МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1985

УДК 539.376

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПЛАСТИН ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

ЦВЕЛОДУБ И. Ю.

Исследуются некоторые обратные задачи, связанные с нахождением внешних воздействий, необходимых для получения в условиях ползучести за наперед заданное время требуемой остаточной формы пластины. Подобные задачи возникают, например, при расчете технологического оборудования для обработки материалов давлением в режиме ползучести [1]. Полные деформации складываются из упругих и деформаций ползучести. Для рассматриваемых классов обратных задач доказываются теоремы единственности решения как в случае малых, так и больших прогибов.

Для решения одной из исследуемых задач (релаксационной) в случае несжимаемого неупрочняющегося при ползучести материала пластины предложен основанный на методе возмущений алгоритм, сходимость которого иллюстрируется на примере.

1. Рассмотрим пластину постоянной толщины h, нагруженную нормальными к ее поверхности силами. Введем в срединной плоскости декартову систему координат x_k $(k=1, 2)$, ось z направим перпендикулярно этой плоскости. Область, занятую пластиной, обозначим через S, контур пластины — через γ. Считаем, что прогиб $w=w(x_1, x_2)$ мал в сравнении с толщиной.

Для полных деформаций пластинки имеем [2, 3]:

$$\varepsilon_{kl}=-z\partial^2 w/\partial x_k\partial x_l \quad (k,\ l=1, 2) \tag{1.1}$$

Уравнения равновесия имеют вид [2, 3]:

$$Q_k=\partial M_{kl}/\partial x_l,\quad \partial Q_k/\partial x_k=-q \tag{1.2}$$

$$Q_k=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{3k}\,dz,\qquad M_{kl}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{kl}z\,dz\quad (k, l=1,2)$$

Здесь Q_k, M_{kl} — перерезывающие силы и моменты, q — интенсивность внешней нагрузки, σ_{kl} — компоненты тензора напряжений (в дальнейшем по повторяющимся индексам производится суммирование от единицы до двух).

При доказательстве необходимых теорем будем использовать формулу, являющуюся аналогом известного уравнения виртуальных работ [4]. Для ее получения вычислим работу напряжений σ_{kl} на деформациях ε_{kl} во всей пластине, не предполагая между этими величинами взаимосвязи

$$A\equiv\int\limits_{-h/2}^{h/2}\int\limits_S\sigma_{kl}\varepsilon_{kl}\,dx_1\,dx_2\,dz=-\int\limits_S M_{kl}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k\,\partial x_l}\,dx_1\,dx_2 \tag{1.3}$$

Последнее равенство в (1.3) имеет место в силу (1.1). На основании

(1.2) получаем соотношение

$$M_{kl}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k\,\partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left(M_{kl}\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(w\frac{\partial M_{kl}}{\partial x_l}\right)-qw$$

подстановка которого в (1.3) и переход к интегрированию по контуру γ дают

$$A=\int_\gamma\left(\frac{\partial M_{kl}}{\partial x_l}n_k w-M_{kl}\frac{\partial w}{\partial x_k}n_l\right)ds+\int_S qw\,dx_1\,dx_2 \tag{1.4}$$

где n_k $(k=1,\,2)$ — компоненты единичного вектора внешней к γ нормали.

Используя известные формулы перехода от дифференцирования по x_1 и x_2 к дифференцированию по n и s (s — длина дуги контура γ), после преобразований из (1.4) получим

$$A=\int_\gamma\left[\left(Q+\frac{\partial H}{\partial s}\right)w-G\frac{\partial w}{\partial n}\right]ds+\int_S qw\,dx_1\,dx_2 \tag{1.5}$$

$$Q=Q_k n_k,\ H=M_{kl}n_k t_l,\ G=M_{kl}n_k n_l$$

где t_k $(k=1,\,2)$ — компоненты единичного касательного к γ вектора, положительное направление которого выбирается таким образом, что при обходе области S последняя остается слева.

Равенство (1.5) является искомым уравнением виртуальных работ, оно справедливо для любых никак не связанных между собой величин σ_{kl} и ε_{kl} (а также для любых их производных по времени t), при этом ε_{kl} и w (или их любые производные по t) связаны соотношениями (1.1), а Q_k, M_{kl} и q (или их любые производные по t) — соотношениями (1.2) $(k,\ l=1,2)$. При помощи (1.5) можно доказать теорему единственности решения задач изгиба при ползучести, когда определяющие уравнения деформирования материала пластины с ограничением в виде неравенства, выражающего постулат устойчивости Друккера, имеют вид [5]. При этом в качестве граничных условий на γ можно задать следующие четыре комбинации: w и $\partial w/\partial n$ (при защемлении $w=\partial w/\partial n=0$); w и G (при свободном опирании $w=G=0$); G и $Q+\partial H/\partial s$ (на свободном краю $G=Q+\partial H/\partial s=0$); $\partial w/\partial n$ и $Q+\partial H/\partial s$. Доказательство указанной теоремы повторяет рассуждения из [5, 6], поэтому здесь не приводится.

Сформулируем две обратные задачи изгиба при ползучести, связанные с получением за заданное время t_* заданной формы пластины.

Задача 1 (*релаксационная*). Какие прогибы $w_0=w_0(x_1,\ x_2)$ нужно мгновенно (упруго) сообщить пластине при $t=0$ и затем в течение времени t_* оставлять их фиксированными, с тем, чтобы в момент снятия внешних нагрузок при $t=t_*$ получить заданные значения остаточных прогибов $w_{**}=w_{**}(x_1,\ x_2)$?

Задача 2. Какие постоянные при $0\leqslant t<t_*$ нагрузки $q=q(x_1,\ x_2)$ нужно приложить к пластине, так, чтобы при $t=t_*$ после их мгновенного снятия получить заданные значения остаточных прогибов $w_{**}=w_{**}(x_1,\ x_2)$?

При этом предполагается, что в обеих задачах выполняются граничные условия одного из указанных выше четырех типов, причем в момент разгрузки при $t=t_*$ они не меняются. При $t<0$ пластина находилась в естественном недеформированном состоянии. Определяющие уравнения деформирования материала пластины имеют вид (1.1)—(1.4) [5].

Докажем, что если решения задач 1,2 существуют, то при указанных условиях они будут единственны.

Задача 1. Рассмотрим процесс деформирования пластины при $0\leqslant t<t_*$, когда прогибы w_0 фиксированы. Пусть существуют два решения, удовлетворяющие одним и тем же граничным условиям, соответствующие им разности будем обозначать Δ. Так как $\Delta\dot{w}_0=0$ (точка означает дифференцирование по t) и в силу соответствующих нулевых граничных условий, из

(1.5) для разности двух решений получим

$$\int_{-h/2}^{h/2}\int_S \Delta\sigma_{kl}\Delta\dot{\varepsilon}_{kl}\, dx_1\, dx_2\, dz=0 \tag{1.6}$$

Поле напряжений, возникающих в пластине, в любой момент времени представим в виде $\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^e+\rho_{kl}$, где σ_{kl}^e — компоненты напряжений, соответствующих решению чисто упругой задачи при текущих значениях внешних нагрузок q и при тех же граничных условиях, ρ_{kl} — компоненты остаточных напряжений, т. е. напряжений, которые возникли бы в пластине после снятия текущих внешних нагрузок q и соответствующей упругой разгрузки (k, $l=1, 2$) [4, 7].

Поле ρ_{kl} (как и его производные по t) удовлетворяет уравнениям равновесия (1.2) при $q=0$ [7]. Вследствие сказанного и на основании соотношений (1.1), (1.2) из [5] равенство (1.6) примет вид

$$\int_{-h/2}^{h/2}\int_S [a_{klmn}(\Delta\dot{\sigma}_{mn}^{e}\Delta\sigma_{kl}^e+\Delta\dot{\rho}_{mn}\Delta\rho_{kl})+\Delta\eta_{kl}\,\Delta\sigma_{kl}]dx_1\, dx_2\, dz=0 \tag{1.7}$$

поскольку

$$\int_{-h/2}^{h/2}\int_S a_{klmn}\,\Delta\dot{\sigma}_{mn}^{e}\,\Delta\rho_{kl}\, dx_1\, dx_2\, dz=\int_{-h/2}^{h/2}\int_S a_{klmn}\,\Delta\dot{\rho}_{mn}\,\Delta\sigma_{kl}^e\, dx_1\, dx_2\, dz=0$$

так как поля $\Delta\varepsilon_{kl}^e=a_{klmn}\Delta\sigma_{mn}^e$, $\Delta\dot{\varepsilon}_{kl}^{e}=a_{klmn}\Delta\dot{\sigma}_{mn}^{e}$ являются совместными, соответствующими решению чисто упругой задачи.

Интегрируя (1.7) по времени от 0 до t_* и учитывая, что $\Delta\rho_{kl}=0$ при $t=0$, получим

$$\int_{-h/2}^{h/2}\int_S\left[\frac{1}{2}a_{klmn}\,\Delta\rho_{mn*}\Delta\rho_{kl*}+\int_0^{t_*}\Delta\eta_{kl}\,\Delta\sigma_{kl}\,dt\right]dx_1\, dx_2\, dz= \tag{1.8}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_S a_{klmn}(\Delta\overset{e}{\sigma}_{mn0}\,\Delta\overset{e}{\sigma}_{kl0}-\Delta\overset{e}{\sigma}_{mn*}\,\Delta\overset{e}{\sigma}_{kl*})\,dx_1\, dx_2\, dz\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-h/2}^{h/2}\int_S a_{klmn}(\Delta\overset{e}{\sigma}_{mn0}-\Delta\overset{e}{\sigma}_{mn*})\,\Delta\overset{e}{\sigma}_{kl0}\,dx_1\, dx_2\, dz=$$

$$=\int_{-h/2}^{h/2}\int_S\Delta(\overset{e}{\varepsilon}_{kl0}-\overset{e}{\varepsilon}_{kl*})\,\Delta\overset{e}{\sigma}_{kl0}\,dx_1\, dx_2\, dz=\int_S\Delta w_{**}\,\Delta q_0\,dx_1\, dx_2=0$$

При выводе (1.8) использовано известное неравенство для упругого потенциала [4]:

$$a_{klmn}x_{mn0}x_{kl0}-a_{klmn}x_{mn*}x_{kl*}\leqslant 2a_{klmn}(x_{mn0}-x_{mn*})\,x_{kl0} \tag{1.9}$$

справедливое для любых двух наборов чисел x_{kl0}, x_{kl*} (k, $l=1, 2$). Начальному полю деформаций $\overset{e}{\varepsilon}_{kl0}=a_{klmn}\overset{e}{\sigma}_{mn0}$ соответствуют прогибы w_0, которые остаются фиксированными при $0\leqslant t<t_*$. Поле деформаций $\overset{e}{\varepsilon}_{kl*}=a_{klmn}\overset{e}{\sigma}_{mn*}$ определяется из решения упругой задачи при внешних нагрузках в момент $t=t_*$, ему соответствует прогиб w_*. При снятии нагрузок при $t=t_*$

в пластине останутся поля напряжений и деформаций, равные разности текущих значений и упругих $\overset{e}{\sigma}_{kl*}$ и $\overset{e}{\varepsilon}_{kl*}$ [4, 7] (в этот момент остаточные прогибы $w_{**}=w_0-w_*$, причем они являются заданными, т. е. $\Delta w_{**}=0$).

Из свойств упругого потенциала и из постулата Друккера [5] вытекает, что соотношение (1.8) возможно только при $\Delta\sigma_{kl}=0$ для любого момента $0\leqslant t<t_*$ и при $\Delta\rho_{kl*}=0$, отсюда и $\Delta\overset{l}{\varepsilon}_{kl0}=0$, т. е., как следует из (1.1), начальный прогиб $w_0=w_0(x_1, x_2)$ будет определяться с точностью до линейной функции координат x_1 и x_2. Видно, что эта функция будет тождественно равна нулю, если на контуре γ (или на его части) заданы величины прогибов, как в случае первого или второго граничных условий. Утверждение доказано.

Задача 2. Поскольку при $0\leqslant t<t_*$ нагрузки q постоянны, т. е. $\Delta q^{\cdot}=0$, то в силу соответствующих нулевых граничных условий для разности двух решений из (1.5) найдем

$$\int_{-h/2}^{h/2}\int_S \Delta\sigma_{kl}^{\cdot}\,\Delta\varepsilon_{kl}\,dx_1\,dx_2\,dz=0 \tag{1.10}$$

Интегрируя равенство (1.10) по t от нуля до t_* и используя процедуру интегрирования по частям и равенства $\sigma_{kl}^e=\mathrm{const}$, т. е. $\sigma_{kl}^{e\cdot}=0$, нетрудно получить

$$I_1-I_2=0,\qquad I_1=\int_{-h/2}^{h/2}\int_S (a_{klmn}\Delta\rho_{mn*}\Delta\rho_{kl*}+\Delta\sigma_{kl*}\Delta\overset{c}{\varepsilon}_{kl*})\,dx_1\,dx_2\,dz$$

$$I_2=\int_{-h/2}^{h/2}\int_S\left[\frac{1}{2}a_{klmn}\,\Delta\rho_{mn*}\,\Delta\rho_{kl*}+\int_0^{t_*}\Delta\sigma_{kl}\,\Delta\eta_{kl}\,dt\right]dx_1\,dx_2\,dz$$

Величину I_1 можно представить в форме

$$I_1=\int_{-h/2}^{h/2}\int_S \Delta\varepsilon_{kl**}\,\Delta\sigma_{kl*}\,dx_1\,dx_2\,dz,\qquad \Delta\varepsilon_{kl**}=a_{klmn}\,\Delta\rho_{mn*}+\Delta\overset{c}{\varepsilon}_{kl*}$$

где $\Delta\varepsilon_{kl**}$ — разность полей остаточных деформаций, возникающих в пластине при $t=t_*$ после снятия внешних нагрузок q. Из (1.5) следует, что $I_1=\int\Delta w_{**}\Delta q\,dx_1dx_2=0$. Таким образом, должно быть $I_2=0$, что возможно только при $\Delta\rho_{kl*}=0$ и $\Delta\sigma_{kl}=0$ при любом $0\leqslant t<t_*$, отсюда и $\Delta q=0$. Утверждение доказано.

2. Рассмотрим случай, когда прогибы пластины могут значительно превышать ее толщину; тогда вместо (1.1) будем иметь (u_k ($k=1, 2$) — компоненты перемещений в плоскости пластины):

$$\varepsilon_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x_k}\frac{\partial w}{\partial x_l}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x_k\,\partial x_l}\quad (k, l=1, 2) \tag{2.1}$$

Уравнения равновесия запишутся [2]:

$$\frac{\partial N_{kl}}{\partial x_k}+X_l=0\qquad (l=1, 2),\qquad \frac{\partial^2 M_{kl}}{\partial x_k\,\partial x_l}=-q-N_{kl}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k\,\partial x_l},\qquad N_{kl}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{kl}\,dz \tag{2.2}$$

где N_{kl} — мембранные усилия, X_k — касательные составляющие внешней нагрузки (k, $l=1, 2$).

Сформулируем обратную релаксационную задачу, аналогичную рассмотренной.

Задача 3. Какие прогибы $w_0=w_0(x_1, x_2)$ необходимо мгновенно (упруго) сообщить пластине при $t=0$, а затем при $0\leqslant t<t_*$ оставлять фиксированными все перемещения ее точек (т. е. $w^{\cdot}=u_k^{\cdot}=0$ $(k=1, 2)$), а следовательно, и все компоненты деформаций, для того, чтобы при $t=t_*$ после снятия внешних нагрузок (после упругой разгрузки) получить заданные значения остаточных прогибов $w_{**}=w_{**}(x_1, x_2)$?

Считается, что при $t=0$ начальный прогиб w_0 вызывается только действием сил q, нормальных к плоскости пластины (т. е. $X_k=0$ $(k=1, 2)$ при $t=0$), и в течение всего процесса деформирования, в том числе и при разгрузке, края пластины жестко защемлены, т. е. $u_k=w=\partial w/\partial n=0$ $(k=1, 2)$ на γ. При $t<0$ пластина находилась в естественном недеформированном состоянии.

Кроме того, предполагаем, что время t_* достаточно велико, так что величина упругого восстановления (по терминологии [1]) $w_*=w_0-w_{**}$ мала, поэтому в выражениях (2.1) для полных деформаций при $0\leqslant t<t_*$ членами $^1/_2\partial w_*/\partial x_k\partial w_*/\partial x_l$ можно пренебречь по сравнению с $^1/_2\partial w_{**}/\partial x_k\partial w_{**}/\partial x_l$ $(k, l=1, 2)$ (члены, линейные по $\partial w_*/\partial x_k$, $\partial^2 w_*/\partial x_k\partial x_l$, в (2.1) сохраняются). Тогда из (2.1) при $0\leqslant t<t_*$ найдем

$$\varepsilon_{kl0}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{k0}}{\partial x_l}+\frac{\partial u_{l0}}{\partial x_k}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial w_{**}}{\partial x_k}\frac{\partial w_{**}}{\partial x_l}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{**}}{\partial x_k}\frac{\partial w_*}{\partial x_l}+\frac{\partial w_{**}}{\partial x_l}\frac{\partial w_*}{\partial x_k}\right)-z\frac{\partial^2(w_*+w_{**})}{\partial x_k\,\partial x_l}\qquad (k, l=1, 2)\qquad (2.3)$$

Докажем, что если существует решение задачи 3 для пластины, определяющие уравнения деформирования которой имеют вид (1.1)—(1.4) [5], то при сделанных предположениях оно будет единственным.

Поскольку при $0\leqslant t<t_*$ деформации пластины остаются фиксированными, то для разности двух решений будем иметь равенство (1.6), интегрируя которое по t от нуля до t_* и применяя затем неравенство (1.9), получим

$$I_3=I_4\leqslant I_5,\quad I_3=\int_0^{t_*}\int_{-h/2}^{h/2}\int_S\Delta\sigma_{kl}\,\Delta\eta_{kl}\,dx_1\,dx_2\,dz\,dt$$

$$I_4=\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_S a_{klmn}(\Delta\sigma_{mn0}\,\Delta\sigma_{kl0}-\Delta\sigma_{mn*}\,\Delta\sigma_{kl*})\,dx_1\,dx_2\,dz$$

$$I_5=\int_{-h/2}^{h/2}\int_S a_{klmn}(\Delta\sigma_{mn0}-\Delta\sigma_{mn*})\,\Delta\sigma_{kl0}\,dx_1\,dx_2\,dz$$

Индексы нули и звездочки относятся к величинам при $t=0$ и $t=t_*$ до и после разгрузки соответственно.

Разности деформаций и напряжений до и после разгрузки при $t=t_*$ связаны между собой законом Гука [7], т. е. $\varepsilon_{kl*}-\varepsilon_{kl**}=a_{klmn}(\sigma_{mn*}-\rho_{mn*})$, причем $\varepsilon_{kl*}=\varepsilon_{kl0}=a_{klmn}\sigma_{mn0}$, отсюда $a_{klmn}(\sigma_{mn0}-\sigma_{mn*})=\varepsilon_{kl**}-a_{klmn}\rho_{mn*}$ $(k, l=1, 2)$ и для величины I_5 в силу равенств $a_{klmn}=a_{mnkl}$ найдем

$$I_5=\int_{-h/2}^{h/2}\int_S(\Delta\varepsilon_{kl**}\,\Delta\sigma_{kl0}-\Delta\varepsilon_{kl0}\,\Delta\rho_{kl*})\,dx_1\,dx_2\,dz$$

Поле ε_{kl**} выражается через u_{k**} и w_{**} при помощи соотношений типа (2.1); усилия и моменты, соответствующие полям σ_{kl0} и ρ_{kl*}, удовлетворяют системе уравнений (2.2), причем $X_{k0}=X_{k**}=q_{**}=0$ $(k=1, 2)$. Поскольку $w_{**}=w_{**}(x_1, x_2)$ — заданная функция, то

$$\Delta\varepsilon_{kl**}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta u_{k**}}{\partial x_l}+\frac{\partial\Delta u_{l**}}{\partial x_k}\right),\qquad \Delta\varepsilon_{kl0}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta u_{k0}}{\partial x_l}+\frac{\partial\Delta u_{l0}}{\partial x_k}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{**}}{\partial x_k}\frac{\partial\Delta w_*}{\partial x_l}+\frac{\partial w_{**}}{\partial x_l}\frac{\partial\Delta w_*}{\partial x_k}\right)-z\frac{\partial^2\Delta w_*}{\partial x_k\,\partial x_l}\quad (k, l=1, 2)$$

С учетом этих равенств и сделанных замечаний и в силу симметрии компонент тензоров напряжений получим

$$I_5=\int\limits_S\left[\frac{\partial\Delta u_{k**}}{\partial x_l}\Delta N_{kl0}-\left(\frac{\partial\Delta u_{k0}}{\partial x_l}+\frac{\partial w_{**}}{\partial x_k}\frac{\partial\Delta w_*}{\partial x_l}\right)\Delta N_{kl**}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\Delta w_*}{\partial x_k\,\partial x_l}\Delta M_{kl**}\right]dx_1\,dx_2=\int\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\Delta u_{k**}\,\Delta N_{kl0}-\right.\right.$$

$$\left.-\Delta u_{k0}\,\Delta N_{kl**}-\Delta w_*\,\Delta N_{kl**}\frac{\partial w_{**}}{\partial x_k}\right)+\Delta w_*\,\Delta N_{kl**}\frac{\partial^2 w_{**}}{\partial x_k\,\partial x_l}+$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Delta w_*}{\partial x_l}\Delta M_{kl**}\right)-\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\Delta w_*\frac{\partial\Delta M_{kl**}}{\partial x_k}\right)+\Delta w_*\frac{\partial^2\Delta M_{kl**}}{\partial x_k\,\partial x_l}\right]dx_1\,dx_2 \tag{2.4}$$

Из третьего уравнения (2.2) следует равенство $\partial^2\Delta M_{kl**}/\partial x_k\partial x_l+$ $+\Delta N_{kl**}\partial^2 w_{**}/\partial x_k\partial x_l=0$, учитывая которое и переходя с помощью известной формулы Грина от интегрирования по области S к интегрированию по контуру γ, найдем

$$I_5=\int\limits_\gamma\left[\Delta u_{k**}\,\Delta p_{k0}-\Delta u_{k0}\,\Delta p_{k**}-\Delta w_* n_l\left(\Delta N_{kl**}\frac{\partial w_{**}}{\partial x_k}+\frac{\partial\Delta M_{kl**}}{\partial x_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\Delta w_*}{\partial x_l}\Delta M_{kl**}n_k\right]ds=\int\limits_\gamma\left[\Delta u_{k**}\,\Delta p_{k0}-\Delta u_{k0}\,\Delta p_{k**}-\right.$$

$$\left.-\Delta w_*\left(\Delta p_{k**}\frac{\partial w_{**}}{\partial x_k}+\Delta Q_{**}+\frac{\partial\Delta H_{**}}{\partial s}\right)+\Delta G_{**}\frac{\partial\Delta w_*}{\partial n}\right]ds \tag{2.5}$$

В последнем равенстве осуществлен переход от дифференцирования по x_1 и x_2 к дифференцированию по n и s, $p_k=N_{kl}n_l$ $(k=1, 2)$ — компоненты внешних усилий, приложенных к контуру γ и лежащих в плоскости пластины.

В силу принятых граничных условий $I_5=0$. Таким образом, $I_3\leqslant 0$, что возможно только при $\Delta\sigma_{kl}=0$ $(0\leqslant t<t_*)$ [5]; отсюда и $\Delta\varepsilon_{kl0}=a_{klmn}\Delta\sigma_{mn0}=0$ $(k, l=1, 2)$. При известных деформациях и граничных условиях $w_0=u_{k0}=0$ $(k=1, 2)$ на γ, из (2.1) однозначно определяются величины w_0 и u_{k0} $(k=$ $=1, 2)$. Утверждение доказано.

Отметим, что, как видно из (2.5), вместо условий жесткого защемления контура пластины при $0\leqslant t\leqslant t_*$ в качестве граничных условий можно принять, например, следующие: $p_{k0}=p_{k**}=G_{**}=Q_{**}+\partial H_{**}/\partial s=0$ на γ, что соответствует отсутствию мембранных усилий при $t=0$ и полностью свободному от внешних нагрузок контуру после разгрузки при $t=t_*$, а также некоторые другие комбинации граничных условий, при которых $I_5=0$. Во всех этих случаях будет иметь место единственность решения рассмотренной релаксационной задачи, по крайней мере, с точностью до смещения пластины как жесткого целого.

3. Исследуем обратную релаксационную задачу (задачу 3) изгиба пластины, материал которой является изотропным несжимаемым и подчиняющимся степенному закону ползучести [3]. В этом случае для полных де-

формаций будем иметь

$$\varepsilon_{kl}=\frac{3}{2}\frac{\sigma_{kl}{}^0}{E}+\frac{3}{2}B\int_0^t\sigma_i^{n-1}\sigma_{kl}{}^0\,dt\quad(k,l=1,2)\tag{3.1}$$

где E — модуль Юнга, B, n — константы ползучести, причем n — натуральное число, большее единицы, что обеспечивает выполнимость постулата устойчивости Друккера [8], $\sigma_{kl}{}^0$ — компоненты девиатора напряжений, $\sigma_i=(^3/_2\sigma_{kl}{}^0\sigma_{kl}{}^0)^{1/2}$ — интенсивность напряжений.

Поскольку $\dot\varepsilon_{kl}=0$ $(k, l=1, 2)$ при $0\leqslant t<t_*$, то из (3.1) можно получить

$$\sigma_{kl*}=f\sigma_{kl0},\quad f=\left[1+\left(\frac{\sigma_{i0}}{\delta}\right)^{n-1}\right]^{\varkappa},\quad \delta=[BE(n-1)\sigma^{n-1}t_*]^{\varkappa},\quad \varkappa=-\frac{1}{n-1}\tag{3.2}$$

где σ_{i0} — безразмерная величина интенсивности напряжений при $t=0$, отнесенная к некоторой характерной величине $\sigma>0$.

Равенства (3.2) необходимо дополнить соотношениями закона Гука для ε_{kl0} и σ_{kl0} (ε_{kl0} определены в (2.3)):

$$\varepsilon_{kl0}={}^3/_2\overset{0}{\sigma}_{kl0}/E\quad(k,l=1,2)\tag{3.3}$$

уравнениями упругой разгрузки [7] (где ε_{kl**} выражаются через u_{k**} и w_{**} согласно (2.1)):

$$\varepsilon_{kl*}-\varepsilon_{kl**}=\varepsilon_{kl0}-\varepsilon_{kl**}={}^3/_2(\overset{0}{\sigma}_{kl*}-\overset{0}{\rho}_{kl*})/E\quad(k,l=1,2)\tag{3.4}$$

и уравнениями равновесия при $t=0$ и $t=t_*$ (после разгрузки):

$$\frac{\partial N_{kl0}}{\partial x_k}=\frac{\partial N_{kl**}}{\partial x_k}=0\quad(l=1,2),\qquad \frac{\partial^2M_{kl**}}{\partial x_k\,\partial x_l}=-N_{kl**}\frac{\partial^2w_{**}}{\partial x_k\,\partial x_l}\tag{3.5}$$

Соотношения (3.2)—(3.5) представляют собой систему уравнений для нахождения 14 неизвестных: u_{k0}, u_{k**}, w_*, σ_{kl0}, σ_{kl*} и ρ_{kl*} $(k, l=1, 2)$. Ее интегрирование (даже численное) в общем случае весьма затруднительно.

Для решения рассматриваемой задачи в случае достаточно большого времени выдержки t_* может быть применен метод возмущений [9]. Действительно, из (3.2) следует, что $\sigma_{kl*}\to0$ $(k, l=1, 2)$ при $t_*\to\infty$. Тогда, как видно из (3.4), $w_*\to0$ при $t_*\to\infty$, т. е. при больших значениях t_* величина остаточного (заданного) прогиба w_{**} будет приближаться к величине начального (искомого) прогиба w_0. Это позволяет искать выражение для w_0 в виде: $w_0=w_{**}+\delta w_{*1}+\delta^2w_{*2}+\ldots$, где δ — малый параметр, определенный в (3.2), причем $\delta\to0$ при $t_*\to\infty$. Тогда для функции f из (3.2) получим разложение

$$f=\frac{\delta}{\sigma_{i0}}-\frac{1}{n-1}\left(\frac{\delta}{\sigma_{i0}}\right)^n+\frac{n}{2(n-1)^2}\left(\frac{\delta}{\sigma_{i0}}\right)^{2n-1}+\ldots\tag{3.6}$$

Применяя обычную методику [9], величины всех неизвестных напряжений и перемещений представляем в виде рядов по степеням δ, выделяя затем в (3.2)—(3.6) члены при одинаковых степенях. В нулевом приближении полагаем $w_0=w_{**}$, а σ_{kl0} и u_{k0} $(k, l=1, 2)$ определяются из (2.3), (3.3) и первых двух уравнений (3.5) с соответствующими граничными условиями, что сведется к решению неоднородной (вследствие наличия членов $^1/_2\partial w_{**}/\partial x_k\partial w_{**}/\partial x_l$ в (2.3)) плоской задачи теории упругости в напряжениях или перемещениях.

Как следует из (3.2) и (3.6), при $\delta\to0$ величины σ_{kl*} являются малыми первого, а σ_{kl0} — нулевого порядков $(k, l=1, 2)$. Поэтому для любого приближения компоненты σ_{kl*} будут известны из предыдущих приближений, что существенно упрощает задачу, поскольку она сводится к последовательному решению линейных относительно неизвестных величин систем уравнений.

Процедура получения из (3.2)—(3.6) систем уравнений соответствующих приближений очевидна [9]. Не выписывая ввиду громоздкости их в общем случае, в качестве простейшего примера рассмотрим задачу о деформировании длинной полосы ширины a, когда $w_{**}=w_{**}(x)$ и все величины зависят только от одной координаты x, перемещения в направлении второй оси равны нулю. Система (3.2)—(3.6) сведется к следующей:

$$\sigma_*=\sigma_0[1+(\sigma_0/\delta_1)^{n-1}]^{\varkappa}, \qquad \delta_1=[BE(n-1)(\sqrt{3}/2\sigma)^{n-1}t_*]^{\varkappa} \tag{3.7}$$

$$u_0'+{}^1/_2(w_{**}')^2+w_{**}'w_*'-z(w_*''+w_*'')={}^3/_4\sigma\sigma_0/E$$

$$N_0=\text{const}, \quad u_0'-u_{**}'+w_{**}'w_*'-zw_{**}''={}^3/_4\sigma(\sigma_*-\rho_*)/E$$

$$N_{**}=\text{const}, \quad M_{**}''=-N_{**}w_{**}''$$

В (3.7) величины всех напряжений, усилий и моментов отнесены к σ; штрих означает дифференцирование по x.

В качестве граничных условий примем: $u_0=u_{**}=w_*=M_{**}=0$ при $x=0$, a, что обеспечивает, как видно из (2.5), единственность решения поставленной задачи.

Для величины σ_* из (3.7) получим

$$\sigma_*=\delta_1-\delta_1^n\frac{1}{(n-1)}\frac{1}{\sigma_0^{n-1}}+\delta_1^{2n-1}\frac{n}{2(n-1)^2}\frac{1}{\sigma_0^{2n-2}}+\ldots \tag{3.8}$$

Для нулевого приближения, соответствующего $\delta_1=0$, из (3.7) имеем

$$w_*=0, \qquad u_0=u_{**}=\frac{x}{2a}\int_0^a(w_{**}')^2\,dx-\frac{1}{2}\int_0^x(w_{**}')^2\,dx$$

$$\sigma_0=\frac{4E}{3\sigma}\left[\frac{1}{2a}\int_0^a(w_{**}')^2\,dx-zw_{**}''\right]$$

Найдем последующие приближения. Пусть для определенности $n=3$, $w_{**}=\alpha x(a-x)$. Тогда $\sigma_0={}^4/_3E\alpha({}^1/_6\alpha a^2+2z)/\sigma$. Величину σ выберем из условия: $\max\sigma_0=1$, т. е. $\sigma={}^4/_3E\alpha({}^1/_6\alpha a^2+h)$, откуда $\sigma_0=(\alpha a^2+12z)/(\alpha a^2+6h)$. Кроме того, считаем, что $\sigma_0>0$ всюду в пластине, т. е. $k={}^1/_6\alpha a^2/h={}^2/_3\max w_{**}/h>1$.

Из (3.7), (3.8) для приближений, не выше третьего, нетрудно получить

$$u_{0i}/\sigma=({}^1/_{60}\alpha^2a^5N_{**i}/D)(2\xi-3)(2\xi+1)-{}^1/_3\alpha a^3M_{*i}/D]\,\xi(\xi-1)(2\xi-1)$$

$$u_{**i}=0, \qquad w_{*i}/\sigma=[{}^1/_{12}\alpha a^4N_{**i}(\xi^2-\xi-1)/D-$$
$$-{}^1/_2a^2M_{*i}/D]\,\xi(\xi-1), \qquad N_{**i}=(N_{*i}-12kM_{*i}/h)/A_1$$

$$A_1=1+{}^{72}/_5k^2, \qquad D={}^1/_9Eh^3, \qquad \xi=x/a \quad (0\leqslant\xi\leqslant1)$$

где $i\,(i\leqslant3)$ указывает на номер соответствующего приближения.

Из (3.8) следует, что $\sigma_{*1}=1$, $\sigma_{*2}=0$, $\sigma_{*3}=-{}^1/_2\sigma_0^{-2}$, откуда $N_{*1}=h$, $M_{*1}=N_{*2}=M_{*2}=0$, $N_{*3}=-{}^1/_2h(k+1)/(k-1)$, $M_{*3}={}^1/_8h^2(k+1)^2[2k/(k^2-1)-\ln((k+1)/(k-1))]$.

Таким образом, с учетом трех приближений для величины w_0, отнесенной к $\max w_{**}={}^1/_4\alpha a^2$, получим

$$\frac{w_0}{\max w_{**}}=4\xi(1-\xi)\left\{1+\frac{6k(k+1)}{A_1}\delta_1(1+\xi-\xi^2)-\right. \tag{3.9}$$

$$-3(k+1)^2\delta_1^3\left[\frac{k}{A_1}\left(\frac{6k^2+1}{k-1}-3k(k+1)\ln\frac{k+1}{k-1}\right)(1+\xi-\xi^2)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{k+1}{4}\left(\frac{2k}{k^2-1}-\ln\frac{k+1}{k-1}\right)\right]\right\}+\ldots$$

Вычисления при различных $k>1$ показывают хорошую сходимость первых приближений, причем она тем лучше, чем больше величина k. Так, для $k=10$, что соответствует $\max w_{**}=15h$, при $\delta_1\leqslant 0{,}29$ учет третьего приближения в (3.9) дает поправку к величине $w_0/\max w_{**}$, не превосходящую 1%. С учетом первых трех приближений из (3.9) при $\xi=0{,}5$ получим $\max w_0=1{,}156\max w_{**}$ при $\delta_1=0{,}29$, $k=10$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горев Б. В., Клопотов И. Д., Раевская Г. А., Соснин О. В.* К вопросу обработки материалов давлением в режиме ползучести.– ПМТФ, 1980, № 5, с. 185–191.
2. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
3. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. *Койтер В. Т.* Общие теоремы теории упругопластических сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 79 с.
5. *Цвелодуб И. Ю.* К теории ползучести упрочняющихся материалов.– Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 3, с. 94–101.
6. *Цвелодуб И. Ю.* К теории нелинейной вязкоупругости.– Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 2, с. 70–75.
7. *Лепик Ю. Р.* Определение остаточного прогиба и остаточных усилий при разгружении гибких упругопластических пластинок.– Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 3, с. 154–157.
8. *Цвелодуб И. Ю.* О построении определяющих уравнений установившейся ползучести.– Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 104–110.
9. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
15.VIII.1984