МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1985

УДК 539.214

К ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ НАГРУЖЕНИЯ

БЕНИАМИНОВ Д. М.

Обсуждаются вопросы, связанные с формулировками соотношений теории пластичности для случая, когда нагружение производится из точки пересечения гладких частей поверхности нагружения. Рассмотрение ограничено только изотермическими однородными малыми деформациями материала и согласовано с основными положениями теории материалов с внутренними переменными состояния [1–3]. За исключением условий, определяющих активные участки поверхности нагружения, предлагаемые соотношения во многом аналогичны известным соотношениям [4]. Показывается, что для материала достаточно общего типа конус полного пластического нагружения в угловой точке не совпадает с внешним конусом к поверхности нагружения. Теория дает возможность представления уравнений поверхностей нагружения и соответствующих условий ортогональности как в пространстве напряжений, так и в пространстве деформаций. При этом реакция пластически упрочняющегося материала будет одинаковой при обоих способах описания.

1. Предполагается, что состояние каждого малого элемента среды полностью определяется помимо напряжений и деформаций еще и некоторым набором переменных q_a $(a=1, 2,\ldots, N)$, задающих внутреннее структурное состояние элемента. Эти переменные могут быть разбиты на группы скаляров и тензоров различной валентности, часть из них может совпадать с компонентами тензора пластической деформации и параметрами упрочнения. Из теории материалов с внутренними переменными состояния следует существование функции $z(\sigma, q)$, через которую определяются компоненты тензора полной деформации

$$\varepsilon_{ij}=\partial z(\sigma, q)/\partial\sigma_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3) \tag{1.1}$$

и записывается неравенство для диссипативной функции

$$D\equiv\tau_a\dot{q}_a\geqslant0 \quad (\tau_a=\partial z(\sigma, q)/\partial q_a) \tag{1.2}$$

Здесь σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций, τ_a — диссипативные силы (по определению); точка над буквой указывает на скорость соответствующей величины. Принято также правило суммирования по любым дважды повторяющимся индексам (особые случаи, когда такое суммирование не производится, специально оговорены).

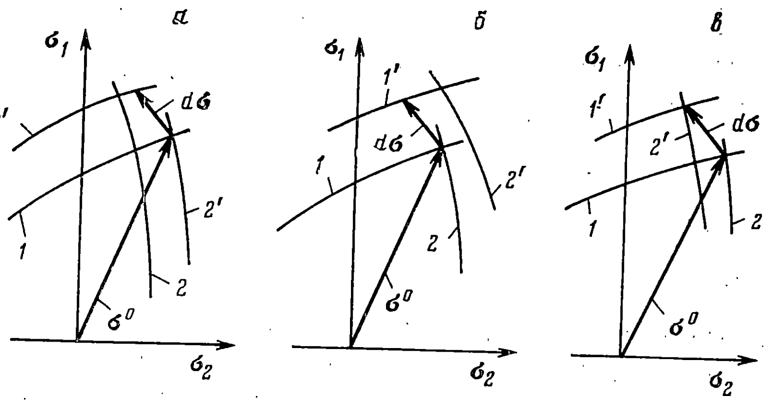
Формулы (1.1), (1.2) образуют первую группу определяющих соотношений. Необходимая для вычисления скоростей $\dot{q}_a$ вторая группа соотношений записывается в виде

$$F_\alpha(\tau_1, \tau_2,\ldots, \tau_N)\leqslant0 \quad (\alpha\in A=\{1, 2,\ldots, M\}) \tag{1.3}$$

$$\dot{q}_a=\frac{\partial F_\alpha}{\partial\tau_a}\dot{\lambda}_\alpha, \quad F_\alpha\dot{\lambda}_\alpha=0^*, \quad \dot{\lambda}_\alpha\geqslant0 \quad (\alpha\in A) \tag{1.4}$$

$$\dot{F}_\alpha\leqslant0, \quad \dot{F}_\alpha\dot{\lambda}_\alpha=0^*, \quad \dot{\lambda}_\alpha\geqslant0 \quad (\alpha\in A^*=\{\alpha: F_\alpha=0\}\subset A) \tag{1.5}$$

* В этой формуле по α не суммировать!



Фиг. 1

Функции z и F_α полагаются дифференцируемыми по всем своим аргументам. Условия (1.3) при фиксированных значениях q_a определяют в пространстве напряжений область упругого поведения материала. Кинетические уравнения (1.4) вытекают из принципа максимума скорости диссипации энергии. Наконец, соотношения (1.5) необходимы для отыскания значений множителей $\lambda_\alpha^\cdot$. Формулы (1.1)–(1.5) полностью определяют математическую модель упругопластического материала с независящим от времени поведением.

По существу единственное отличие соотношений (1.1)–(1.5) от имеющихся в литературе заключается в формулах (1.5), которые требуют выполнения условий (1.3), (1.4) не только для каждого допустимого состояния, то также и для заданного продолжения процесса из этого состояния. На фиг. 1 показаны три варианта эволюции поверхности нагружения в пространстве напряжений при переходе от состояния σ_{ij}°, q_a° к состоянию $\sigma_{ij}^\circ+d\sigma_{ij}$, $q_a^\circ+dq_a$ (поверхность 1 определяется уравнением $F_1(\sigma, q^\circ)=0$, $2-F_2(\sigma, q^\circ)=0$, $1'-F_1(\sigma, q^\circ+dq)=0$, $2'-F_2(\sigma, q^\circ+dq)=0$). Первое неравенство из (1.5) не допускает ситуацию, изображенную на фиг. 1, *а*. Аналогичное условие оговорено в [5], где отмечается, что кусочно-гладкая поверхность должна перемещаться так, чтобы точка нагружения принадлежала этой поверхности. В отличие от [5] здесь в статье соответствующее требование записано в аналитическом виде и включено в число определяющих соотношений.

2. При некоторых дополнительных ограничениях задача (1.5) отыскания множителей $\lambda_\alpha^\cdot$ есть задача квадратичного программирования. Для доказательства этого утверждения раскроем выражение

$$F_\alpha^\cdot=\frac{\partial F_\alpha}{\partial \tau_a}\frac{\partial \tau_a}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{ij}^\cdot+\frac{\partial \tau_a}{\partial q_b}q_b^\cdot$$

Подстановка в него скоростей $q_b^\cdot$ по ассоциированному закону (1.4) и использование определения (1.2) для диссипативных сил сводит задачу (1.5) к соотношениям

$$F_{\sigma\alpha}^{\cdot\prime}-h_{\alpha\beta}\lambda_\beta^\cdot\leqslant 0,\quad \lambda_\alpha^\cdot\geqslant 0 \tag{2.1}$$

$$(F_{\sigma\alpha}^{\cdot\prime}-h_{\alpha\beta}\lambda_\beta^\cdot)\lambda_\alpha^\cdot=0^*\quad (\alpha\in A^*)$$

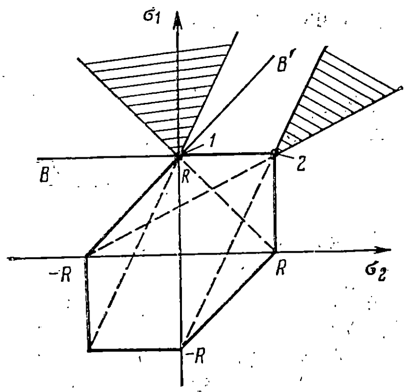
$$F_{\sigma\alpha}^{\cdot\prime}=\frac{\partial F_\alpha[\tau(\sigma,q)]}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{ij}^\cdot,\qquad h_{\alpha\beta}=-\frac{\partial^2 z}{\partial q_a\partial q_b}\frac{\partial F_\alpha}{\partial q_a}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_b} \tag{2.2}$$

Введем новую функцию $H(\lambda^\cdot)=F_{\sigma\alpha}^{\cdot\prime}-0{,}5h_{\alpha\beta}\lambda_\alpha^\cdot\lambda_\beta^\cdot$, для которой справедливы равенства $F_\alpha^\cdot=\partial H/\partial\lambda_\alpha^\cdot$.

* В этой формуле по α не суммировать!

Пусть функция $z(\sigma, q)$ вогнута по параметрам q_α и ранг матрицы $\partial F_\alpha/\partial\tau_\alpha$ равен числу поверхностей, образующих особенность. Тогда из определения коэффициентов $h_{\alpha\beta}$ следует, что квадратичная форма $h_{\alpha\beta}\dot\lambda_\alpha\dot\lambda_\beta$ положительно определена и, согласно одной из теорем выпуклого анализа [6], задача (2.1) равносильна задаче квадратичного программирования $H(\dot\lambda)=\max$, $\dot\lambda_\alpha\geqslant 0$ $(\alpha\in A^*)$, решение которой существует и единственно при любых значениях скоростей $\dot\sigma_{ij}$.

3. Найденные из решения соотношений (2.1) индексы α, для которых $\dot\lambda_\alpha>0$, образуют некоторое множество $A^{**}\subset A^*$. Конус полного активного нагружения определяется условием $A^{**}=A^*$. Для отыскания этого конуса следует сначала решить относительно множителей $\dot\lambda_\alpha$ систему уравнений $\dot F_{\sigma\alpha}-h_{\alpha\beta}\dot\lambda_\beta=0$, в которых индексы α и β пробегают все значения из A^*, и затем положить $\dot\lambda_\alpha>0$. У материалов достаточно общего вида конус полного активного нагружения не совпадает с внешним конусом к поверхности нагружения в нерегулярных точках.



Фиг. 2

Рассмотрим в качестве примера трансляционно-упрочняющийся материал, для которого функция z и поверхность нагружения заданы, соответственно, в виде

$$z=0{,}5(B_1\sigma_{mm}^2+B_2\sigma_{ij}\sigma_{ij})+$$
$$+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p-0{,}5c\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p$$

$$|\tau_i-\tau_j|=R \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

где τ_i — главные значения тензора активных напряжений (диссипативных сил), вычисляемых по формуле $\tau_{ij}=\partial z/\partial\varepsilon_{ij}^p=\sigma_{ij}-c\varepsilon_{ij}^p$ (B_1, B_2, R и $c>0$ — константы материала).

За структурные переменные q_α в этой модели принимаются компоненты тензора пластической деформации. Начальная поверхность нагружения такого материала совпадает с поверхностью Треска. На фиг. 2 показаны ее следы в плоскости $\sigma_3=0$ и в осях главных напряжений σ_1 и σ_2. Пусть малое догружение производится из точки *1*, в которой $\sigma_1=R$, $\sigma_2=\sigma_3=0$. Уравнения примыкающих к этой точке поверхностей нагружения имеют вид

$$F_1\equiv\tau_1-\tau_2-R\equiv(\sigma_1-c\varepsilon_1^p)-(\sigma_2-c\varepsilon_2^p)-R=0$$

$$F_2\equiv\tau_1-\tau_3-R\equiv(\sigma_1-c\varepsilon_1^p)-(\sigma_3-c\varepsilon_3^p)-R=0$$

Согласно ассоциированному закону (1.4), имеем $\dot\varepsilon_1^p=\dot\lambda_1+\dot\lambda_2$, $\dot\varepsilon_2^p=-\dot\lambda_1$, $\dot\varepsilon_3^p=-\dot\lambda_2$. Предположим теперь, что в процессе пластической деформации напряжения остаются в вершине особенности. Тогда должны выполняться равенства $\dot F_1\equiv(\dot\sigma_1-c\dot\varepsilon_1^p)-(\dot\sigma_2-c\dot\varepsilon_2^p)=0$, $\dot F_2\equiv(\dot\sigma_1-c\dot\varepsilon_2^p)-(\dot\sigma_3-c\dot\varepsilon_3^p)=0$, подставляя в которые предыдущие выражения для скоростей пластических деформаций, получим

$$\dot\lambda_1=(\dot\sigma_1-2\dot\sigma_2+\dot\sigma_3)/3c,\qquad \dot\lambda_2=(\dot\sigma_1+\dot\sigma_2-2\dot\sigma_3)/3c$$

Конус полного пластического нагружения в точке *1* определяется из условий $\dot\lambda_1>0$ и $\dot\lambda_2>0$. На фиг. 2 ему при $\dot\sigma_3=0$ соответствует заштрихованная область. Этот конус лежит внутри соответствующего внешнего конуса к поверхности нагружения (т. е. области B1B). Другая заштрихованная область на той же фигуре представляет собой конус полного пластического нагружения при догружении из точки *2*.

4. Представим полные деформации в виде суммы

$$\varepsilon_{ij}(\sigma,\ q)=\varepsilon_{ij}^e(\sigma,\ q)+\varepsilon_{ij}^p(q) \tag{4.1}$$

в которой $\varepsilon_{ij}{}^p(q)=\varepsilon_{ij}(0, q)$ и $\varepsilon_{ij}{}^e=\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}{}^p$ — по определению, пластические и упругие деформации материала. Вычисляя производные по времени от ε_{ij}, получим

$$\varepsilon_{ij}{}^{\cdot}=(\varepsilon_{ij}{}^{\cdot})^e+(\varepsilon_{ij}{}^{\cdot})^p, \qquad (\varepsilon_{ij}{}^{\cdot})^e\equiv\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{mn}}\sigma_{mn}{}^{\cdot}=\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^e}{\partial\sigma_{mn}}\sigma_{mn}{}^{\cdot}$$

$$(\varepsilon_{ij}{}^{\cdot})^p\equiv\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial q_a}q_a{}^{\cdot}=\frac{\partial\varepsilon_{ij}{}^e}{\partial q_a}q_a{}^{\cdot}+\varepsilon_{ij}{}^{\cdot p} \tag{4.2}$$

где $(\varepsilon_{ij}{}^{\cdot})^e$, $(\varepsilon_{ij}{}^{\cdot})^p$ — упругие и пластические части скорости деформаций. Видно, что скорость пластических деформаций $\varepsilon_{ij}{}^{\cdot p}$ и пластическая часть скорости деформаций $(\varepsilon_{ij}{}^{\cdot})^p$ совпадают лишь в том случае, когда упругие деформации $\varepsilon_{ij}{}^e$ не зависят от структурных переменных q_a.

Из формул (1.1) и (1.2) вытекают равенства

$$\partial\varepsilon_{ij}/\partial q_a=\partial\tau_a/\partial\sigma_{ij} \tag{4.3}$$

используя которые совместно с формулами (1.4) для скоростей структурных переменных, получим

$$(\varepsilon_{ij}{}^{\cdot})^p=\frac{\partial\tau_a}{\partial\sigma_{ij}}q_a{}^{\cdot}=\frac{\partial\tau_a}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial F_\alpha}{\partial\tau_a}\lambda_\alpha{}^{\cdot}=\frac{\partial F_\alpha}{\partial\sigma_{ij}}\lambda_\alpha{}^{\cdot} \tag{4.4}$$

Таким образом, из принятой формы записи ассоциированного закона (1.4) и уравнений (1.3) для поверхности нагружения, в которых функции F_α зависят от напряжений только через диссипативные силы, следует ортогональность пластической части скорости деформаций к определенной в пространстве напряжений поверхности нагружения в ее регулярных точках. Аналогичный вывод справедлив и для скорости пластической деформации, когда упругие модули материала не зависят от структурных переменных (в том числе и от пластических деформаций). Последний результат получен в [7, 8]. Выкладки (4.2)—(4.4) приводятся в [2], и в них содержатся вопросы, рассмотренные в [7, 8].

Для активных поверхностей нагружения (т. е. поверхностей, которым принадлежит точка нагружения в процессе пластической деформации) $F_\alpha{}^{\cdot}=0$ и для них из формул (2.1) и (2.2) следуют равенства

$$\sigma_{ij}{}^{\cdot}\frac{\partial\tau_a}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial F_\alpha}{\partial\tau_a}=h_{\alpha\beta}\lambda_\beta{}^{\cdot} \qquad (\alpha,\beta\in A^{**}=\{\alpha: F_\alpha=0,\quad F_\alpha{}^{\cdot}=0\})$$

Применяя их и формулу (4.4) к вычислению величины $\sigma_{ij}{}^{\cdot}(\varepsilon_{ij}{}^{\cdot})^p$, получим

$$\sigma_{ij}{}^{\cdot}(\varepsilon_{ij}{}^{\cdot})^p=\sigma_{ij}\frac{\partial\tau_a}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial F_\alpha}{\partial\tau_a}\lambda_\alpha{}^{\cdot}=h_{\alpha\beta}\lambda_\alpha{}^{\cdot}\lambda_\beta{}^{\cdot}$$

Если коэффициенты $h_{\alpha\beta}$ образуют матрицу коэффициентов положительно-определенной квадратической формы, то

$$\sigma_{ij}{}^{\cdot}(\varepsilon_{ij}{}^{\cdot})^p>0 \tag{4.5}$$

в процессе пластической деформации. Тем самым последнее неравенство равносильно указанным в п. 2 условиям, при выполнении которых задача отыскания скоростей структурных переменных и пластических деформаций имеет единственное решение при любых значениях скоростей напряжений. Для материала с не зависящими от структурных переменных упругими модулями из (4.5) вытекает требование $\sigma_{ij}{}^{\cdot}\varepsilon_{ij}{}^{\cdot p}$, предъявляемое к устойчивым по Друккеру материалам.

5. В записанных выше соотношениях определялись деформации материала по заданной программе изменения напряжений. Можно построить и обратные соотношения. С этой целью с помощью преобразования Лежандра строится новая функция

$$\varphi(\varepsilon, q)=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-z \tag{5.1}$$

для которой справедливы равенства

$$\sigma_{ij}(\varepsilon, q)=\partial\varphi/\partial\varepsilon_{ij}, \quad \tau_a(\varepsilon, q)=-\partial\varphi/\partial q_a \tag{5.2}$$

отличающиеся от первой группы определяющих соотношений (1.1), (1.2) лишь формой записи. Вторая группа определяющих соотношений (1.3)—(1.5) записана относительно диссипативных сил и не меняется при переходе от представления диссипативных сил как функций напряжений к представлению их функциями от деформаций. Подстановка (5.2) в соотношения (1.5) преобразует их к виду

$$\begin{gathered} F_{\varepsilon\alpha}^{\cdot\prime}-g_{\alpha\beta}\lambda_\beta^{\cdot}\leqslant 0, \quad \lambda_\alpha^{\cdot}\geqslant 0 \\ (F_{\varepsilon\alpha}^{\cdot\prime}-g_{\alpha\beta}\lambda_\beta^{\cdot})\lambda_\alpha^{\cdot}=0^* \quad (\alpha\in A^*) \\ F_{\varepsilon\alpha}^{\cdot\prime}=\frac{\partial F_\alpha[\tau(\varepsilon, q)]}{\partial\varepsilon_{ij}}\varepsilon_{ij}^{\cdot}, \qquad g_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_a\partial q_b}\frac{\partial F_\alpha}{\partial\tau_a}\frac{\partial F_\beta}{\partial\tau_b} \end{gathered} \tag{5.3}$$

Так же как и задача (2.1), задача отыскания множителей $\lambda_\alpha^{\cdot}$ из соотношений (5.3) есть задача квадратичного программирования. Она имеет единственное решение, когда матрица коэффициентов $g_{\alpha\beta}$ положительно определена. Для выполнения этого условия достаточно потребовать, чтобы ранг матрицы $\partial F_\alpha/\partial\tau_a$ был равен числу поверхностей, образующих особенность, и функция $\varphi(\varepsilon, q)$ была выпукла по переменным q_a. Если же функция $\varphi(\varepsilon, q)$ выпукла по всем своим аргументам, то связанная с ней преобразованием Лежандра (5.1) функция $z(\sigma, q)$ будет вогнутой по переменным q_a. При этом более сильном требовании решение задачи (5.3) существует и единственно одновременно с решением задачи (2.1) и, поскольку обе задачи получены из одной и той же системы соотношений (1.5), формулировки определяющих соотношений в пространствах напряжений и деформаций будут между собой эквивалентны, т. е. одна и та же группа переменных σ_{ij}, ε_{ij}, q_a, $\sigma_{ij}^{\cdot}$, $\varepsilon_{ij}^{\cdot}$ будет удовлетворять как группе соотношений (1.1)—(1.4), (2.1), так и группе соотношений (5.2), (1.3), (1,4), (5.3).

6. Формулы для вычисления напряжений всегда могут быть представлены в виде

$$\sigma_{ij}(\varepsilon, q)=\sigma_{ij}^e(\varepsilon, q)-\sigma_{ij}^p(q) \tag{6.1}$$

где $\sigma_{ij}^p(q)=-\sigma_{ij}(0, q)$, $\sigma_{ij}^e=\sigma_{ij}+\sigma_{ij}(0, q)$ — пластические и упругие напряжения соответственно. В [9] записаны уравнения, согласно которым именно скорость пластических напряжений ортогональна поверхности нагружения, определенной в пространстве деформаций (рассматривался упругопластический материал с гладкой поверхностью нагружения, а упругое поведение полагалось линейным с не зависящими от пластических деформаций модулями упругости). В [10, 11] для материала того же типа показано, что соотношения [9] равносильны обычной форме представления соотношений теории пластичности в пространстве напряжений только для пластически упрочняющихся материалов.

Применение выкладок, аналогичных тем, которые были проведены в п. 4, позволяет распространить некоторые результаты [9—11] на более общие модели материалов.

Обозначим через $\sigma_{ji}^{\cdot}$ компоненты полной скорости напряжений

$$\sigma_{ij}^{\cdot}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{mn}}\varepsilon_{mn}^{\cdot}+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial q_a}q_a^{\cdot}$$

Эта формула допускает представление скорости $\sigma_{ij}^{\cdot}$ в виде разности

* В этой формуле по α не суммировать!

$\sigma_{ij}^{\cdot} = (\sigma_{ij}^{\cdot})^e - (\sigma_{ij}^{\cdot})^p$, в которой выражения

$$(\sigma_{ij}^{\cdot})^e \equiv \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} \varepsilon_{mn}^{\cdot} = \frac{\partial \sigma_{ij}^e}{\partial \varepsilon_{mn}} \varepsilon_{mn}^{\cdot}$$
$$(\sigma_{ij}^{\cdot})^p \equiv -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial q_a} q_a^{\cdot} = -\frac{\partial \sigma_{ij}^e}{\partial q_a} q_a^{\cdot} + \sigma_{ij}^{\cdot p} \tag{6.2}$$

есть, соответственно, упругие и пластические части скорости напряжений, причем последняя совпадает со скоростью пластических напряжений, когда упругие напряжения не зависят от структурных переменных.

Из (5.2) следует, что $\partial\sigma_{ij}/\partial q_a = -\partial\tau_a/\partial\varepsilon_{ij}$. По этой причине вторая из формул (6.2) переписывается в виде

$$(\sigma_{ij}^{\cdot})^p = (\partial\tau_a/\partial\varepsilon_{ij})\, q_a^{\cdot}$$

Подставляя сюда скорости $q_a^{\cdot}$ по ассоциированному закону (1.4), окончательно получим

$$(\sigma_{ij}^{\cdot})^p = \frac{\partial \tau_a}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \tau_a} \lambda_\alpha^{\cdot} = \frac{\partial F_\alpha[\tau(\varepsilon, q)]}{\partial \varepsilon_{ij}} \lambda_\alpha^{\cdot} \tag{6.3}$$

Согласно этой формуле, пластическая часть скорости напряжений направлена по нормали к поверхности нагружения, заданной в пространстве деформаций, когда деформирование материала производится из регулярной точки поверхности. Если же конец вектора деформаций принадлежит пересечению двух или большего числа поверхностей из семейства (1.3), то пластическая часть скорости напряжений будет направлена внутрь конуса, образованного нормалями к гладким частям поверхности нагружения. Для материалов, у которых упругие напряжения в разложении (6.1) не зависят от структурных переменных, аналогичные свойства справедливы для скоростей пластических напряжений.

7. Для некоторых моделей материалов кинетические соотношения (1.4), (1.5) могут быть записаны в более простой форме.

Сначала рассмотрим формулировку соотношений в пространстве напряжений. Пусть функция $z(\sigma, q)$ и уравнения для поверхности нагружения таковы, что матрица коэффициентов $h_{\alpha\beta}$ в формулах (2.1) диагональна с положительными элементами на главной диагонали. В этом случае группа соотношений (2.1) допускает элементарное решение

$$\lambda_\alpha^{\cdot} = \sum_\alpha c_\alpha h_\alpha^{-1} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{mn}^{\cdot} \tag{7.1}$$

где h_α — диагональные элементы матрицы $h_{\alpha\beta}$, а коэффициенты c_α вычисляются из формул $c_\alpha=1$ при $F_\alpha=0$ и $(\partial F_\alpha/\partial\sigma_{mn})\sigma_{mn}^{\cdot}>0$, $c_\alpha=0$ при $F_\alpha=0$ и $(\partial F_\alpha/\partial\sigma_{mn})\sigma_{mn}^{\cdot}\leqslant 0$, $c_\alpha=0$ при $F_\alpha<0$.

Предположим далее, что упругие деформации в разложении (4.1) не зависят от структурных переменных q_a. Тогда для скоростей пластических деформаций из (4.2), (4.4) и (7.1) следуют формулы

$$\varepsilon_{ij}^{\cdot p} = \sum_\alpha c_\alpha h_\alpha^{-1} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{mn}^{\cdot} \tag{7.2}$$

которые совпадают с обычно приводимыми в литературе [1, 4, 5]. Отметим еще раз, что запись кинетических уравнений в виде (7.2) вытекает из общих соотношений (1.4). (1.5) только в случае диагональной формы матрицы $h_{\alpha\beta}$ и ее нельзя распространять на более общий случай.

Выполнение аналогичных требований при формулировке соотношений в пространстве деформаций (независимость упругих напряжений в разложении (6.1) от структурных переменных и диагональная форма положительно-определенной матрицы коэффициентов $g_{\alpha\beta}$ в формулах (5.3)) сводят соотношения (5.3), (6.2) и (6.3) к формулам

$$\overset{\bullet}{\sigma}_{ij}^{p}=\sum_{\alpha} m_\alpha g_\alpha^{-1}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \varepsilon_{mn}}\overset{\bullet}{\varepsilon}_{mn} \tag{7.3}$$

в которых через g_α обозначены диагональные элементы матрицы $g_{\alpha\beta}$, а коэффициенты m_α определяются формулами $m_\alpha=1$ при $F_\alpha=0$ и $(\partial F_\alpha/\partial\varepsilon_{mn})\overset{\bullet}{\varepsilon}_{mn}>0$, $m_\alpha=0$ при $F_\alpha=0$ и $(\partial F_\alpha/\partial\varepsilon_{mn})\overset{\bullet}{\varepsilon}_{mn}\leqslant 0$, $m_\alpha=0$ при $F_\alpha<0$.

При дополнительных предположениях о том, что материал изотропен и связь между упругими напряжениями и деформациями линейна, а также о том, что тензор пластических деформаций представляет собой девиатор, формула (7.3) преобразуется к виду

$$\overset{\bullet}{\varepsilon}_{ij}^{p}=\frac{1}{2G}\sum_{\alpha} m_\alpha g_\alpha^{-1}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \varepsilon_{mn}}\overset{\bullet}{\varepsilon}_{mn} \tag{7.4}$$

где G — модуль сдвига материала. Кинетические соотношения в такой форме (с точностью до обозначений) предложены в [12], где также показано, что определяемые подходами (7.2) и (7.4) конусы полного пластического нагружения не соответствуют друг другу, и поэтому эти соотношения не эквивалентны. Проведенный выше анализ вскрывает причину такого несоответствия. Дело в том, что матрицы $h_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ не могут быть диагональными одновременно, а потому для одного и того же материала не могут быть справедливы одновременно кинетические соотношения в форме (7.2) и (7.4). Например, когда матрица $h_{\alpha\beta}$ диагональна и уравнения в пространстве напряжений сводятся к соотношениям (7.2), соответствующая матрица $g_{\alpha\beta}$ имеет произвольный вид и для записи эквивалентных соотношений в пространстве деформаций необходимо обратиться к общим формулам п. 5.

Автор благодарен профессору В. Д. Клюшникову и профессору А. М. Проценко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. т. 1. 492 с; т. 2. 568 с.
2. *Rice J. R.* Inelastic constitutive relation for solids: An internal-variavle theory and its application to metal plasticity.— J. Mech. and Phys. Solids, 1971, vol. 19, No. 6, p. 433–455.
3. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
4. *Koiter W. T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface.— Quard. Appl. Math., 1953, vol. 11, No. 3, p. 350–354.
5. *Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
6. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
7. *Зуев В. В.* Определяющие соотношения для сред, упругие свойства которых зависят от пластических деформаций и температуры.— Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 4, с. 820–822.
8. *Зуев В. В.* Определяющие соотношения теории пластичности в пространстве деформаций и напряжений.— Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 4, с. 792–795.
9. *Yoder P., Iwan W.* On the formulation of strain-space plasticity with multiple loading surface.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1981, vol. 48. No. 4, p. 773–778.
10. *Casey J., Naghdi P. M.* On the nonequivalence of the stress space and strain-space formulations of plasticity theory.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1983, vol. 50, No. 2, p. 350–354.
11. *Casey J., Naghdi P. M.* A remark on the definition of hardening, softening and perfectly plastic behaviour.— Acta Mech., 1983, vol. 48, No. 1–2, p. 91–94.
12. *Клюшников В. Д.* Устойчивость упругопластических систем, М.: Наука, 1980. 240 с.

Москва

Поступила в редакцию 26.XI.1984