УДК 539.374

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЗАТВЕРДЕВАЮЩИХ И НАРАЩИВАЕМЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

БЫКОВЦЕВ Г. И., ЛУКАНОВ А. С.

Проблемам наращивания вязкоупругих сред в последние годы уделяется большое внимание [1–7] [1]. Для наращиваемых сред предлагается определять приращения напряжений, деформаций, перемещений, а сами напряжения определять интегрированием по времени.

При этом возникает задача формулировки начальных условий для напряжений на растущей поверхности. В публикуемой работе для изотропных процессов наращивания предлагается формулировка начальных условий для напряжений, в которую входит одна экспериментальная величина (функция). Обсуждается модельный эксперимент, позволяющий определить эту величину.

1. Рассмотрим затвердевающие среды, поверхности которых наращиваются в процессе деформирования. При образовании твердой фазы на поверхности, которая в процессе наращивания подвержена силовому воздействию, традиционные определения перемещений и деформаций в твердой фазе невозможны, когда отсутствует начальное состояние отсчета.

Определения приращений (скоростей) деформаций и перемещений остаются неизменными, поэтому удобно основные законы механики сплошных сред формулировать в приращениях. При этом приращения напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j}+F_i{}^{\bullet}=0 \tag{1.1}$$

а для скоростей деформаций имеем

$$\dot e_{ij}=(\dot u_{i,j}+\dot u_{j,i})/2 \tag{1.2}$$

Пусть уравнение наращиваемой поверхности записывается $t=\tau^*(x_i)$, тогда имеем

$$n_i=\tau_{,i}{}^*(\tau_{,j}{}^*\tau_{,j}{}^*)^{-1/2},\qquad c=(\tau_{,j}{}^*\tau_{,j}{}^*)^{-1/2} \tag{1.3}$$

где n_i – нормаль к наращиваемой поверхности, c – линейная скорость наращиваемой поверхности в направлении нормали.

Для определения напряжений имеем

$$\sigma_{ij}=\int\limits_{\tau^*}^{t}\sigma_{ij}{}^{\bullet}(x_i,s)\,ds+\sigma_{ij}{}^0(x_i) \tag{1.4}$$

где $\sigma_{ij}{}^0(x_i)=\sigma_{ij}(x_i,\tau^*(x_i))$ – напряжения в момент зарождения рассматриваемого элемента твердого тела [3, 4]. Учитывая, что напряжения (1.4) должны удовлетворять уравнению равновесия, и используя обозначения (1.3), получаем

$$[\overset{0}{\sigma}_{ij,j}(x_i)+F_i(x_i,\tau^*)]c-\sigma_{ij}{}^{\bullet}(x_i,\tau^*)n_j=0 \tag{1.5}$$

Условие (1.5) следует рассматривать как граничное условие на растущей поверхности для приращений напряжений. Таким образом для определения вектора приращений $\sigma_{ij}{}^{\bullet}n_j$ необходимо определить компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}{}^0$ на наращиваемой поверхности. Этот вывод несколько другими способами получен в [1–4, 6].

Соотношения (1.1) и (1.2) можно замкнуть реологическими соотношениями, которые для вязкоупругих затвердевающих сред сформулируем в приращениях

$$s_{ij}{}^{\bullet}(t)=2G(t-\tau^*)\left[\varepsilon_{ij}{}^{\bullet}(t)-\int\limits_{\tau^*}^{t}R_1(t-\tau,\eta(\tau-\tau^*))\,\varepsilon_{ij}{}^{\bullet}(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.6}$$

$$s_{ij}{}^{\bullet}=\sigma_{ij}{}^{\bullet}-{}^1\!/_3\delta_{ij}\sigma_{hk}{}^{\bullet},\qquad \varepsilon_{ij}{}^{\bullet}=e_{ij}{}^{\bullet}-{}^1\!/_3\delta_{ij}e_{hk}$$

где $\eta=\eta(\tau,x_i)$ – степень затвердевания вещества; полагаем что зарождение произошло в момент времени $t=\tau^*$.

Аналогичное соотношение постулируем и для объемных деформаций

$$\sigma^{\bullet}(t)=K(t-\tau^*)\left[\theta^{\bullet}(t)-\int\limits_{\tau^*}^{t}\Gamma(t-\tau,\eta(\tau-\tau^*))\,\theta^{\bullet}(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.7}$$

[1] См. также: *Арутюнян Н. Х.* Теория ползучести неоднородно-стареющих тел.— Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1976, № 170. 76 с.

где $\theta^{\cdot}=(e_{kk}^{\cdot}-3\alpha T^{\cdot}+\Delta^{\cdot})$, T – температура, $\alpha(\eta, T)$ – коэффициент линейного расширения, $\Delta(\eta)$ – относительное изменение объема.

Определяющие соотношения, записанные в виде (1.6), (1.7), позволяют замкнуть систему уравнений механики сплошной среды в приращениях. Отметим, что определяющее соотношение в вязкоупругости обычно записывается в виде

$$s_{ij}(t)=2G(t-\tau^*)\left[\varepsilon_{ij}(t)-\int\limits_{\tau^*}^{t}R_2(t-\tau,\eta(\tau-\tau^*))\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau\right] \tag{1.8}$$

Для определения ядер $R_1(t-\tau,\eta)$ и $R_2(t-\tau,\eta)$ необходим идеальный эксперимент при различных фиксированных значениях η. Если известно соотношение (1.8), то, дифференцируя по времени и интегрируя по частям, получим соотношение (1.6), в котором $R_1(t-\tau,\eta)=R_2(t-\tau,\eta)$. Если $\eta=\text{const}$, то среды, описываемые выражениями (1.6) и (1.8), ведут себя одинаково. Если же η существенно зависит от времени, то процессы, описываемые этими соотношениями, будут различны. Поэтому необходимы различные дополнительные эксперименты при переменном η, которые дадут возможность выбрать одно из выражений (1.6) или (1.8).

2. При постановке краевой задачи механики сплошных сред для наращиваемых тел остается сформулировать краевые условия. Для этого рассмотрим объем V исследуемой среды, ограниченный поверхностью $S=S_1+S_2$. Пусть на S_1 заданы перемещения $u_i(x_i,t)$, а следовательно, и $u_i^{\cdot}(x_i,t)$, а на S_2 заданы напряжения $\sigma_{ij}n_j=$ $=p_i(x_i,t)$.

На поверхности S_2 возможно наращивание материала. Поэтому для системы уравнений (1.1), (1.2), (1.6), и (1.7) при известных $T(x_i,t)$ и $\eta(x_i,t)$ на поверхности S_1 заданы приращения перемещений $u_i^{\cdot}$, а на поверхности S_2 – приращения усилий $\sigma_{ij}^{\cdot}n_j$, которые связаны с σ_{ij}^0 и F_i соотношениями (1.5).

Для того чтобы вычислить $\sigma_{ij}^{\cdot}n_j$ из (1.5), необходимо определить компоненты σ_{ij}^0 на поверхности в любой момент времени.

Но из краевых условий на S_2 известны только три компоненты напряжений $\sigma_{ij}n_j=p_i$. В дальнейшем предполагается, что напряжения в возникающем материале σ_{ij}^0 связаны с p_i и n_i функциональной связью, т. е. $\sigma_{ij}^0=f_{ij}(n_i,p_i)$. Для изотропных сред и изотропных процессов наращивания эта зависимость должна быть изотропной. Установим общий вид этой зависимости. Пусть ось x_3 направлена по нормали, тогда

$$\sigma_{11}^0=f_{11}(\sigma_{33},\sigma_{13},\sigma_{23}),\qquad \sigma_{22}^0=f_{22}(\sigma_{33},\sigma_{13},\sigma_{23}),\qquad \sigma_{12}^0=f_{12}(\sigma_{33},\sigma_{13},\sigma_{23}) \tag{2.1}$$

Функции f_{11}, f_{22}, f_{12} не зависят от выбора осей координат x_1 и x_2. Пусть $\sigma_{13}=$ $=\tau\cos\beta$, $\sigma_{23}=\tau\sin\beta$, $\gamma=(\beta-\varphi)$, тогда соотношения (2.1) после поворота системы координат в плоскости x_1, x_2 на угол φ принимают вид

$$\begin{gathered}
f_{11}(\sigma_{33},\tau\cos\gamma,\tau\sin\gamma)=f_{11}(\sigma_{33},\tau\cos\beta,\tau\sin\beta)\cos^2(\beta-\gamma)+f_{22}(\sigma_{33},\tau\cos\beta,\tau\sin\beta)\times\\
\times\sin^2(\beta-\gamma)+2f_{12}(\sigma_{33},\tau\cos\beta,\tau\sin\beta)\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma)\\
f_{22}(\sigma_{33},\tau\cos\gamma,\tau\sin\gamma)=f_{11}(\sigma_{33},\tau\cos\beta,\tau\sin\beta)\sin^2(\beta-\gamma)+f_{22}(\sigma_{33},\tau\cos\beta,\tau\sin\beta)\times\\
\times\cos^2(\beta-\gamma)-2f_{12}(\sigma_{33},\tau\cos\beta,\tau\sin\beta)\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma)\\
f_{12}(\sigma_{33},\tau\cos\gamma,\tau\sin\gamma)=[f_{22}(\sigma_{33},\tau\cos\beta,\tau\sin\beta)-f_{11}(\sigma_{33},\tau\cos\beta,\tau\sin\beta)]\times\\
\times\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma)+f_{12}(\sigma_{33},\tau\cos\beta,\tau\sin\beta)(\cos^2(\beta-\gamma)-\sin^2(\beta-\gamma))
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Дифференцируя равенства (2.2) по β и учитывая, что полученные выражения имеют место при любом γ, имеем систему дифференциальных уравнений относительно $(f_{11}+f_{22})$, $(f_{11}-f_{22})$ и f_{12}. Из анализа уравнений этой системы окончательно следует: $f_{11}=f_{22}=f(\sigma_{33},\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)$, $f_{12}=0$.

Соотношения (2.1) для изотропного процесса наращивания можно представить в виде (f – функция p_in_i и $(p_ip_i)^{1/2}$):

$$\sigma_{ij}^0=(\delta_{ij}-n_in_j)f-n_kp_kn_in_j+n_ip_j+n_jp_i. \tag{2.3}$$

Если касательные напряжения на поверхности отсутствуют, то $p=p_in_i=(p_ip_i)^{1/2}$ и функция f будет зависеть только от нормального давления, а соотношение (2.3) принимает вид

$$\sigma_{ij}^0=\delta_{ij}f(p)+n_in_j(p-f(p)). \tag{2.4}$$

Зависимость f в выражениях (2.3), (2.4) определяется экспериментально для каждого материала и для каждого процесса наращивания.

В качестве схемы такого эксперимента можно предложить следующий опыт. Пусть в полом цилиндре с абсолютно жесткими стенками происходит наращивание материала параллельно оси z (путем напыления либо затвердевания). В процессе наращивания перемещения $u_r=u_\theta=0$, а перемещения вдоль оси z разрешены, т. е. стенки цилиндра идеально смазаны. В зарождающемся материале $\sigma_r=\sigma_\theta=f(p)$, а $\sigma_z=p$.

Для простоты положим, что в цилиндре, полученном в результате наращивания, имеет место закон Гука в приращениях и свойства его не зависят от времени: $\Delta\varepsilon_r=[(1-\nu)\Delta\sigma_r-\nu\Delta\sigma_z]/E$, $\Delta\varepsilon_z=[\Delta\sigma_z-2\nu\Delta\sigma_r]/E$.

После окончания процесса формирования наращиваемого тела, полученный цилиндр освобождается от жесткой оболочки, т. е. на его поверхности напряжения отсутствуют и происходит упругое расширение при $\Delta\sigma_r=-f(p)$, $\Delta\sigma_z=-p$. Производя измерения $H(p)=\Delta\varepsilon_r/\Delta\varepsilon_z$, из закона Гука получаем зависимость $f(p)=p[H(p)+\nu]/[2\nu H(p)+(1-\nu)]$. Эта же схема позволяет определить зависимость $f(p)$ и для сред с более сложными реологическими свойствами, если последние известны в условиях затвердевания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 783–789.
2. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. *Арутюнян Н. Х., Метлов В. В.* Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 142–152.
4. *Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э.* Краевая задача теории вязкоупругопластичности для растущего тела, подверженного старению.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 1, с. 17–28.
5. *Дятловицкий Л. И., Вайнберг А. И.* Формирование напряжений в гравитационных плотинах. Киев: Наук. думка, 1975. 264 с.
6. *Тринчер В. К.* О постановке задачи определения напряженно-деформированного состояния растущего тела.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 119–124.
7. *Харлаб В. Д.* К линейной теории ползучести наращиваемого тела.— В кн.: Механика стержневых систем и сплошных сред. Л.: Ленингр. инж.-строит. ин-т, 1980, вып. 13, с. 149–157.

Куйбышев

Поступила в редакцию
5.VII.1984