \approx A_{SE}$, где

$$\omega_{SE} = \omega_0 (1 + \beta \operatorname{ctg} \psi)^{1/2}, \quad A_{SE} = (4 / (\pi \beta)) A_\tau \sin \psi \quad (1.3)$$

Пусть $\mu > 0$. Рассмотрим колебания, происходящие в окрестности параметрических резонансов

$$\omega = 2\omega_0/p \quad (p=1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

Эти колебания, вообще, являются почти-периодическими. Поэтому их анализ любыми методами нелинейной механики, основанными на идее периодичности [3], будет приближенным. Используем метод гармонического баланса, приводящий к конечному результату наиболее коротким путем. Предположим, что система находится в состоянии синхронизма с параметрическим возбуждением, причем ее колебания близки к периодическим с частотой, которая находится в рациональном отношении с частотой параметрического возбуждения ω . Вблизи главного резонанса (при $p=1$) эти колебания ищем в форме

$$u(t) = a \cos(\omega t/2) + b \sin(\omega t/2) + \dots \quad (1.5)$$

где a и b — неизвестные коэффициенты, а точки обозначают члены, содержащие гармоники. Частота колебаний $\omega/2$ по предположению имеет малую расстройку с собственной частотой, соответствующей консервативной системе ω_0 . Подставляя (1.5) в (1.1) и сравнивая коэффициенты при $\cos(\omega t/2)$ и $\sin(\omega t/2)$, получим систему уравнений

$$[1 + \mu - \nu^2 + \beta(A_0/A) \cos \psi]a + \beta[\nu - (A_0/A) \sin \psi]b = 0 \quad (1.6)$$

$$[1 - \mu - \nu^2 + \beta(A_0/A) \cos \psi]b - \beta[\nu - (A_0/A) \sin \psi]a = 0$$

где использованы обозначения $\nu = 1/2 \omega/\omega_0$, $A = (a^2 + b^2)^{1/2}$, а также введена характерная амплитуда $A_0 = 4A_c/(\pi\beta)$, равная амплитуде автоколебаний из приближенных формул (1.3) при $\sin \psi = -1$.

Уравнение (1.6) трактуем как систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно a и b . Приравнявая нулю определитель этой системы, получим уравнение, содержащее только амплитуду A . Обозначив $A_0/A = y$, запишем это уравнение в виде

$$(1 - \nu^2 + \beta y \cos \psi)^2 + \beta^2(\nu - y \sin \psi)^2 - \mu^2 = 0 \quad (1.7)$$

2. В приближении (1.5), т. е. в рамках метода гармонического баланса, уравнение (1.7) содержит всю информацию о виде амплитудно-частотных кривых в параметрически возбуждаемой системе с запаздыванием в области главного параметрического резонанса $\omega \approx 2\omega_0$. Для суждения об устойчивости установившихся периодических колебаний используем бифуркационные соображения, учитывая, что автоколебательный режим вне области параметрического захватывания устойчив, а тривиальное решение $u(t) \equiv 0$ неустойчиво при всех частотах параметрического воздействия.

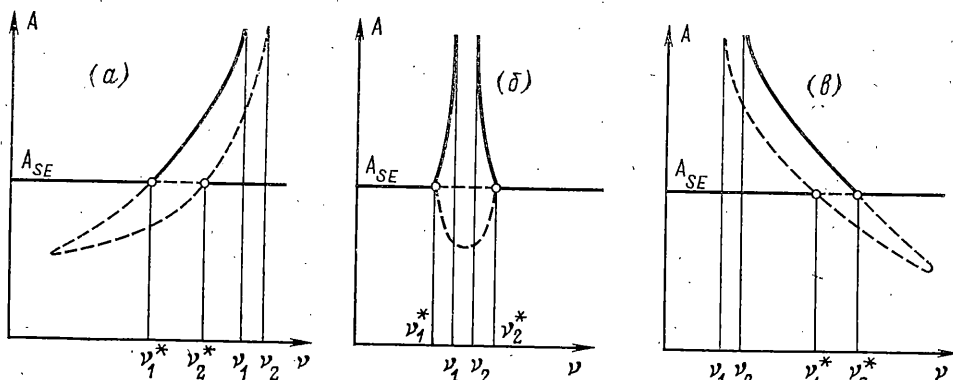
Отметим, прежде всего, что при достаточно больших A уравнение (1.7) не может быть удовлетворено. Это означает, что амплитудно-частотные кривые, описываемые уравнением (1.7), не имеют точек касания с осью $A=0$. Полагая в (1.7) $y \rightarrow 0$, получим уравнение, совпадающее с приближенным уравнением [4] для нахождения границ области неустойчивости в параметрически возбуждаемой системе без запаздывания. При достаточно малом $\mu < \mu_*$, где критический коэффициент возбуждения μ_* зависит только от коэффициента демпфирования β , это уравнение не имеет действительных корней, а параметрический резонанс в системе без запаздывающих членов невозможен. Отметим, что при $\beta \ll 1$ имеет место приближенное соотношение $\mu_* \approx \beta$.

Условие $y \rightarrow 0$ формально означает, что установившиеся амплитуды $A \rightarrow \infty$, т. е. амплитудно-частотные кривые уходят в бесконечность. Асимптотами служат вертикальные прямые $\nu = \nu_{1,2}$, где $\nu_{1,2}$ — действительные корни уравнения (1.7) при $y \rightarrow 0$:

$$\nu_{1,2} = [1 - 1/2\beta^2 \pm (\mu^2 - \beta^2 + 1/4\beta^4)^{1/2}]^{1/2} \quad (2.1)$$

Если $\mu > \mu_*$, то на отрезке $[\nu_1, \nu_2]$ не существует установившихся колебательных режимов с конечными амплитудами: нелинейность запаздывающего типа оказывается слишком «слабой», чтобы ограничить амплитуды в окрестности параметрического резонанса. Строго говоря, предельный переход $A \rightarrow \infty$ в рамках метода гармонического баланса недопустим. В дальнейшем покажем, что введением в систему малых дополнительных нелинейностей другой природы (например, малых квазиупругих сил) получаем конечные установившиеся амплитуды и в этой области.

Представляет интерес найти частоты, при которых амплитудно-частотные кривые, задаваемые уравнением (1.7), отходят от реше-



Фиг. 1

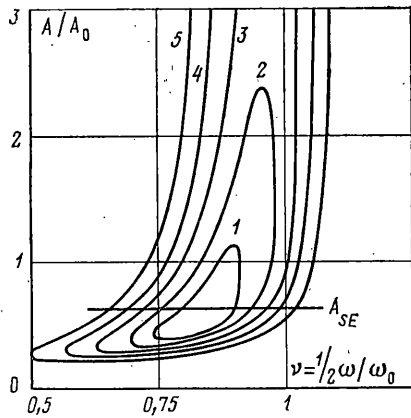
ния, отвечающего предельному циклу. Пусть $\beta \operatorname{ctg} \psi \ll 1$. Рассматривая условия бифуркации по амплитуде, подставим в уравнение (1.7) значение амплитуды автоколебаний, определяемое согласно второй формуле (1.3). При этом $y = \operatorname{cosec} \psi$. Уравнение (1.7) дает две частоты бифуркации $\nu = \nu_{12}^*$, где

$$\nu_{12}^* \approx (1 \pm \mu + \beta \operatorname{ctg} \psi)^{1/2} \quad (2.2)$$

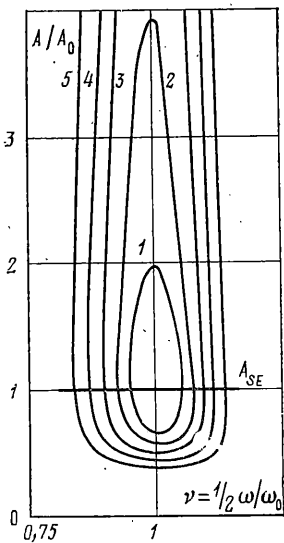
При $\psi = \pi/2$ частоты, определяемые согласно (2.2), совпадают с вычисленными в аналогичном приближении границами области неустойчивости для параметрически возбуждаемой системы без демпфирования и запаздывания. При $\psi \in (\pi/2, \pi)$ эта область перемещается в сторону меньших частот, при $\psi \in (0, \pi/2)$ — в сторону больших частот. Поскольку положение асимптот, определяемых согласно (2.1), от ψ не зависит, то отсюда следует качественное изменение вида амплитудно-частотных кривых при изменении фазы запаздывания. Это явление проиллюстрировано на фиг. 1.

Фиг. 1, а построена для случая, когда $\psi \in (\pi/2, \pi)$. Амплитудно-частотные кривые наклонены в сторону больших частот, приближаясь к вертикальным асимптотам при $\nu \rightarrow \nu_1$ и $\nu \rightarrow \nu_2$. Вне отрезка $[\nu_1^*, \nu_2^*]$ автоколебательный режим $A = A_{SE}$ устойчив, внутри отрезка неустойчив. На амплитудно-частотной кривой параметрически возбуждаемых колебаний устойчива лишь восходящая ветвь, ответвляющаяся от линии автоколебаний при $\nu = \nu_1^*$ (на фиг. 1. устойчивые ветви нанесены сплошными линиями, неустойчивые — штриховыми). Фиг. 1, б построена для случая $\psi = \pi/2$. Амплитудно-частотная кривая параметрических колебаний имеет форму, мало отличающуюся от симметричной. Обе ветви, лежащие выше линии $A = A_{SE}$, устойчивы. В случае $\psi \in (0, \pi/2)$ (фиг. 1, в) устойчивой является та ветвь амплитудно-частотной кривой, которая ответвляется от линии $A = A_{SE}$ при $\nu = \nu_2^*$. Изменение амплитуд колебаний в зависимости от частоты параметрического возбуждения в случаях (а) и (в) сопровождается явлениями затягивания и гистерезиса, типичными для нелинейных колебательных систем.

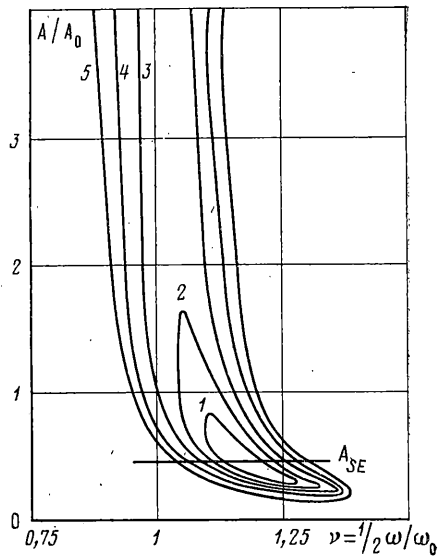
Амплитудно-частотные зависимости при различных значениях μ приведены на фиг. 2–4. В отличие от фиг. 1, которая носит качественный характер, эти зависимости построены путем численного решения уравнения (1.7). При этом принято, что $\beta = 0,2$, $\psi = 5\pi/6$ (фиг. 2), $\psi = \pi/2$ (фиг. 3) и $\psi = \pi/6$ (фиг. 4). Кривые 1–5 построены,



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

соответственно, для $\mu=0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3$. Заметим, что в данном случае $\mu_* \approx 0,2$. Поэтому кривые 1 и 2 отвечают конечным амплитудам. Кривая 3 соответствует предельному случаю, когда впервые появляется область частот, в пределах которой нет установившихся параметрически возбуждаемых колебаний.

Как следует из приведенного анализа, при сколь угодно малых μ возможно параметрическое захватывание в окрестности главного резонанса $\omega=2\omega_0$. Этот вывод аналогичен тому, который был сделан в отношении уравнений Ван-дер-Поля и Релея, а также этих уравнений, обобщенных путем добавления кубической нелинейности [1–3]. Захватывание происходит и тогда, когда коэффициент параметрического возбуждения меньше критического значения $\mu_* \approx \beta$, т. е. когда в соответствующей системе без запаздывания не возникают параметрически возбуждаемые колебания. Значения характерных амплитуд захватывания оценим полагая в уравнении (1.7) $\nu=1$; что соответствует резонансному соотношению $\omega=2\omega_0$. Решение уравнения дает

$$A=A_0[\sin \psi \pm (\mu^2/\beta^2 - \cos^2 \psi)]^{-1} \quad (2.3)$$

В частности, при $\psi=\pi/2$ получаем

$$A=A_0(1 \pm \mu^2/\beta^2)^{-1} \quad (2.4)$$

Если $\beta \cos \psi < \mu < \beta$, то формула (2.3) дает две положительные действительные асимптоты. Меньшее значение отвечает неустойчивому, большее — устойчивому режиму параметрических колебаний. Если $\mu > \beta$, то формула (2.3) при всех значениях ψ дает одно положительное значение амплитуды $A > A_{SE}$, соответствующее устойчивому режиму. Это находится в согласии с тем, что было получено выше из анализа поведения амплитудно-частотных кривых при $A \rightarrow \infty$.

3. Рассмотрим явление захватывания в окрестности первого побочного резонанса, для которого в формуле (1.4) надо положить $p=2$. Параметрические колебания происходят здесь со смещением относительно значения $u=0$. Поэтому приближенное решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$u(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \dots \quad (3.1)$$

Разложение функции $\text{sign } u(t-\tau)$ в ряд Фурье содержит a_0, a_1 и b_1 под знаком трансцендентных функций, что приводит к громоздким и трудно обозримым трансцендентным уравнениям. В грубом приближении положим, что

$$\text{sign } u(t) \approx (4/\pi) (a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) / (a_0 + A) + \dots \quad (3.2)$$

с погрешностью, $1/2$ которая будет тем меньше, чем сильнее неравенство $|a_0| \ll A = (a_1^2 + b_1^2)^{1/2}$. Подстановка выражений (3.1) и (3.2) в уравнение (1.1) приводит к системе уравнений относительно a_0, a_1 и b_1 :

$$\begin{aligned} a_0 + \mu a_1 + \beta A_0 a_0 / A_1 &= 0 \\ (1 - \nu^2 + \beta A_0 \cos \psi / A_1) a_1 + \beta (\nu - A_0 \sin \psi / A_1) b_1 + 2\mu a_0 &= 0 \\ (1 - \nu^2 + \beta A_0 \cos \psi / A_1) b_1 - \beta (\nu - A_0 \sin \psi / A_1) a_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь по предположению $A_1 = A + a_0 > 0$, а характерная амплитуда по-прежнему определяется согласно (1.7). В отличие от уравнений (1.6) и дальнейших соотношений здесь использовано обозначение $\nu = \omega / \omega_0$. Из первого уравнения (3.3) получим $a_0 = -\mu a_1 (1 + \beta A_0 / A_1)^{-1}$. Подставляя это значение в остальные уравнения и приравнявая нулю определитель полученной системы относительно a_1 и b_1 , приходим к уравнению типа (1.7):

$$\begin{aligned} [1 - \nu^2 - 2\mu(1 + \beta y)^{-1} + \beta y \cos \psi] (1 - \nu^2 + \beta y \cos \psi) + \\ + \beta^2 (\nu - y \sin \psi)^2 = 0, \quad y = A_0 / A_1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Обсудим качественные выводы, вытекающие из уравнения (3.4). Всегда можно выбрать достаточно большие положительные y , при которых уравнение не будет удовлетворено. Следовательно, амплитудно-частотные кривые не имеют точек касания с линией $A_1 = 0$. Далее положим в уравнении (3.4) $y \rightarrow 0$, что формально соответствует случаю $A_1 \rightarrow \infty$. Полученное уравнение совпадает с уравнением для определения частот на границах области параметрического резонанса для соответствующей системы без запаздывания. Если $\beta^2 \ll 1$, то для граничных частотных соотношений получаем формулу

$$\nu_{1,2} \approx [1 - \mu^2 \pm (\mu^4 - \beta^2)^{1/2}]^{1/2} \quad (3.5)$$

При $\mu > \beta^{1/2}$ формула (3.5) дает уравнения вертикальных асимптот для амплитудно-частотных кривых. Здесь $\beta^{1/2} = \mu_*$ является критическим коэффициентом возбуждения для первого побочного резонанса [4, 5]. На отрезке $[\nu_1, \nu_2]$ конечные амплитуды установившихся колебаний в приближении метода гармонического баланса не обнаружены. При $\mu > \mu_*$ этот отрезок вырождается. Аналогичные выводы получены ранее для главного резонанса $\omega = 2\omega_0$. Различие состоит в величине критического коэффициента возбуждения μ_* . В отношении этого вывода остается в силе замечание, сделанное в связи с формулой (2.1).

Найдем положения точек пересечения амплитудно-частотных кривых параметрических колебаний с линией, которая соответствует амплитуде

предельного цикла. Пусть $\beta \operatorname{ctg} \psi \ll 1$. Для амплитуды автоколебаний согласно второй формуле (1.2) имеем $y = \operatorname{cosec} \psi$. Точки ветвления лежат в окрестности значения $\nu = 1$. Поскольку $\beta^2 \ll 1$, то последний член в левой части уравнения (3.4) будет величиной еще меньшего порядка, чем β^2 . Опуская этот член, найдем приближенное значение корней уравнения (3.4) при $y = \operatorname{cosec} \psi$:

$$\nu_1^* \approx (1 - 2\mu^2 + \beta \operatorname{ctg} \psi)^{1/2}, \quad \nu_2^* \approx (1 + \beta \operatorname{ctg} \psi)^{1/2} \quad (3.6)$$

Второй корень соответствует частоте автоколебаний, определяемой согласно первой формуле (1.3). Первый корень дает несколько меньшую частоту, отличающуюся поправкой порядка μ^2 по сравнению с единицей. При $\psi = \pi/2$ получаем частотные отношения $\nu_1^* \approx (1 - 2\mu^2)^{1/2}$, $\nu_2^* \approx 1$, что совпадает с правой частью формулы (3.5) при $\beta \rightarrow 0$. Таким образом, точки ветвления лежат вблизи частот, отвечающих границе области неустойчивости для параметрически возбуждаемой системы, в которой отсутствует как запаздывающая, так и демпфирующая сила. В этом случае расположение этих частот зависит от фазы запаздывания, а именно: при $\psi \in (\pi, \pi/2)$ отрезок $[\nu_1^*, \nu_2^*]$ смещается в сторону меньших частот, при $\psi \in (0, \pi/2)$ в сторону больших. Таким образом, общий вид амплитудно-частотных кривых в окрестности побочного параметрического резонанса $\omega = \omega_0$ похож на вид кривых для главного параметрического резонанса (фиг. 1).

Одно из существенных отличий между резонансами при $\omega = 2\omega_0$ и $\omega = \omega_0$ состоит в величине амплитуд параметрического захватывания. Чтобы оценить величину этих амплитуд, положим в уравнении (3.4) $\nu^2 = 1 - \mu^2 + \beta \operatorname{ctg} \psi$, что приблизительно соответствует середине области параметрического резонанса. Представляют интерес корни уравнения (3.4), имеющие порядок единицы и менее. Именно эти корни соответствуют амплитудам $A \geq A_{\text{св}}$ и, следовательно, устойчивой ветви параметрических колебаний. При этом условии $1 + \beta y \approx 1$. Решая уравнение и возвращаясь к первоначальным обозначениям, придем к формуле, аналогичной (2.3):

$$A_1 \approx A_0 [\sin \psi \pm (\mu^4/\beta^2 - \cos^2 \psi)^{1/2}]^{-1} \quad (3.7)$$

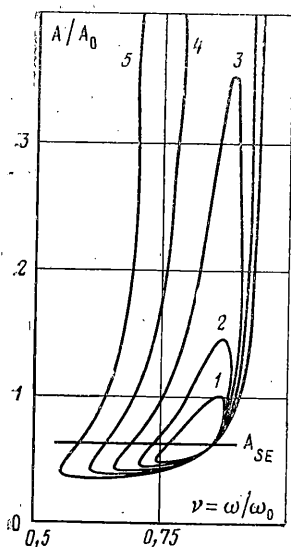
При $\psi = \pi/2$ формула (3.7) дает

$$A_1 \approx A_0 (1 \pm \mu^4/\beta^2)^{-1} \quad (3.8)$$

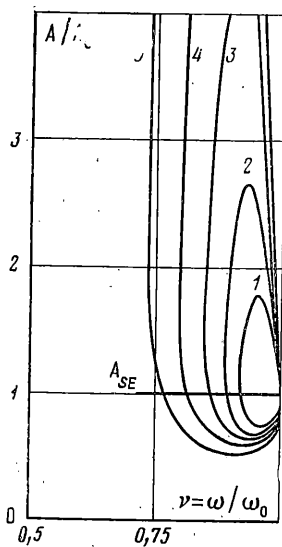
Устойчивым параметрическим колебаниям отвечают отрицательные знаки в формулах (3.7) и (3.8). Если $\psi = \pi/2$, $\mu < \beta$, то амплитуды, определяемые по формулам (2.4) и (3.8), связаны соотношением $A_1/A_0 \approx (1 - \mu^2/\beta^2)/(1 - \mu^4/\beta^2)$. Таким образом, амплитуда параметрического захватывания при побочном резонансе меньше, чем при главном. Качественная картина захватывания имеет такой же вид, как в автоколебательных системах Релея и Ван-дер-Поля (см. фиг. 3 в [3]).

Результаты численного решения уравнения (3.4) при $\beta = 0,2$ представлены на фиг. 5 ($\psi = 5\pi/6$), фиг. 6 ($\psi = \pi/2$) и фиг. 7 ($\psi = \pi/6$). Кривые 1-5 соответствуют значениям коэффициента возбуждения $\mu = 0,3; 0,35; 0,4; 0,45$. Приближенное значение критического коэффициента возбуждения $\mu_* \approx \beta^{1/2} = 0,446$. Следовательно, кривые 4 приблизительно соответствуют соотношению $\mu = \mu_*$. В отличие от фиг. 1-4 по оси абсцисс на фиг. 5-7 отложено отношение $\nu = \omega/\omega_0$ (а не $\nu = 1/2 \omega/\omega_0$). Устойчивые и неустойчивые ветви амплитудно-частотных кривых различаются согласно правилу, приведенному на фиг. 1, где жирные линии отвечают устойчивым, тонкие - неустойчивым решениям.

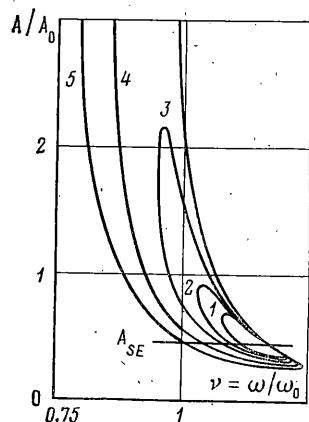
4. Чтобы получить конечные амплитуды на отрезках $[\nu_1^*, \nu_2^*]$, необходимо в систему ввести дополнительные нелинейности, например положительное нелинейное демпфирование (как в системах Ван-дер-Поля и Релея) или полиномиальную функцию от обобщенного перемещения (как



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

в системе Дuffинга). Для примера возьмем обобщенную систему Дuffинга

$$u'' + \beta \omega_0 u' + \omega_0^2 (1 + 2\mu \cos \omega t) u + \gamma \omega_0^2 u^3 = -A \tau \omega_0^2 \operatorname{sign} u(t - \tau) \quad (4.1)$$

где коэффициент перед кубическим членом $\gamma \leq 0$. Уравнение автоколебательной системы получим из (4.1) при $\mu = 0$. Полагая в этом уравнении $u(t) = A \cos \omega t + \dots$, обычным путем придем к уравнению для частоты автоколебаний

$$\omega^2 - \beta \omega \omega_0 \operatorname{ctg} \psi - \omega_0^2 [1 + 3/4 (4\omega_0 / (\pi \beta \omega))^2 \sin^2 \psi] = 0 \quad (4.2)$$

Амплитуды автоколебаний определяются по второй формуле (1.2) подстановкой в нее значений ω , удовлетворяющих уравнению (4.2). Если $\psi = \pi/2$ или $\beta = 0$, то частота автоколебаний ω_{SE} совпадает с вычисленной в гармоническом приближении собственной частотой нелинейной консервативной системы. Тогда имеем $A_{SE} = A_0$, где A_0 — характерная амплитуда (1.7).

Остановимся подробнее на главном параметрическом резонансе $\omega = 2\omega_0$. Решение для установившихся вынужденных колебаний ищем в форме (1.5). В результате приходим к системе уравнений

$$[1 + \mu - \nu^2 + 3/4 \gamma A^2 + \beta (A_0/A) \cos \psi]^2 a + \beta [\nu - (A_0/A) \sin \psi] b = 0 \quad (4.3)$$

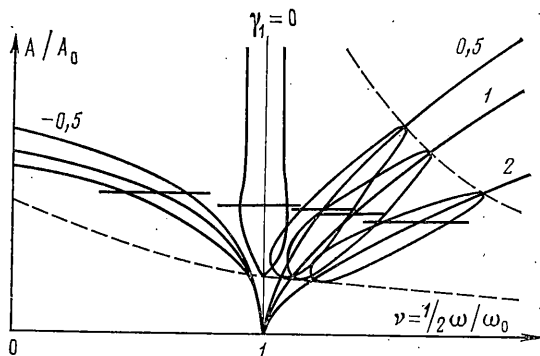
$$[1 - \mu - \nu^2 + 3/4 \gamma A^2 + \beta (A_0/A) \cos \psi]^2 b - \beta [\nu - (A_0/A) \sin \psi] a = 0$$

где $A = (a^2 + b^2)^{1/2}$. Вводя обозначения $A/A_0 = z$, $3/4 \gamma A_0^2 = \gamma_1$, после исключения из системы (4.3) неизвестных a и b придем к уравнению типа (1.7) и (3.4):

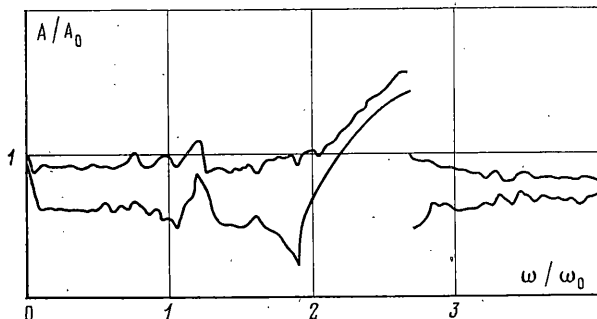
$$(1 - \nu^2 + \gamma_1 z^2 + \beta z^{-1} \cos \psi)^2 + \beta^2 (\nu - z^{-1} \sin \psi)^2 - \mu^2 = 0 \quad (4.4)$$

При малых β амплитудно-частотные кривые ориентируются по скелетным линиям $\nu^2 = 1 + \gamma_1 z^2$. Наибольший интерес представляют предельные точки амплитудно-частотных кривых. Они располагаются вблизи точек пересечения кривых, определяемых уравнением (4.4), и скелетной линии. Случай $\psi = \pi/2$, $\mu > \beta$ проиллюстрирован на фиг. 8. Скелетные линии построены при $\gamma_1 = -0.5$; 0; 0.5; 1; 2. С ростом параметра $\gamma > 0$ глубина затягивания параметрических колебаний увеличивается, а амплитуды уменьшаются.

При достаточно больших γ может оказаться, что $A < A_0$. Это не означает наличие порога захватывания, поскольку с ростом γ уменьшается частота колебаний ω_{SE} и, следовательно, амплитуда автоколебаний A_{SE} . Уровни амплитуд для каждого из зна-



Фиг. 8



Фиг. 9

чений A_{SE} обозначены на фиг. 8 горизонтальными отрезками. Если значение γ_1 отрицательно, то может происходить затягивание параметрических колебаний в область низких частот. Существуют такие сочетания γ и μ/β , при которых возможен срыв затянутых колебаний и возбуждение колебаний на другой ветви в области низких частот. В качественном отношении это явление аналогично тому, которое было описано в применении к системам Релея – ДUFFинга и Ван-дер-Поля – ДUFFинга [1, 2].

Качественные выводы, полученные методом гармонического баланса, были проверены численным решением задачи Коши для исходного дифференциального уравнения (4.1). Начальные условия выбирались в соответствии с приближенным решением для предельного цикла в автономной системе. Численное интегрирование проводилось до видимого установления колебаний. Эти колебания довольно близки к синусоидальным, хотя их амплитуды носят нерегулярный характер.

На фиг. 9 приведены результаты интегрирования при $\beta=0,1$; $\mu=0,3$; $\gamma=0,5$. Верхняя кривая отвечает максимальным значениям амплитуд на стадии квазиустановившихся колебаний, нижняя – минимальным значениям. Величина расхождения между этими кривыми характеризует степень нерегулярности колебаний. На кривых отчетливо видны два максимума, соответствующих параметрическому захватыванию в сторону больших частот. Нерегулярность колебаний особенно велика в окрестности нижних границ захватывания.

Автор благодарит М. Ю. Панова, В. М. Силкина и А. В. Чернова за помощь в вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конопенко В. О., Ковальчук П. С. Воздействие параметрического возбуждения на автоколебательную систему. – Прикл. механика, 1974, т. 7, № 6, с. 3–10.
2. Tondt A. Parametric vibration of a nonlinear system. – Ing-Arch., 1976, В. 45, Н. 5/6, S. 317–324.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
4. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
5. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.I.1985