

УДК 539.3

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ С ЖЕСТКИМИ ВСТАВКАМИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ (ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ)

НАЗАРЕНКО А. М., ФИЛЬШТИНСКИЙ Л. А.

Задачи дифракции упругих волн на прямолинейном туннельном разрезе в неограниченном пространстве рассматривались, например, в [1, 2]. Динамическая задача для плоскости с круговым включением исследовалась в [3]. Взаимодействие волн напряжений с криволинейной туннельной вставкой в полупространстве в условиях продольного сдвига изучалось в [4]. В публикуемой работе предлагается схема решения динамической краевой задачи о дифракции упругих волн на криволинейной вставке в полуплоскости.

1. Рассмотрим действие плоской гармонической волны расширения

$$\varphi_1 = \operatorname{Re}\{\tau_1 \exp(-i\omega t - i\gamma_1 x_2)\}, \quad \varphi_2 = 0, \quad \tau_1 = \operatorname{const} \quad (1.1)$$

или волны сдвига

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \operatorname{Re}\{\tau_2 \exp(-i\omega t - i\gamma_2 x_2)\}, \quad \tau_2 = \operatorname{const} \quad (1.2)$$

на тонкую жесткую вставку, расположенную вдоль криволинейной дуги  $L$  и впаиванную в упругую полуплоскость  $x_2 > 0$  (массой вставки пренебрегаем) (фиг. 1). Взаимодействуя со вставкой, падающая и отраженная от границы  $x_2 = 0$  волны порождают сингулярное волновое поле в ее окрестности.

Суммарные амплитуды волновых полей перемещений и напряжений имеют вид

$$U_k = V_k + U_k^{(0)} - A U_k^{(1)} \quad (k=1, 2) \quad (1.3)$$

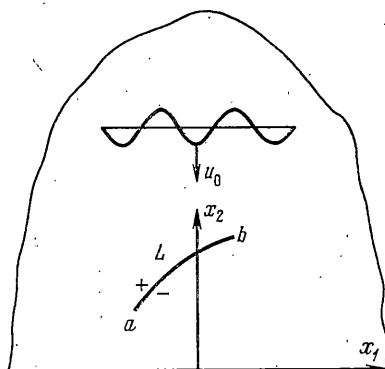
$$\tau_{mn} = S_{mn} + \tau_{mn}^{(0)} - A \tau_{mn}^{(1)} \quad (m, n=1, 2)$$

Здесь  $V_k$ ,  $U_k^{(0)}$ ,  $U_k^{(1)}$  и  $S_{mn}$ ,  $\tau_{mn}^{(0)}$ ,  $\tau_{mn}^{(1)}$  — амплитуды компонент вектора перемещения и тензора напряжения возмущенного поля в падающей и отраженной от границы  $x_2 = 0$  (при отсутствии дефекта) волнах соответственно,  $A = 1$  для заземленной границы,  $A = -1$  для границы, свободной от сил, и  $A = 0$  в случае неограниченной среды.

Считаем, что вставка перемещается как абсолютно жесткое тело и граничные условия на  $L$  имеют вид

$$U_1^\pm = B_1 - \omega_0 \eta, \quad U_2^\pm = B_2 + \omega_0 \xi \quad (\xi = \xi + i\eta \in L) \quad (1.4)$$

где  $B_1$ ,  $B_2$  и  $\omega_0$  — амплитуды поступательного движения и жесткого поворота вставки; верхний знак соответствует левому берегу вставки при движении от его начала  $a$  к концу  $b$ .



Фиг. 1

2. В случае установившихся волновых движений упругого тела амплитуды перемещений  $U_k$  и напряжений  $\tau_{mn}$  удовлетворяют соотношениям

$$L_{mk}U_k=0, \quad \tau_{mn}=\lambda\delta_{mn}(U_{1,1}+U_{2,2})+\mu(U_{m,n}+U_{n,m}) \quad (2.1)$$

$$L_{11}=\mu\partial^2/\partial x_1^2+(\lambda+2\mu)\partial^2/\partial x_2^2+\rho\omega^2$$

$$L_{12}=L_{21}=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}, \quad L_{22}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\rho\omega^2$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты Ламе,  $\rho$  — плотность среды,  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера.

Рассмотрим колебание полуплоскости под действием гармонической сосредоточенной силы, приложенной в точке  $\xi=\xi+i\eta$  и направленной вдоль оси  $x_1$  (первое состояние) или вдоль оси  $x_2$  (второе состояние). Уравнения  $k$ -го состояния имеют вид

$$\begin{aligned} V_{kk}=L_{kk}g_k, \quad V_{kn}=-L_{12}g_k, \quad (n\neq k, k, m, n=1, 2) \\ g_k=(g_{k1}-g_{k2})/(\gamma_2^2-\gamma_1^2), \quad (\Delta+\gamma_m^2)g_{km}=c\delta(x_1-\xi, x_2-\eta) \\ \gamma_k=\omega/c_k, \quad c=-[\mu(\lambda+2\mu)]^{-1} \\ S_{kmn}=\lambda\delta_{mn}(V_{k1,1}+V_{k2,2})+\mu(V_{km,n}+V_{kn,m}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — скорости распространения продольной и поперечной волн соответственно,  $\delta(x_1, x_2)$  — дельта-функция Дирака.

Фундаментальные решения уравнений Гельмгольца выражаются формулой [5]:

$$\psi(\gamma_m r)=(c/4i)H_0^{(1)}(\gamma_m r), \quad r=|z-\xi|, \quad z=x_1+ix_2 \quad (m=1, 2) \quad (2.3)$$

Положим

$$g_{km}(x_1, x_2, \xi, \eta)=\psi(\gamma_m r)+A_{km}(x_1, x_2, \xi, \eta) \quad (2.4)$$

Для определения неизвестных функций  $A_{km}$  перейдем в пространство трансформант Фурье  $F$ . Преобразования Фурье функций  $H_0^{(1)}(\gamma_m r)$  имеют вид [6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\gamma_m r)\exp[-ip|x_1-\xi|]dx_1=-2i\frac{\exp[-\mu_m|x_2-\eta|]}{\mu_m} \quad (m=1, 2) \quad (2.5)$$

Для выделения однозначных ветвей радикалов  $(p^2-\gamma^2)^{1/2}$  в плоскости  $p$  проводится разрез от точек  $\pm\gamma$  до бесконечности вдоль лучей  $\arg p=\pm\pi$ , при этом принимается, что при  $p=0$  имеем  $(p^2-\gamma^2)^{1/2}=-i\gamma$ .

Пусть  $W_{km}$ ,  $R_{kmn}$ ,  $B_{km}$  — трансформанты Фурье функций  $V_{km}$ ,  $S_{kmn}$ ,  $A_{km}$  соответственно. В пространстве  $F$  граничные условия на линии  $x_2=0$  приобретают вид: в случае заземленной границы

$$W_{k1}(0, \eta)=W_{k2}(0, \eta)=0 \quad (2.6)$$

для границы  $x_2=0$ , свободной от сил

$$R_{k12}(0, \eta)=R_{k22}(0, \eta)=0 \quad (2.7)$$

Для придания физического смысла обратным преобразованиям Фурье введем в среду малое затухание с последующим предельным переходом при его исчезновении. Законность такого предельного перехода составляет содержание принципа предельного поглощения [7].

Введение затухания приводит к тому, что новые числа для гармонических волн становятся комплексными, причем

$$\gamma_m^*=\gamma_m'+i\gamma_m'', \quad \gamma_m''>0, \quad |\gamma_m'| \gg \gamma_m'' \quad (m=1, 2) \quad (2.8)$$

Здесь и в дальнейшем звездочка над функцией означает, что эта функция зависит от комплексного волнового числа. В противном случае предполагается, что волновое число действительное и соответствует устранению демпфирования в среде. Учитывая (2.3) и (2.5), ищем  $B_{km}^*(x_2, \eta)$  в виде

$$B_{km}^* = C_{km}^*(\eta) \exp(-\mu_m^* x_2) c / \mu_m^* \quad (2.9)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.6) или (2.7) для каждого состояния, получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Решая эти системы, находим

$$C_{1m}^*(\eta) = (-1)^m [e_3^* \exp(-\mu_m^* \eta) - e_n^* \exp(-\mu_n^* \eta)] / \Delta_0^* \quad (2.10)$$

$$(m, n = 1, 2; n \neq m)$$

При  $A=1$  имеем  $e_1^* = 2p^2$ ,  $e_2^* = 2\lambda_3^*$ ,  $e_3^* = p^2 + \lambda_3^*$ ,  $\Delta_0^* = p^2 - \lambda_3^*$ . При  $A=-1$  получим  $e_1^* = 2p^2 \lambda_2^*$ ,  $e_2^* = 2\lambda_2^* \lambda_3^*$ ,  $e_3^* = \lambda_2^{*2} + p^2 \lambda_3^*$ ,  $\Delta_0^* = \lambda_2^{*2} - p^2 \lambda_3^*$ .

Функции  $C_{2m}^*(\eta)$  (второе состояние) получаются из  $C_{1m}^*(\eta)$ , если в выражениях (2.10) поменять местами  $\mu_1^*$  и  $\mu_2^*$ . При этом  $C_{22}^*$  соответствует  $C_{11}^*$ , а  $C_{21}^* = C_{12}^*$ .

Возвращаясь в основное пространство посредством обратного преобразования Фурье и используя (2.2), получаем следующие выражения для функций  $V_{km}^*$  — амплитуд перемещений  $k$ -го состояния в полуплоскости с малым затуханием:

$$V_{km}^* = E_{km}^* + F_{km}^*, \quad E_{km}^* = L_{mk} \theta^* \quad (2.11)$$

$$\theta^* = [\psi(\gamma_1^* r) - \psi(\gamma_2^* r)] / (\gamma_2^{*2} - \gamma_1^{*2})$$

$$F_{km}^* = \frac{1}{4\pi\mu\gamma_2^{*2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_{km}^*(p, x_2, \eta)}{\Delta_0^*} e^{iu} dp, \quad u = p|x_1 - \xi|$$

$$D_{11}^* = -e_3^* [(p^2/\mu_1^*) Y_{11}^* + \mu_2^* Y_{22}^*] + \mu_2^* e_1^* [Y_{12}^* + Y_{21}^*]$$

$$D_{12}^* = -i\alpha_1 \{e_3^* [Y_{11}^* + Y_{22}^*] - e_2^* Y_{12}^* - e_1^* Y_{21}^*\}$$

$$D_{21}^* = i\alpha_1 \{e_3^* [Y_{11}^* + Y_{22}^*] - e_1^* Y_{12}^* - e_2^* Y_{21}^*\}$$

$$D_{22}^* = -e_3^* [\mu_1^* Y_{11}^* + (p^2/\mu_2^*) Y_{22}^*] + \mu_1^* e_1^* [Y_{12}^* + Y_{21}^*]$$

$$\alpha_1 = p \operatorname{sign}(x_1 - \xi), \quad Y_{jl}^* = \exp(-\mu_j^* x_2 - \mu_l^* \eta) \quad (j, l = 1, 2)$$

Искомые функции  $V_{km}$  в (2.2) могут быть найдены непосредственно из (2.11) при стремлении параметра затухания к нулю.

Для заземленной границы в этом случае величина  $\Delta_0 = p^2 - \mu_1 \mu_2$  не обращается в нуль ни при каких значениях  $p$ , т. е. при  $A=1$  каждая из падающих волн (продольная или поперечная) при взаимодействии с границей полуплоскости порождает отраженные волны обоих типов, причем другие типы волн не возникают.

Выбор значений многозначных функций  $\mu_1$  и  $\mu_2$  определяется требованием о раздельном удовлетворении условий излучения для каждого типа волн. Поскольку в среде с затуханием перемещения обращаются в нуль на бесконечности ( $x_2 \rightarrow \infty$ ), то, как следует из (2.11), при отсутствии демпфирования отраженные волны должны быть убывающими по  $x_2$  (неоднородные волны). Отсюда вытекает, что

$$\mu_m = \sqrt{p^2 - \gamma_m^2} \quad (|p| > \gamma_m), \quad \mu_m = -i\sqrt{\gamma_m^2 - p^2} \quad (|p| < \gamma_m) \quad (2.12)$$

Если граница полуплоскости свободна от сил ( $A=-1$ ), то уравнение  $\Delta_0 = \lambda_2^2 - p^2 \mu_1 \mu_2 = 0$  имеет два действительных корня  $\pm \gamma_m$ , противоположных по знаку. При условии (2.12) других корней нет [8].

Однозначное определение функций  $V_{km}$  сводится к указанию способа вычисления несобственных интегралов в (2.11). Физически неоднозначность амплитуд перемещений  $V_{km}$  связана с тем, что суперпозиция неоднородных продольных и поперечных волн вблизи границы полуплоскости

образует поверхностную волну Релея с произвольной амплитудой [9], вклад которой в суммарное волновое поле определяется при помощи метода контурного интегрирования в комплексной плоскости [10].

При переходе от (2.11) к контурным интегралам замыкание контура производится в верхней полуплоскости. Поскольку подынтегральные функции в (2.11) например при  $x_1 - \xi = 0$ , не удовлетворяют условиям леммы Жордана, запишем функции  $e_\nu(W)/\Delta_0(W)$  в виде

$$e_\nu(W)/\Delta_0(W) = \psi_\nu(W) + \theta_\nu(W) \quad (\nu=1, 2, 3) \quad (2.13)$$

где  $\psi_\nu(W)$  — некоторые функции комплексного переменного  $W = p + iy$ , не имеющие полюсов ни на оси  $p$ , ни на оси  $y$  и обладающие тем свойством, что функции  $\theta_\nu(W)$  стремятся к нулю быстрее, чем  $1/\psi_\nu(W)$ , когда  $|W|$  неограниченно возрастает.

Построение  $\psi_\nu(W)$  основано на разложении функций  $e_\nu(W)$ ,  $\Delta_0(W)$  в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки и следующих асимптотических формулах:

$$\begin{aligned} \frac{1}{W^2} &= W^2 \frac{W^4 + 1}{W^8 + W^4 + 1} + O(|W|^{-10}) \\ \frac{1}{W^6} &= \frac{W^2}{W^8 + W^4 + 1} + O(|W|^{-10}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Представление (2.13) позволяет каждый из интегралов в (2.14) разбить на два. В первом, содержащем  $\psi_\nu(W)$ , подынтегральная функция уже не имеет полюсов на действительной оси, и он сходится ввиду наличия экспоненциально убывающего множителя. Во втором, содержащем  $\theta_\nu(W)$ , подынтегральная функция удовлетворяет условиям леммы Жордана и, следовательно, возможен переход к контурным интегралам.

Окончательно выражения для амплитуд перемещений  $k$ -го состояния  $V_{km}$  в полуплоскости с границей, свободной от сил, приобретают вид

$$V_{km} = E_{km} + F_{km}, \quad E_{km} = L_{mk} \theta, \quad \theta = [\psi(\gamma_1 r) - \psi(\gamma_2 r)] / (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \quad (2.15)$$

$$F_{1m} = \frac{1}{2\pi\mu\gamma_2^2} \sum_{l=1}^4 f_{1m3}, \quad f_{1m1} = \pi i \sum_{n=1}^5 \frac{d_{1mn}(x_2, \eta)}{d_n} \exp(ip_n |x_1 - \xi|)$$

$$f_{1m2} = \int_0^\infty T_{1m}(p, x_1, x_2, \xi, \eta) dp, \quad f_{1m3} = \int_0^\infty Z_{1m}(p, x_2, \eta) e^{-u} dp$$

$$f_{114} = i \int_0^{\gamma_2} \text{Im} \left\{ \frac{G_{11}(p, x_2, \eta)}{\Delta_0(p)} \right\} e^{iu} dp, \quad f_{124} = \int_0^{\gamma_2} \text{Re} \left\{ \frac{G_{12}(p, x_2, \eta)}{\Delta_0(p)} \right\} e^{iu} dp$$

$$d_5 = d\Delta_0/dp|_{p=p_5=\gamma_2}, \quad d_n = -df/dp|_{p=p_n} \quad (n=1, 4); \quad f(p) = p^8 + p^4 + 1$$

$$d_{1m5} = D_{1m}(\gamma_2, x_2, \eta), \quad T_{11} = [\mu_2(Y_{12} + Y_{21})\psi_1 - (p^2 Y_{11}/\mu_1 + \mu_2 Y_{22})\psi_3] \cos u$$

$$T_{12} = [(Y_{11} + Y_{22})\psi_3 - Y_{12}\psi_2 - Y_{21}\psi_1] p \sin u, \quad \psi_\nu = \psi_\nu(p)$$

$$Z_{11} = -r_2 T_1 (\cos y_{12} + \cos y_{21}) + T_3 [(p^2/r_1) \cos y_{11} + r_2 \cos y_{22}]$$

$$Z_{12} = \alpha_1 [-T_2 \sin y_{12} - T_1 \sin y_{21} + T_3 (\sin y_{11} + \sin y_{22})]$$

$$T_\nu = \theta_\nu(ip), \quad r_k = \sqrt{p^2 + \gamma_k^2}, \quad y_{jl} = r_j x_2 + r_l \eta \quad (\nu=1, 3; j, l=1, 2)$$

Функции  $G_{1m}$  принимают вид  $D_{1m}$ , фигурирующих в (2.14), при условии, что в выражениях для последних  $e_\nu/\Delta_0$  заменены на  $e_\nu/\Delta_0 - \psi_\nu$  ( $\psi_\nu(p) = t_\nu(p)/f(p)$ ); при  $n=1, 4$  функции  $d_{1mn}$  получаются из  $C_{1m}(p_n, x_2, \eta)$  заменой  $e_\nu(p_n)$  на  $t_\nu(p_n)$ ;  $p_n$  — корни уравнения  $f(p) = 0$ , лежащие в верхней полуплоскости. Амплитуды перемещений второго состояния могут быть

получены из выражений для амплитуд перемещений первого состояния. Для этого в представлениях функций  $f_{1m}$  необходимо поменять местами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ,  $r_1$  и  $r_2$ ; при этом функций  $f_{22}$  соответствует функция  $f_{11}$ , а  $f_{21}-f_{12}$ , взятая с обратным знаком.

3. Запишем следующие представления для амплитуд перемещений и напряжений возмущенного волнового поля поставленной краевой задачи. В предположении, что кривизна  $L$  удовлетворяет условию Гельдера [11]:

$$V_m(x_1, x_2) = \int_L Q_k(s) V_{km}(x_1, x_2, \xi, \eta) ds \quad (m, k=1, 2) \quad (3.1)$$

$$S_{mn}(x_1, x_2) = \int_L Q_k(s) S_{kmn}(x_1, x_2, \xi, \eta) ds$$

Здесь  $Q_k(s) = [S_k]$  — амплитуды скачков напряжений на  $L$ .

При таком выборе представлений разность краевых значений (1.4) автоматически обращается в нуль, а их сумма приводит к уравнениям Фредгольма первого рода, численная реализация которых затруднительна. Поэтому целесообразно продифференцировать краевое условие (1.4) по дуговой координате  $s$ . Соответствующие производные от амплитуд перемещений (3.1) на  $L$  имеют вид (суммирование по  $k$ ):

$$\frac{dV_m}{ds_0} = -\frac{\beta_1}{2} \int_L [h_{km} + H_{km}] Q_k(s) ds \quad (m, k=1, 2) \quad (3.2)$$

$$h_{km} = 2\kappa \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi_0}}{\xi - \xi_0} \delta_{km}, \quad H_{12} = E + \frac{\partial F_{12}}{\partial s_0}$$

$$H_{21} = E + \frac{\partial F_{21}}{\partial s_0}, \quad H_{kk} = (-1)^{k+1} \operatorname{Re} g + R_{kk} + \frac{\partial F_{kk}}{\partial s_0}$$

$$g = [\exp(i\varphi_0 - 2i\alpha_0) - \exp(-i\varphi_0)] / (\xi - \xi_0)$$

$$E = -\operatorname{Im} g + R_{12}, \quad R_{kk} = (\pi i / 2) \{ (-1)^{k+1} \Phi_{33} \cos(3\alpha_0 - \varphi_0) + \Phi_{31} [2\kappa \cos(\alpha_0 - \varphi_0) - \cos(\alpha_0 + \varphi_0)] - 2\gamma_2^2 (\kappa - 1) \Phi_{11} \cos(\alpha_0 - \varphi_0) \}$$

$$R_{12} = R_{21} = (\pi i / 2) [\Phi_{33} \sin(3\alpha_0 - \varphi_0) - \Phi_{31} \sin(\alpha_0 + \varphi_0)]$$

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu, \quad \Phi_{km} = \frac{\gamma_1^k H_m(\gamma_1 r_0) - \gamma_2^k H_m(\gamma_2 r_0)}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}$$

$$H_1(x) = 2i / (\pi x) + H_1^{(1)}(x), \quad H_3(x) = 16i / (\pi x^3) + 2i / (\pi x) + H_3^{(1)}(x)$$

$$\xi = \xi + i\eta \in L, \quad \xi_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$$

$$\xi - \xi_0 = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad \beta_1 = (\lambda + \mu) c / (4\pi)$$

Здесь  $h_{kk}$  — сингулярное ядро,  $H_{km}$  — регулярные ядра,  $\varphi_0$  — угол наклона касательной к  $L$  в точке  $\xi_0$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона, функции  $F_{km}$  имеют вид (2.11) в случае закрепленной границы (звездочка опускается) и (2.15) для границы  $x_2=0$ , свободной от сил.

Модифицированное краевое условие приводит к системе сингулярных интегральных уравнений (суммирование по  $k$ ):

$$\int_L (h_{km} + H_{km}) Q_k(s) ds = N_m \omega_0 + M_m \quad (m, k=1, 2) \quad (3.3)$$

$$N_1 = 2 \sin \varphi_0 / \beta_1, \quad N_2 = -2 \cos \varphi_0 / \beta_1$$

Здесь первое слагаемое в правой части характеризует поворот вставки как жесткого целого, второе — представляет собой результат наложения падающей  $U_m^{(0)}$  и отраженной  $U_m^{(1)}$  волн.

Если из бесконечности излучается продольная волна (1.1), то

$$U_1^{(0)}=0, \quad U_2^{(0)}=-i\gamma_1\tau_1 \exp(-i\gamma_1\eta_0) \quad (3.4)$$

$$U_1^{(1)}=0, \quad U_2^{(1)}=i\gamma_1\tau_1 \exp(i\gamma_1\eta_0), \quad M_1=0 \\ M_2=-(2/\beta_1)\gamma_1^2\tau_1[\exp(-i\gamma_1\eta_0)+A \exp(i\gamma_1\eta_0)] \sin \varphi_0$$

Для падающей волны сдвига (1.2) имеем

$$U_1^{(0)}=-i\gamma_2\tau_2 \exp(-i\gamma_2\eta_0), \quad U_2^{(0)}=0 \quad (3.5)$$

$$U_1^{(1)}=i\gamma_2\tau_2 \exp(i\gamma_2\eta_0), \quad U_2^{(1)}=0, \quad M_2=0 \\ M_1=-(2/\beta_1)\gamma_2^2\tau_2[\exp(-i\gamma_2\eta_0)+A \exp(i\gamma_2\eta_0)] \sin \varphi_0$$

К системе (3.3) необходимо присоединить условие равенства нулю главного вектора сил, возникающих на обоих берегах  $L$ :

$$\int_L Q_k(s) ds = 0 \quad (k=1, 2) \quad (3.6)$$

Условие равенства нулю главного момента сил, возникающих на  $L$ , имеет вид

$$M = \int_L [Q_1(s) \operatorname{Im}(\zeta - a) - Q_2(s) \operatorname{Re}(\zeta - a)] ds = 0 \quad (3.7)$$

Соотношения (3.3), (3.6), (3.7) однозначно определяют функции  $Q_k(s)$  в классе  $h_0$  [11] и жесткий поворот  $\omega_0$ .

Решение интегральных уравнений (3.3) представим в виде

$$Q_k(s) = Q_k^0(s) / \sqrt{(\zeta - a)(\zeta - b)} = \Omega_k(\beta) / (s'(\beta) \sqrt{1 - \beta^2}) \quad (3.8)$$

При этом контур  $L$  записывается в параметрической форме  $\zeta = \zeta(\beta)$ ,  $\zeta_0 = \zeta(\beta_0)$ ,  $-1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1$ .

4. Произведем асимптотический анализ компонент тензора напряжений. Для этого воспользуемся представлением интеграла типа Коши в окрестности концов линии интегрирования [11], а также асимптотической формулой

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L Q_k(s) \frac{\zeta - z}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2} ds = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ i \end{array} \right\} \frac{\Omega_k(\mp 1)}{\sqrt{\rho_0 s'(\mp 1)}} [1 + \\ + \exp(2i\alpha_c)] \exp[i(\alpha_c/2 + 3\varphi_c)] + O(\rho_0) \quad (4.1) \\ z - c = \rho_0 e^{i\theta_c}, \quad \alpha_c = \theta_c - \varphi_c$$

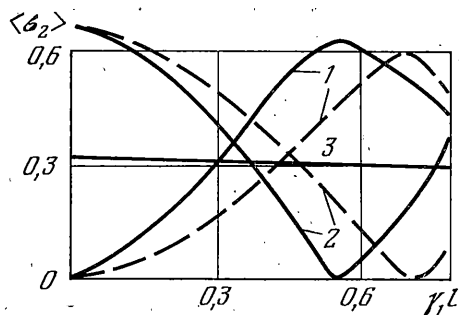
Здесь  $\rho_0$  — расстояние от рассматриваемой точки до вершины  $c$  ( $c = a$  при  $\beta = -1$ ,  $c = b$  при  $\beta = 1$ ),  $\varphi_c$  — угол между касательной в точке  $c$  и осью  $x_1$ ; верхние значения соответствуют вершине  $\beta = -1$ , нижние —  $\beta = 1$ .

Выделим сингулярные члены в выражениях для  $S_{kmn}$ :

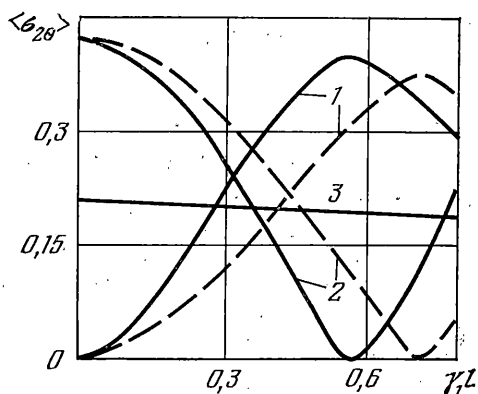
$$S_{111} = \beta_2(G_1 + a_2 R_1) + \alpha_{111}, \quad S_{112} = -\beta_2(G_2 + \kappa R_2) + \alpha_{112} \quad (4.2) \\ S_{122} = -\beta_2(G_1 + a_3 R_1) + \alpha_{122}, \quad S_{211} = -\beta_2(G_2 - a_3 R_2) + \alpha_{211} \\ S_{212} = -\beta_2(G_1 - \kappa R_1) + \alpha_{212}, \quad S_{222} = \beta_2(G_2 - a_2 R_2) + \alpha_{222}$$

$$G = G_1 + iG_2 = \frac{\exp(-2i\alpha)}{r - \gamma}, \quad R = R_1 + iR_2 = \frac{1}{r - \gamma}$$

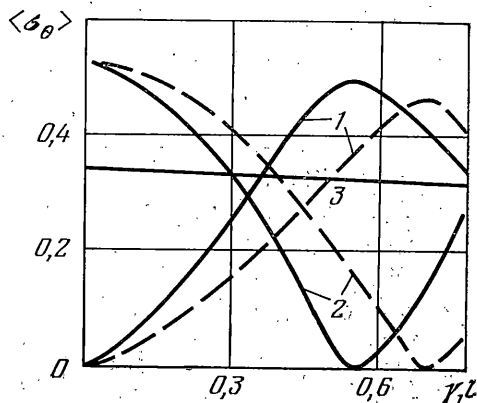
$$z - \xi = r e^{i\alpha}, \quad \beta_2 = 2\mu\beta_1, \quad a_1 = 2\kappa - 1, \quad a_2 = \kappa + 2, \quad a_3 = \kappa - 2$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

где  $G_k, R_k$  — действительные функции,  $\alpha_{kmn}$  — регулярные члены, выражения для которых в силу громоздкости не приводятся.

Учитывая (4.1), (4.2), приходим к следующим асимптотическим формулам для  $S_{mn}$  ( $S_{11}=\sigma_1, S_{12}=\sigma_2, S_{22}=\sigma_3$ ):

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{\sigma_j}{P_0} \sqrt{\frac{2\rho_0}{l}} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{l} s'(\mp 1)} [\bar{b}_1 Z_1(\mp 1) \pm (-1)^j \bar{b}_2 Z_2(\mp 1)] \quad (4.3)$$

$$Z_1 = \Omega_1 + i\Omega_2, \quad Z_2 = \Omega_1 - i\Omega_2,$$

$$b_1 = \sqrt{\bar{b}_2} [4(2-j)b_3 + b_3^3(1+b_2^2) \pm 2\kappa(-1)^j \bar{b}_2 \bar{b}_3],$$

$$b_2 = e^{i\alpha_c}, \quad b_3 = e^{i\varphi_c} \quad (j=1, 2, 3)$$

где  $P_0$  — максимальное значение амплитуды напряжений в падающей волне,  $2l$  — длина дуги  $L$ .

5. При проведении расчетов уравнения (3.3), (3.6), (3.7) сводились к системе линейных алгебраических уравнений по схеме [12]. Интегралы Фурье в ядрах системы (3.3) вычислялись по правилу трапеций с экстраполяцией по методу Ричардсона [13].

С ростом коэффициента Пуассона  $\nu$  от  $\nu=0$  ( $\gamma_2/\gamma_R=0,874$ ) до  $\nu=0,5$  ( $\gamma_2/\gamma_R=0,955$ ) значение  $\gamma_2/\gamma_R$  меняется почти по линейному закону. Для приближенного вычисления  $\gamma_2/\gamma_R$  использовалась аппроксимация [10]:  $\gamma_2/\gamma_R=(0,87+1,12\nu)/(1+\nu)$ . Сравнение значений  $\gamma_R$ , определяемых по данной формуле, с точным решением уравнения  $\Delta_0(p)=\lambda_2^2-p^2\mu_1\mu_2=0$  показывает, что погрешность аппроксимации не превышает 0,5%.

В качестве примера рассматривалась параболическая вставка  $\xi=s_1\beta, \eta=H+s_2\xi^2$  ( $-1 \leq \beta \leq 1$ ). На фиг. 2-4 представлены результаты расчетов максимальных значений величин  $\langle \sigma_r \rangle = \langle \sigma_1 \rangle \cos^2 \psi_b + \langle \sigma_2 \rangle \sin^2 \psi_b + \langle \sigma_3 \rangle \sin^2 \psi_b$ ,  $\langle \sigma_{r\theta} \rangle = \langle \sigma_2 \rangle \cos 2\psi_b + (1/2)(\langle \sigma_1 \rangle - \langle \sigma_3 \rangle) \sin 2\psi_b$ ,  $\langle \sigma_\theta \rangle = \langle \sigma_1 \rangle \sin^2 \psi_b - \langle \sigma_2 \rangle \sin 2\psi_b + \langle \sigma_3 \rangle \cos^2 \psi_b$ .

В качестве действующей нагрузки рассматривалась волна расширения (1.1). Сплошные линии соответствуют случаю  $s_2=0,5$ , штриховые —  $s_2=-0,5$ . Кривые 1-3

построены в функции параметра  $l_1 = \gamma_1 l$  при  $s_1 = 1$ ,  $H = 3$ ,  $\nu = 0,1$  для свободной ( $A = -1$ ), закрепленной ( $A = 1$ ) полуплоскости и неограниченной среды ( $A = 0$ ) соответственно. Углы  $\psi_b$ , при которых  $\langle \sigma_r \rangle$ ,  $\langle \sigma_{r\theta} \rangle$ ,  $\langle \sigma_\theta \rangle$  достигают своих максимальных значений для данных конфигураций вставки, соответственно, равны  $150$ ,  $330$ ,  $30^\circ$  при  $s_2 = 0,5$  и  $210$ ,  $30$ ,  $330^\circ$  при  $s_2 = -0,5$ .

Результаты расчетов показывают, что при  $A = 0$  величины  $\langle \sigma_r \rangle$ ,  $\langle \sigma_{r\theta} \rangle$ ,  $\langle \sigma_\theta \rangle$  почти не изменяются с увеличением частоты. В полуплоскости ( $A \neq 0$ ) для заданной конфигурации дефекта и его расположения относительно границы, как и в продольном сдвиге [4], существуют такие волновые числа, для которых сингулярные части напряжений близки к нулю или достигают своих максимальных значений, причем максимальным значениям напряжений для свободной полуплоскости приблизительно соответствуют минимальные значения напряжений для закрепленной полуплоскости и наоборот.

Следует отметить, что используемая численная схема оказывается эффективной при  $(1/2)H/l \geq 1$ . В этом случае для достижения точности в  $1\%$  достаточно взять число узлов разбиения  $N = 19$ . Если же вставка расположена близко к границе, то погрешности резко возрастают, причем наблюдаются неустойчивости в счете. Так, при  $H/l = 0,5$  для достижения точности в двух значащих цифрах необходимо (граница свободна от сил) брать  $N = 67$ . При этом на расчет одного варианта затрачивается около  $30$  мин на ЭВМ ЕС-1022.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Паргон В. З., Морозов Е. Н. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
2. Sih G. C., Loebner J. F. Wave propagation in an elastic solid with a line of discontinuity of finite crack. — Quart. Appl. Math., 1969, v. 27, No. 2, p. 193–213.
3. Паргон В. З., Кудрявцев Б. А. Динамическая задача механики разрушения для плоскости с включением. — В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975, с. 379–384.
4. Назаренко А. М., Фильштинский Л. А. Дифракция волны продольного сдвига на туннельной жесткой криволинейной вставке в упругом полупространстве. — Проблемы прочности, 1983, № 4, с. 26–28.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
8. Паргон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
10. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
11. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
12. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 304 с.
13. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. М.: Мир, 1977. 584 с.

Сумы

Поступила в редакцию  
29.XI.1983