

УДК 539.376

О КРУЧЕНИИ КОНИЧЕСКИХ ТРУБ

АРУТЮНЯН Н. Х.

В публикуемой работе даются точные решения задач о кручении однородных и неоднородных конических труб, находящихся в условиях установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и скоростями деформации. Отметим, что полученные здесь точные решения полностью переносятся на задачи пластического кручения однородных и неоднородных конических труб со степенным упрочнением материала. Некоторые задачи упругопластического кручения валов переменного диаметра, а также валов в условиях установившейся ползучести рассматривались в [1-13].

1. Кручение однородных конических труб. Рассмотрим задачу о кручении однородной конической трубы в условиях установившейся ползучести. Считая процесс деформирования квазистатическим, влиянием сил инерции будем пренебрегать. Предположим, что внутренняя и внешняя боковые поверхности трубы свободны от напряжений, а на ее торцах действуют крутящие моменты величины M . Массовые силы отсутствуют. Задача исследуется в случае малых деформаций.

Введем цилиндрическую систему координат $r\theta z$, ось z которой совпадает с осью трубы (фиг. 1). Единичные векторы цилиндрической системы координат обозначим через e_r, e_θ, e_z .

Пусть компоненты девиатора тензора напряжений s_{ij} и компоненты девиатора тензора скоростей деформаций e_{ij} связаны соотношением

$$s_{ij} = f(\Gamma) e_{ij}, \quad f(\Gamma) = K\Gamma^{\mu-1} \quad (1.1)$$

Здесь $\Gamma = (2e^{ij}e_{ij})^{1/2}$ — интенсивность скоростей деформаций, K, μ — константы материала трубы, определяемые из опытов на простую ползучесть; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Согласно (1.1), интенсивность напряжений $T = (2s^{ij}s_{ij})^{1/2}$ выражается через интенсивность скоростей деформаций по формуле

$$T = f(\Gamma)\Gamma = K\Gamma^\mu \quad (1.2)$$

Будем искать поле скоростей перемещений при кручении в виде

$$v = v_\theta e_\theta, \quad v_\theta = r\psi(r, z) \quad (1.3)$$

где $\psi(r, z)$ — подлежащая определению функция.

Из (1.3) следует, что ненулевые компоненты тензора скоростей деформаций равны

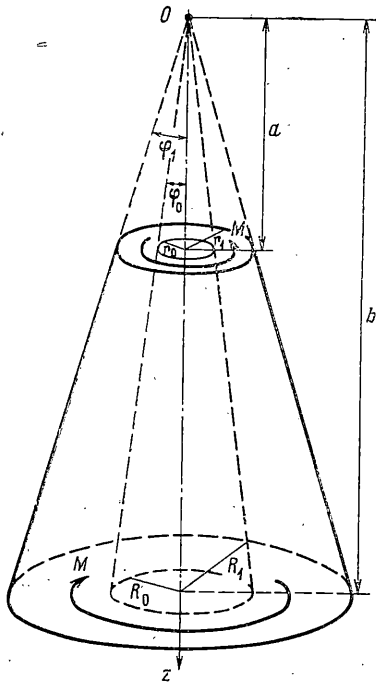
$$e_{12} = e_{21} = 1/2 r \partial \psi / \partial r, \quad e_{23} = e_{32} = 1/2 r \partial \psi / \partial z \quad (1.4)$$

При этом среднее объемное расширение равно нулю; а интенсивность скоростей деформаций Γ определяется по формуле

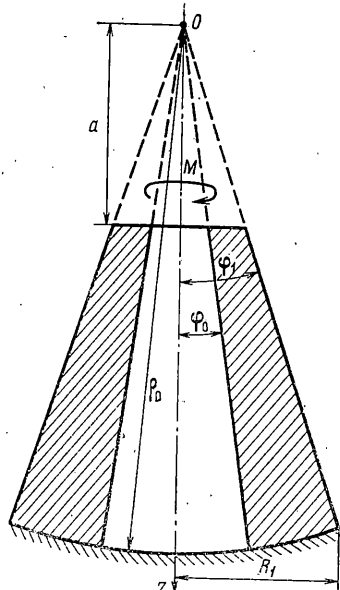
$$\Gamma = r [(\partial \psi / \partial r)^2 + (\partial \psi / \partial z)^2]^{1/2} \quad (1.5)$$

Из (1.4), (1.5) найдем ненулевые компоненты тензора напряжений

$$\sigma^{12} = \sigma^{21} = 1/2 f(\Gamma) \partial \psi / \partial r, \quad \sigma^{23} = \sigma^{32} = 1/2 f(\Gamma) \partial \psi / \partial z \quad (1.6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Выпишем уравнение равновесия для рассматриваемой задачи $\partial(r^3\sigma^{12})/\partial r + \partial(r^3\sigma^{23})/\partial z = 0$. Подставим в это соотношение выражения (1.6). Воспользовавшись (1.1), (1.5), получим дифференциальное уравнение для определения функции скоростей перемещений

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 f(\Gamma) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[r^3 f(\Gamma) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = 0 \quad (1.7)$$

$$f(\Gamma) = Kr^{\mu-1} [(\partial\psi/\partial r)^2 + (\partial\psi/\partial z)^2]^{(\mu-1)/2}$$

Граничные условия для функции ψ определяются на основе заданного распределения напряжений и скоростей перемещений на поверхности трубы.

Условия на торцах трубы будут

$$M = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} r^2 \sigma_{\theta z}(r, a) dr = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} r^2 \sigma_{\theta z}(r, b) dr \quad (1.8)$$

где $\sigma_{\theta r} = r\sigma^{12}$, $\sigma_{\theta z} = r\sigma^{23}$ — физические компоненты тензора напряжений.

Условия на внутренней и внешней поверхностях трубы имеют вид

$$\sigma_{\theta r} \cos \varphi_0 - \sigma_{\theta z} \sin \varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 \geq 0 \quad (1.9)$$

$$\sigma_{\theta r} \cos \varphi_1 - \sigma_{\theta z} \sin \varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 < \pi/2$$

Запишем соотношения (1.9), воспользовавшись (1.6) и очевидными равенствами $\sin \varphi = r(r^2 + z^2)^{-1/2}$, $\cos \varphi = z(r^2 + z^2)^{-1/2}$. Имеем

$$z\partial\psi/\partial r - r\partial\psi/\partial z = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_1 \quad (1.10)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к определению функции скоростей перемещений $\psi(r, z)$ из нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (1.7) при граничных условиях (1.8), (1.10).

Будем искать частное решение уравнения (1.7) в виде

$$\psi(r, z) = \psi_0(y), \quad y = r^2 + z^2 \quad (1.11)$$

При этом имеем

$$\partial\psi/\partial r = \psi_0' 2r, \quad \partial\psi/\partial z = \psi_0' 2z, \quad \psi_0' = d\psi_0/dy \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) во второе соотношение (1.7), получим

$$f(\Gamma) = K 2^{\mu-1} r^{\mu-1} y^{(\mu-1)/2} (\psi_0')^{\mu-1} \quad (1.13)$$

Преобразуя первое уравнение (1.7) с учетом (1.12), (1.13), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial r} [r^{\mu+3} y^{(\mu-1)/2} (\psi_0')^\mu] + \frac{\partial}{\partial z} [r^{\mu+2} z y^{(\mu-1)/2} (\psi_0')^\mu] = 0 \quad (1.14)$$

Вычисляя производные в соотношении (1.14), находим

$$\begin{aligned} (\mu+3)y\psi_0' + (\mu-1)r^2\psi_0' + 2\mu r^2 y \psi_0'' + \\ + y\psi_0' + (\mu-1)z^2\psi_0' + 2\mu z^2 y \psi_0'' = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Сгруппировав в уравнении (1.15) соответственные слагаемые и используя замену $y = r^2 + z^2$, окончательно получим следующее обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами для определения функции $\psi = \psi_0(y)$:

$$2\mu y \psi_0'' + (2\mu+3)\psi_0' = 0 \quad (1.16)$$

При этом граничное условие (1.10) выполняется тождественно.

Таким образом, решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (1.7) свелось к решению линейного обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (1.16).

Общее решение линейного дифференциального уравнения (1.16) определяется формулой

$$\psi_0 = -1/3\mu A^\omega y^{-3\omega/2} + B, \quad \omega = 1/\mu \quad (1.17)$$

где A, B — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий. Величину B найдем из условия отсутствия смещения трубы как жесткого целого.

Пользуясь соотношениями (1.6), с учетом (1.13), (1.17) для физических компонент тензора напряжений получим следующие выражения ($\kappa = (\mu+4)/2$):

$$\sigma_{\theta r} = 1/2 K A r^{\mu+1} (r^2 + z^2)^{-\kappa}, \quad \sigma_{\theta z} = 1/2 K A r^\mu z (r^2 + z^2)^{-\kappa} \quad (1.18)$$

Из (1.8), (1.18) следуют равенства

$$M = \pi K A a \int_{r_0}^{r_1} r^{\mu+2} (r^2 + a^2)^{-\kappa} dr = \pi K A b \int_{R_0}^{R_1} r^{\mu+2} (r^2 + b^2)^{-\kappa} dr \quad (1.19)$$

Сделав замену переменных $r = a \operatorname{tg} \varphi$ в первом интеграле и $r = b \operatorname{tg} \varphi$ во втором интеграле в (1.19), найдем

$$M = \pi K A I, \quad I = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^{\mu+2} \varphi d\varphi \quad (1.20)$$

Подставляя выражение для A из (1.20) в (1.18), получим

$$\sigma_{\theta r} = M r^{\mu+1} (r^2 + z^2)^{-\kappa} / (2\pi I) \quad (1.21)$$

$$\sigma_{\theta z} = M r^\mu z (r^2 + z^2)^{-\kappa} / (2\pi I)$$

Пользуясь выражениями (1.3), (1.11), (1.17) и (1.20), для скорости перемещения v_θ получим следующую формулу:

$$v_\theta = r \{ B - \frac{1}{3} \mu [M / (\pi K I)]^\circ (r^2 + z^2)^{-3\omega/2} \} \quad (1.22)$$

Остальные компоненты напряжений и скоростей перемещений равны нулю. При $\mu=1$ соотношения (1.24), (1.22) переходят в формулы для определения напряжений и перемещений при кручении упругого усеченного конуса [13].

Отметим также, что при $B=0$ формулами (1.21), (1.22) описывается напряженно-деформированное состояние бесконечного усеченного конуса, на торце которого ($z=a$) действует крутящий момент M , а скорость перемещений на бесконечности равна нулю.

Рассмотрим случай, когда коническая труба конечной длины на торце $z=a$ загружена моментом M , а контур $r=R_1$ торца $z=b$ закреплен

$$v_\theta(R_1, b) = 0 \quad (1.23)$$

При этом постоянная B определяется из (1.22) и граничного условия (1.23): $B = \frac{1}{3} \mu [M / (\pi K I)]^\circ (R_1^2 + b^2)^{-3\omega/2}$.

Выражения для напряжений $\sigma_{\theta r}$, $\sigma_{\theta z}$ сохраняют вид (1.24), а выражения для скоростей перемещений будут

$$v_\theta = \frac{1}{3} \mu r [M / (\pi K I)]^\circ [(R_1^2 + b^2)^{-3\omega/2} - (r^2 + z^2)^{-3\omega/2}]$$

Принятие функции скоростей перемещений ψ в форме (1.11) позволяет также решить в замкнутом виде задачу о кручении конической трубы, на плоском торце которой действует крутящий момент M , а скорости перемещений другого торца, поверхность которого представляет собой часть сферы радиуса ρ_0 , равны нулю (сферический торец закреплен). Боковая поверхность трубы считается свободной от нагрузки (фиг. 2).

Поскольку на сферическом торце трубы $r = \rho_0 \sin \varphi$, $z = \rho_0 \cos \varphi$, то из (1.22) и граничного условия $v_\theta|_{\rho=\rho_0} = 0$ имеем $B = \frac{1}{3} \mu [M / (\pi K I \rho_0^3)]^\circ$. Таким образом, для определения скоростей перемещений конической трубы, на плоском торце которой действует крутящий момент M , а сферический торец закреплен, получим следующую формулу:

$$v_\theta = \frac{1}{3} \mu \rho \sin \varphi [M / (\pi K I)]^\circ (\rho_0^{-3\omega} - \rho^{-3\omega})$$

Соотношения (1.21) для определения напряжений $\sigma_{\theta r}$, $\sigma_{\theta z}$ остаются без изменений.

Заметим, что на заделанной сферической поверхности трубы радиуса $\rho = \rho_0$ тангенциальные напряжения равны $\sigma_{\rho\theta} = \frac{1}{2} K A \rho_0^{-3} \sin^2 \varphi$. Крутящий момент, создаваемый этими напряжениями, равен M . Остальные компоненты вектора напряжения σ_θ на сферической поверхности равны нулю.

Отметим, что точные решения некоторых задач кручения конических труб в условиях установившейся ползучести здесь были получены путем сведения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (1.7) к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами (1.16) с помощью замены независимых переменных вида (1.11). Можно показать, что единственным видом зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью скоростей деформаций, при котором такое преобразование возможно, является степенная зависимость (1.4).

Действительно, пусть функция $\psi(r, z)$ имеет вид (1.11). Тогда, согласно (1.5), имеем

$$\Gamma = 2r \sqrt{y} \psi_0' \quad (1.24)$$

Подставляя выражения (1.11), (1.24) в уравнение (1.7), найдем

$$2y \psi_0'' + \left[5 + \frac{f'(\Gamma)}{f(\Gamma)} \left(r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + z \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \right] \psi_0' = 0$$

$$f'(\Gamma) = df(\Gamma)/d\Gamma \quad (1.25)$$

Вычислим производные функции Γ , воспользовавшись соотношением (1.24), и подставим полученные выражения в (1.25):

$$2y \left[1 + \frac{\Gamma f'(\Gamma)}{f(\Gamma)} \right] \psi_0'' + \left[5 + \frac{2\Gamma f'(\Gamma)}{f(\Gamma)} \right] \psi_0' = 0$$

Это соотношение можно записать в виде

$$-2y(\psi_0')^{-1} \psi_0'' = [1 + \Gamma f'(\Gamma) f^{-1}(\Gamma)]^{-1} [5 + 2\Gamma f'(\Gamma) f^{-1}(\Gamma)] \quad (1.26)$$

В равенстве (1.26) левая часть зависит только от аргумента y , а правая часть — от переменных y и r . Поэтому величины, входящие в обе части этого соотношения, должны быть постоянными. Из этого следует, что

$$f'(\Gamma)/f(\Gamma) = (\mu - 1)/\Gamma, \quad \mu = \text{const} \quad (1.27)$$

Интегрируя уравнение (1.27), получаем второе соотношение (1.1).

Отметим, что задача о кручении сплошного однородного конуса ($\psi_0 = 0$) в условиях установившейся ползучести решена в [7, 8].

2. Кручение неоднородных конических труб. Рассмотрим поставленную в п. 1 задачу о кручении неоднородной конической трубы в предположении, что в (1.1) величина K является функцией координат r и z . Для конических тел естественным является изменение их свойств по углу φ (фиг. 1). Поэтому положим

$$K = K(\varphi), \quad \varphi = \arcsin[r(r^2 + z^2)^{-1/2}] \quad (2.1)$$

где $K(\varphi)$ — кусочно-непрерывная ограниченная функция.

Функцию скоростей перемещений примем в виде (1.11). В этом случае граничные условия на боковых поверхностях трубы (1.10) выполняются тождественно; а общее решение уравнения (1.7) имеет вид (1.17).

Проводя преобразования, аналогичные сделанным в п. 1, получим следующие результаты. Отличные от нуля физические компоненты тензора напряжений определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta r} &= MK(\varphi) r^{\mu+1} (r^2 + z^2)^{-\mu/2} / (2\pi I_1) \\ \sigma_{\theta z} &= MK(\varphi) r^{\mu} z (r^2 + z^2)^{-\mu/2} / (2\pi I_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$I_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} K(\varphi) \sin^{\mu+2} \varphi \, d\varphi$$

Окружная компонента вектора скорости перемещений равна $v_{\theta} = r \{ B^{-1/3} \mu [M / (\pi I_1)]^{\mu} (r^2 + z^2)^{-3\mu/2} \}$, где величина B определяется из условия отсутствия смещения трубы как жесткого целого.

При $\mu = 1$ выражения (2.2) определяют напряжения в задаче о кручении неоднородной упругой конической трубы. Задача о кручении упругого конуса для неоднородности частного вида рассматривалась в [14].

Исследование задачи п. 2 открывает возможности для решения задач наращивания конических труб при кручении.

3. Анализ полученных результатов. Численные примеры. Проанализируем влияние физической нелинейности на формирование полей напряжений и скоростей перемещений при кручении конических труб. Исследуем вначале влияние параметра нелинейности материала $\mu \in (0, 1]$ на распределение напряжений при кручении таких труб. Согласно (1.6), имеем $T = 2(\sigma_{\theta r}^2 + \sigma_{\theta z}^2)$. Подставляя в это соотношение выражения (1.18), получим

$$T = \frac{M \sin^{\mu} \varphi \cos^3 \varphi}{\pi I(\mu) z^3}, \quad I(\mu) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^{\mu+2} \varphi \, d\varphi$$

Максимум функции $T=T(z, \varphi, \mu)$ по z достигается при $z=a$ и равен

$$T_1(\varphi, \mu) = \max_z T(z, \varphi, \mu) = \frac{M \sin^\mu \varphi \cos^3 \varphi}{\pi I(\mu) a^3}$$

Для определения максимума интенсивности напряжений по углу φ вычислим производную

$$\frac{\partial T_1}{\partial \varphi} = \frac{M}{\pi I(\mu) a^3} \sin^{\mu-1} \varphi \cos^4 \varphi (\mu - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi)$$

Из этого соотношения следует, что максимальное значение функции $T_1(\varphi, \mu)$ достигается при

$$\varphi = \varphi_* = \operatorname{arctg} \sqrt{\mu/3} \quad (\varphi_0 < \varphi_* < \varphi_1) \quad (3.1)$$

$$\varphi = \varphi_1 \quad (\varphi_1 < \varphi_*), \quad \varphi = \varphi_0 \quad (\varphi_* < \varphi_0)$$

Обозначим через $T_2(\mu)$ максимум по φ функции $T_1(\varphi, \mu)$ при фиксированном μ , т. е. $T_2(\mu) = \max_{z, \varphi} T(z, \varphi, \mu)$. Положим $S(\mu) = T_2(\mu)/T_2(1)$.

Величина $S(\mu)$ равна отношению максимальной интенсивности напряжений при кручении полого конуса в условиях установившейся ползучести к максимальной интенсивности напряжений при кручении упругого конуса. Функция $S(\mu)$ определяет влияние степени нелинейности на максимальное значение интенсивности напряжений при кручении конических труб.

Согласно (3.1), возможны три случая:
широкий конус ($\varphi_0 > 30^\circ$):

$$S(\mu) = I(1)/[I(\mu) \sin^{1-\mu} \varphi_0] \quad (3.2)$$

средний конус ($\varphi_0 < 30^\circ < \varphi_1$):

$$S(\mu) = \begin{cases} \frac{16I(1)}{3\sqrt{3}I(\mu)} \sin^\mu \varphi_0 \cos^3 \varphi_0 & (0 < \mu < 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_0), \\ \frac{16I(1)}{I(\mu)} \left[\frac{\mu^\mu}{(\mu+3)^{\mu+3}} \right]^{1/2} & (3 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 < \mu \leq 1) \end{cases} \quad (3.3)$$

узкий конус ($\varphi_1 < 30^\circ$):

$$S(\mu) = \frac{I(1) \sin^\mu \varphi_0 \cos^3 \varphi_0}{I(\mu) \sin \varphi_1 \cos^3 \varphi_1} \quad (0 < \mu < 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_0)$$

$$S(\mu) = \frac{3I(1)\sqrt{3}}{I(\mu) \sin \varphi_1 \cos^3 \varphi_1} \left[\frac{\mu^\mu}{(\mu+3)^{\mu+3}} \right]^{1/2} \quad (3 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 < \mu < 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_1)$$

$$S(\mu) = \frac{I(1)}{I(\mu) \sin^{1-\mu} \varphi_1} \quad (3 \operatorname{tg}^2 \varphi_1 < \mu \leq 1) \quad (3.4)$$

Из приведенных соотношений (3.2)–(3.4) следует, что величина $S(\mu)$ не зависит от геометрических размеров конуса a и b и величины крутящего момента M , а определяется только параметром нелинейности материала μ и углами конусности φ_0 и φ_1 .

Приведем некоторые результаты числовых расчетов. Рассмотрим широкий пологий конус ($\varphi_0 = 45^\circ$, $\varphi_1 = 60^\circ$). При $\mu \in (0, 1]$ величина $S(\mu)$ монотонно убывает с ростом μ , однако это убывание относительно невелико. Так, например, $S(0,1) = 1,408$, $S(0,5) = 1,060$, $S(1) = 1,00$, т. е. изменение максимальной интенсивности напряжений в этом случае составляет 11%.

Для среднего конуса ($\varphi_0 = 20^\circ$, $\varphi_1 = 40^\circ$) величина $S(\mu)$ также монотонно убывает с ростом μ , причем более интенсивно. Например, $S(0,05) = 1,306$, $S(0,5) = 1,087$, $S(1) = 1,00$, т. е. изменение максимальной интенсивности напряжений составляет 31%.

В узком пологом конусе картина влияния фактора нелинейности на максимальное значение интенсивности напряжений качественно меняется. Оказывается, что на всем интервале изменения фактора нелинейности $\mu \in (0, 1]$ функция $S(\mu) \leq 1$. Это показывает, что фактор нелинейности в узком пологом конусе уменьшает максимальное значение интенсивности напряжений в отличие от широкого и среднего конуса, где фактор нелинейности увеличивает максимальное значение интенсивности напряжений. Отмеченное уменьшение может достигнуть 15%, так как $S(0,25) = 0,857$.

Анализ зависимости величины относительной скорости перемещения $v_0 = v_0/r$ от параметра нелинейности материала μ проведем для случая, когда контур $r = R_0$ торца $z = b$ закреплен.

Максимум по z величины $v_0(r, z, \mu)$ достигается на торце $z = b$ и равен:

$$v_*(\varphi, \mu) = \max_z v_0/r = \mu/3 \{M[\pi K b^3 I(\mu)]^{-1}\}^{1/\mu} (\cos^{3/\mu} \varphi_0 - \cos^{3/\mu} \varphi) \quad (3.5)$$

Проведем численный анализ полученного выражения при следующих значениях параметров: $\varphi_0 = 20^\circ$, $\varphi_1 = 60^\circ$, $M/(\pi K b^3) = 0,01$. Результаты расчетов показывают, что при фиксированном μ величина $v_*(\varphi, \mu)$ монотонно возрастает с ростом φ и достигает максимального значения при $\varphi = \varphi_1$. Максимум скорости перемещений существенно зависит от μ и увеличивается с ростом этого параметра. Так, например, $v_*(\varphi_1, 0,6) = 0,012$, $v_*(\varphi_1, 0,8) = 0,067$, $v_*(\varphi_1, 1) = 0,187$.

Отметим, что при любых значениях физических и геометрических параметров максимальные значения интенсивности напряжений и скоростей перемещений достигаются на противоположных торцах полого конуса: максимум интенсивности напряжений — при $z = a$, а максимум скорости перемещений — при $z = b$.

Автор выражает благодарность Б. Л. Абрамяну и А. Д. Дроздову за полезное обсуждение этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Некоторые задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала. — ПММ, 1949, т. 13, вып. 6, с. 655–658.
2. Соколовский В. В. Пластическое кручение круглых валов переменного диаметра. — ПММ, 1945, т. 9, вып. 4, с. 343–346.
3. Качанов Л. М. Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра. — ПММ, 1948, т. 12, вып. 4, с. 375–384.
4. Eddy R. P., Shaw F. S. Numerical solution of elastoplastic torsion of a shaft of rotational symmetry. — J. Appl. Mech., 1949, vol. 16, No. 2, p. 139–148.
5. Манукян М. М. Кручение составных валов переменного сечения в условиях установившейся ползучести. — Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, 1961, т. 14, № 1, с. 115–121.
6. Манукян М. М. Установившаяся ползучесть скручиваемого конического стержня. — Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, 1961, т. 14, № 2, с. 149–153.
7. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Кручение тела вращения в условиях установившейся ползучести. — Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, 1961, т. 14, № 4, с. 103–114.
8. Arutiunian N. Kh. Manukian M. M. Torsion of circular rods of varying diameter under conditions of unsteady creep. — In: Problems of Continuum Mechanics. Philadelphia. — New York: Pergamon press; 1961, p. 1–20.
9. Манукян М. М. Кручение составного вала переменного диаметра в условиях нелинейной ползучести. — Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, 1963, т. 16, № 5, с. 59–81.
10. Манукян М. М. Кручение тел с учетом ползучести. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1972. 229 с.
11. Задолян М. А. Некоторые задачи концентрации напряжений в угловой точке контактной поверхности составного тела со степенным упрочнением. — Докл. АН АрмССР, 1982, т. 74, № 1, с. 18–25.
12. Задолян М. А. Ползучесть при кручении круглого конического стержня, материал которого обладает свойством нестационарной неоднородности. — Докл. АН АрмССР, 1963, т. 36, № 3, с. 153–156.
13. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
14. Лезницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.II.1985