

УДК 539.3

О ДАВЛЕНИИ УПРУГОГО КЛИНА НА ПОЛУПЛОСКОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ КОНТАКТНОГО ТРЕНИЯ

НУЛЛЕР Б. М., ШЕХТМАН И. И.

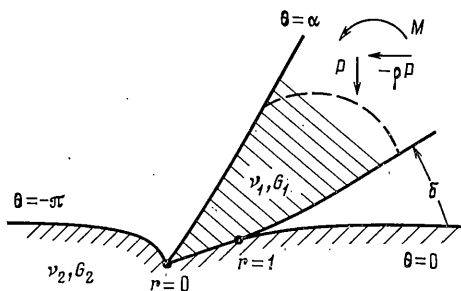
Рассматривается задача о контактном взаимодействии упругого клина и упругой полуплоскости из разных материалов. Предполагается, что клин либо медленно скользит вдоль границы полуплоскости, касаясь ее на конечном участке одной гранью, либо неподвижен, но находится на пороге равновесия. На бесконечности клин нагружен изгибающим моментом и силой, направленной под углом трения к полуплоскости.

Задача сведена к уравнению Випера – Хопфа. Коэффициент уравнения, типичный для смешанных задач с условием предельного трения, существенно отличается от ранее изучавшихся коэффициентов. Предложен эффективный способ его факторизации. Задача решена в квадратурах.

Подобные задачи возникают в теории резания [1, 2], при определении трещиностойкости и износа трущихся деталей механизмов и машин, в теории фундаментов и оснований. В связи с этим исследованы порядки особенностей и коэффициенты интенсивности напряжений у концов зоны контакта, зависящие от коэффициента трения, геометрических и упругих характеристик клина и полуплоскости. Получена формула, определяющая величину механически реализуемой зоны контакта.

1. Пусть упругий клин $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ соприкасается с упругой полуплоскостью $0 \leq r < \infty$, $-\pi \leq \theta \leq 0$ на участке границы $0 \leq r \leq 1$, $\theta = 0$ в условиях предельного трения. Вне этого участка клин и полуплоскость не нагружены. Пусть G_j и ν_j – модули сдвига и коэффициенты Пуассона клина ($j=1$) и полуплоскости ($j=2$), u_j , v_j – радиальные и угловые перемещения, $\tau_j = \tau_{r\theta j}$, $\sigma_j = \sigma_{\theta j}$, σ_{rj} – касательное и нормальное напряжения в j -й области, r , θ – полярные координаты, $|\rho|$ – коэффициент трения. На бесконечности к клину приложены вертикальная по отношению к полуплоскости сила P , горизонтальная сила ρP и изгибающий момент M (фиг. 1), к полуплоскости – уравновешивающая нагрузка без постоянной составляющей. Требуется найти деформации клина и полуплоскости.

Задачу можно сформулировать в равносильной, но несколько иной постановке, соответствующей работе резца (клина) перед разрушением материала (полуплоскости). Предположим, что до деформации клин и полуплоскость имеют только одну общую точку $r=0$. Угол между гранями $\theta=0$ клина и полуплоскости равен δ . Требуется погрузить острие клина в полуплоскость, не нарушая сплошности и не поворачивая клин как жесткое тело. С указанной целью к клину прикладываются прежние силы P , ρP и такой заранее неизвестный момент M , что при сохранении угла δ на бесконечности участки смежных граней $0 \leq r \leq 1$, $\theta=0$ входят в контакт друг с



Фиг. 1

другом. Граничные условия для этого варианта задачи имеют вид: $\sigma_2 = \tau_2 = 0$ ($\theta = -\pi$, $0 \leq r < \infty$), $\sigma_1 = \tau_1 = 0$ ($\theta = \alpha$, $0 \leq r < \infty$), $\sigma_1 = \sigma_2$, $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1 + \rho\sigma_1 = 0$, $v_2 - v_1 = \delta r$ ($\theta = 0$, $0 \leq r \leq 1$); $\sigma_1 = \tau_1 = 0$, $\sigma_2 = \tau_2 = 0$ ($\theta = 0$, $1 < r < \infty$).

После перегруппировки им целесообразно придать следующую форму, приводящую сразу к скалярному (а не векторному) уравнению Винера — Хопфа:

$$\begin{aligned} \sigma_1(r, 0) = \sigma_2(r, 0), \quad \tau_1(r, 0) = \tau_2(r, 0) \quad (0 \leq r < \infty) \\ \tau_1(r, 0) + \rho\sigma_1(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r < \infty) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\sigma_1(r, \alpha) = \tau_1(r, \alpha) = \sigma_2(r, -\pi) = \tau_2(r, -\pi) = 0 \quad (0 \leq r < \infty) \quad (1.2)$$

$$v_2(r, 0) - v_1(r, 0) = \delta r \quad (0 \leq r \leq 1), \quad \sigma_1(r, 0) = 0 \quad (1 < r < \infty) \quad (1.3)$$

Здесь $\rho > 0$ ($\rho < 0$), если клин движется вправо (влево) по полуплоскости или находится в крайнем правом (левом) положении предельного равновесия; предполагается, что $\sigma_1(r, 0) \leq 0$ при $r \in [0, 1]$.

Решение будем искать в интегралах Меллина [3]:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} u_j(r, \theta) \\ v_j(r, \theta) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\langle (p \pm \kappa_j) \left[A_{j1}(p) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} (p+1)\theta \mp \right. \right. \\ \mp A_{j2}(p) \left\{ \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (p+1)\theta \left. \right] + (p-1) \left[A_{j3}(p) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} (p-1)\theta \mp \right. \\ \left. \mp A_{j4}(p) \left\{ \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} (p-1)\theta \right] \right\rangle \frac{dp}{r^p} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$, контур L — прямая $\operatorname{Re} p = \lambda$, $\lambda < 0$.

Из (1.4) и основных условий (1.1), (1.2) следует

$$A_{js}(p) = A(p) \Delta_{js} (\Delta_{r1} + \Delta_{rs}) \quad (r = 3 - j; s = 1, 2, 3, 4) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1s} = \Delta_s(\alpha), \quad \Delta_{2s} = \Delta_s(-\pi), \quad \Delta_s = \Delta_s(\theta) \\ \Delta_1 = (p-1)(\delta_+ - \rho\gamma_-), \quad \Delta_2 = (p-1)(\gamma_+ + \rho\delta_-) \\ \Delta_3 = (p+1)\delta_- + \rho(p-1)\gamma_-, \quad \Delta_4 = -(p+1)\gamma_+ + \rho(p-1)\delta_+ \\ \delta_{\pm} = \delta_{\pm}(\theta) = 2(p \sin^2 \theta \pm \sin^2 p\theta), \quad \gamma_{\pm} = \gamma_{\pm}(\theta) = p \sin 2\theta \pm \sin 2p\theta \end{aligned}$$

Подставив (1.4) в (1.3), получим два соотношения

$$\begin{aligned} \delta(p+1)^{-1} + v^-(p) = A(p)F_1(p), \quad \sigma^+(p) = A(p)F_2(p) \quad (1.6) \\ F_1(p) = (2G_1)^{-1} (gC_{12}C_{21} - C_{11}C_{22}), \quad F_2(p) = p(p-1)C_{12}C_{22}, \quad g = G_1G_2^{-1} \end{aligned}$$

$$v^-(p) = \int_1^{\infty} [v_2(r, 0) - v_1(r, 0)] r^{p-1} dr, \quad \sigma^+(p) = \int_0^1 \sigma_1(r, 0) r^p dr$$

$$C_{j1} = (p-1)\Delta_{j4} + (p-\kappa_j)\Delta_{j2}, \quad C_{j2} = \Delta_{j1} + \Delta_{j3}$$

Исключив из них функцию $A(p)$, получим уравнение Винера — Хопфа

$$\begin{aligned} v^-(p) = K(p)\sigma^+(p) - \delta(p+1)^{-1} \quad (p \in L) \quad (1.7) \\ K(p) = F_1(p)F_2^{-1}(p) = [2Gp(p-1)]^{-1} (gC_{21}C_{22}^{-1} - C_{11}C_{12}^{-1}). \end{aligned}$$

Перейдем к исследованию и факторизации функции $K(p)$. Представим ее в форме

$$K(p) = (4G_1p)^{-1}M(p), \quad M(p) = M_1(p) + iM_2(p) \quad (1.8)$$

где $M_1(p)$ и $M_2(p)$ — вещественная и мнимая части функции $M(p)$.

Согласно (1.4) — (1.7), на мнимой оси $p = i\gamma$ имеем

$$\begin{aligned} M_1(i\gamma) = \rho [g(1-\kappa_2) + \Delta^{-1}(\gamma) [(\kappa_1-1) \operatorname{sh}^2 \alpha \gamma + 2\gamma^2 \sin^2 \alpha]] \\ M_2(i\gamma) = g(\kappa_2+1) \operatorname{ctg} \pi \gamma + \Delta^{-1}(\gamma) (\kappa_1+1) [\rho \gamma \sin^2 \alpha + \\ + \frac{1}{2} (\operatorname{sh} 2\alpha \gamma + \gamma \sin 2\alpha)], \quad \Delta(\gamma) = \operatorname{sh}^2 \alpha \gamma - \gamma^2 \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отсюда видно, что при $\gamma \rightarrow \pm\infty$ функция $M(i\gamma) \rightarrow (A \pm iB)$, точнее

$$\begin{aligned} M(p) &= A - [B + M_3(p)] \operatorname{ctg} 2\alpha p, & M_3(i\gamma) &= O(\exp(-2\alpha|\gamma|)) \\ A &= \rho[\kappa_1 - 1 - \dot{g}(\kappa_2 - 1)], & B &= \kappa_1 + 1 + g(\kappa_2 + 1) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Такое поведение характерно для задач с условием предельного трения при $\rho \neq 0$. При $\rho = 0$, а также при других естественных условиях контакта обычно $A = 0$.

Пусть $\rho \geq 0$. Тогда на мнимой оси функция $M(p) \operatorname{tg} 2\alpha p$ удовлетворяет условию Гельдера. Согласно (1.9), $\Delta(\gamma) \geq 0$, $M_2(i\gamma) \operatorname{th} 2\alpha\gamma > 0$, поэтому $\operatorname{Re} [M(p) \operatorname{tg} 2\alpha p] < 0$ при $\operatorname{Re} p = 0$. Отсюда следует, что на мнимой оси индексы функций $M(p) \operatorname{tg} 2\alpha p$ и $A \operatorname{tg} 2\alpha p - B$ одинаковы и равны разности аргументов их предельных значений $\pm Ai - B$, а отношение этих функций

$$K_2(p) = 1 + (A - B \operatorname{ctg} 2\alpha p)^{-1} M_3(p) \operatorname{ctg} 2\alpha p \quad (1.11)$$

не обращается в нуль, удовлетворяет условию Гельдера и имеет индекс, равный нулю.

Разобьем функцию $K(p)$ на множители, удобные для факторизации. Обобщая способ [4] и полагая

$$K(p) = K_1(p) K_2(p), \quad K_1(p) = (4G_1 p)^{-1} (A - B \operatorname{ctg} 2\alpha p) \quad (1.12)$$

функцию $K_1(p)$ запишем в виде

$$K_1(p) = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \sin(2\alpha p - N\pi)}{4G_1 p \sin 2\alpha p}, \quad N = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{A}{B} \quad (1.13)$$

Отметим, что $0 < N < 1$; если контактное трение отсутствует, то $\rho = 0$, $A = 0$, $N = 1/2$ и по аналогии с разбиением [4] $K_1(p) = -B(4G_1 p)^{-1} \operatorname{ctg} 2\alpha p$.

Факторизацию $K_s(p) = [K_s^+(p)]^{-1} K_s^-(p)$ ($s = 1, 2$) при $s = 1$ можно осуществить элементарными средствами, воспользовавшись формулой $\sin \pi z = \pi \Gamma^{-1}(z) \Gamma^{-1}(1-z)$. Имеем

$$K_1^+(p) = \Gamma(1 + \beta p - N) \Gamma^{-1}(1 + \beta p) \quad (1.14)$$

$$K_1^-(p) = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} (\beta p - N) \Gamma(1 - \beta p)}{4G_1 \beta p^2 \Gamma(1 - \beta p + N)}, \quad \beta = \frac{2\alpha}{\pi}$$

Учитывая свойства функции $K_2(p)$, ее легко факторизовать методом Ф. Д. Гахова [5], выписав решение однородной задачи Римана с коэффициентом $K_2(p)$ на мнимой оси

$$K_2^\pm(p) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln K_2(t) dt}{t-p} \right\} \quad (1.15)$$

Здесь, как и раньше, в отличие от [5] функция с верхним индексом (+) регулярна в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$.

В силу обобщенной теоремы Лиувилля решение однородного уравнения (1.7) имеет вид

$$\sigma_0^+(p) = P_n(p) K^+(p), \quad \sigma_0^-(p) = P_n(p) K^-(p), \quad K^\pm(p) = K_1^\pm(p) K_2^\pm(p) \quad (1.16)$$

Степень полинома $P_n(p)$ найдем из условия интегрируемости напряжений $\sigma_1(r, 0)$ в окрестности точки раздела условий $r = 1 - 0$. Согласно (1.14), (1.15) и асимптотической формуле Стирлинга, при $p \rightarrow \infty$ формула $K_1^+(p) = O(p^{-N})$, $K_2^+(p) = O(1)$. Отсюда и из (1.6), (1.16) по теореме абелева типа ([6], с. 48) следует, что при $r \rightarrow 1 - 0$ напряжение $\sigma_1(r, 0) = O[(1-r)^{N-n-1}]$. Так как $0 < N < 1$, то $n = 0$, $P_n = C$.

Общее решение уравнения (1.7) легко найти по теореме Лиувилля [6], оно имеет вид

$$\sigma^+(p) = K^+(p) \{C + \delta [(p+1) K^{-1}(-1)]^{-1}\} \quad (1.17)$$

Отсюда и из (1.14) следует, что коэффициент интенсивности и характер особенности контактных напряжений $\sigma_1(r, 0)$ при $r \rightarrow 1-0$ определяются формулой $\sigma_1(r, 0) = C\Gamma(N)\beta^{-N}(1-r)^{N-1} + O[(1-r)^N]$.

Постоянную C найдем из условия равновесия клина, которое согласно (1.6) выражается равенством $\sigma^+(0) = -P$; в силу (1.17)

$$C = -P[K^+(0)]^{-1} - \delta[K^-(-1)]^{-1} \quad (1.18)$$

Силы P и ρP рассматриваются в задаче как компоненты главного вектора напряжений в сечениях клина $r = \text{const} > 1$, момент M — как их главный момент относительно точки $r = 0$. Единственное решение с главным вектором, отличным от нуля, которое имеется в разложении интегралов (1.4) в ряды по вычetaм при $r > 1$, содержит только радиальные напряжения $\sigma_r = O(r^{-1})$; $\tau_{r\theta} = \sigma_\theta = 0$. Так как момент любых напряжений σ_r равен нулю, то во второе условие равновесия клина (уравнение моментов) силы P и ρP не входят, и согласно (1.6) оно имеет вид $\sigma^+(1) = M$.

Исследуем полученное решение. Согласно условию равновесия клина $\sigma^+(1) = M$ и соотношениям (1.17); (1.18), формула, связывающая величины M , δ и P , имеет вид

$$M = -K^+(1)\{P[K^+(0)]^{-1} + 1/2[\delta K^-(-1)]^{-1}\} \quad (1.19)$$

Отсюда, возвращаясь к первой постановке задачи, легко выразить δ через P и M :

$$\delta = -K^+(0)K^+(1)/\{2K^-(-1)[MK^+(0) + PK^+(1)]\}$$

При условии $C > 0$, соответствующем возникновению сжимающих напряжений $\sigma_1(1-0, 0) < 0$, т. е. при выполнении неравенства

$$P > 4\delta G_1\Gamma(1-N)\Gamma(\beta+N)K_2^+(0)/(\sqrt{A^2+B^2}\Gamma(\beta)K_2^-(-1)) \quad (1.20)$$

решение можно использовать как приближенное для задачи о движении по полуплоскости конечного упругого тела (выделенного на фигуре пунктиром) с учетом лишь главных векторов P , ρP и главного момента M напряжений, заданных на пунктирной линии.

Если пунктирная линия выходит на границу $\theta = 0$ при $r > 1$, то после деформации ненагруженные участки границ клина и полуплоскости в общем случае пересекаются. Во многих приложениях важно знать зону механически реализуемого контакта, когда указанного пересечения не происходит. Для этого необходимо, чтобы $\sigma_1(1-0, 0) = 0$. По теореме абелева типа и в силу (1.17) это условие имеет место при $C = 0$. Пусть $C = 0$, тогда, вводя размерные модули сдвига $G_j^* = G_j a^{-1}$, где a — размерная величина единицы измерения, за которую принято расстояние от вершины клина до точки раздела типов граничных условий, и учитывая, что другие параметры в (1.18), (1.14), (1.15) безразмерны, из (1.18) получим

$$a = P\sqrt{A^2+B^2}\Gamma(\beta)K_2^-(-1)/[4G_1^*\delta\Gamma(\beta+N)\Gamma(1-N)K_2^+(0)] \quad (1.21)$$

Таким образом зона контакта увеличивается с уменьшением δ , α , G_1^* при $G_2^* = \text{const}$, G_2^* при $G_1^* = \text{const}$, G_1^* при $g = \text{const}$ (т. е. с ростом податливости обоих материалов) с увеличением P и $|\rho|$.

Для того чтобы контактные напряжения в окрестности точки $r = 1$ были сжимающими, очевидно, вместе с (1.21) должно выполняться условие $\partial\sigma_1(r, 0)/\partial r > 0$ при $r \rightarrow 1-0$. По аналогии с (1.20) имеем

$$\partial\sigma_1(r, 0)/\partial r \sim T(1-r)^{N-1}, \quad T = \delta^2\Gamma(1-N)K_2^+(0)\Gamma^{-1}(N)P^{-1} \quad (1.22)$$

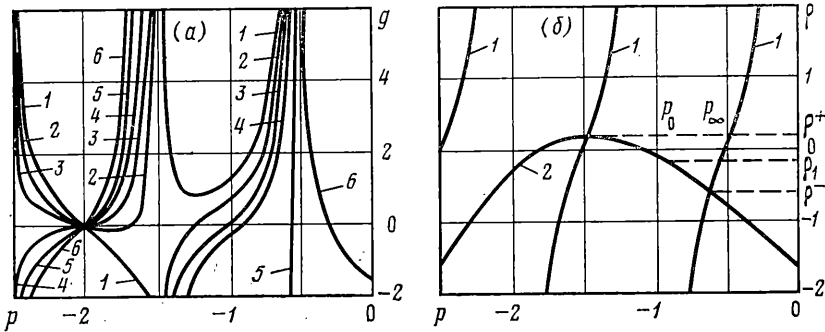
Поскольку $\Gamma(z) > 0$ и $K^+(0) > 0$, требуемое условие выполняется при естественном ограничении $P > 0$ независимо от значений других параметров.

Рассмотрим контактные напряжения $\sigma_1(r, 0)$ вблизи вершины клина при $r \rightarrow 0$. Разлагая интегралы (1.4) в ряды по вычetaм в полюсах $p = p_n$,

слева от L получим

$$\sigma_1(r, 0) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{v^-(p_h) F_2(p_h)}{F_1'(p_h) r^{p_h+1}} = \frac{v^-(p+1) F_2(p_1)}{F_1'(p_1) r^{p_1+1}} + O(r^{-p_2-1}) \quad (1.23)$$

где p_h — нули функции $F_1(p)$, перенумерованные в порядке убывания их вещественной части $\text{Re } p_h < 0$. Можно показать, что в окрестности бесконечно удаленной точки функция $F_1(p)$ имеет счетное множество комплексных и счетное множество вещественных нулей. Наличие и характер особенности в вершине клина определяется согласно (1.23) числом p_1 . Если $\text{Re } p_1 \leq -1$, то особенности нет, в противном случае имеется особенность.



Фиг. 2

Равенство $F_1(-1)=0$, разграничивающее эти случаи, в силу (1.6) представимо в виде

$$\frac{\pi}{g} \frac{(\kappa_2+1)(1-\cos 2\alpha - \alpha \sin 2\alpha)}{(\kappa_1+1)[\rho(1-\cos 2\alpha) + \sin 2\alpha]} = 0$$

причем его левая часть с появлением особенности становится отрицательной.

2. Расчеты на ЭВМ показали, что если $\rho < -3$, то нуль p_1 , оставаясь комплексным, может лежать в полосе $-1 < \text{Re } p \leq 0$ и переходить через мнимую ось в область $\text{Re } p > 0$ при непрерывном изменении ρ , g , α . При физически допустимых значениях параметров α , g , κ_j и при $\rho > -2,5$ в полосе $-1 < \text{Re } p < 0$ величина $\text{Im } p_1 = 0$. На фиг. 2, а показано семейство корней p_1 уравнения $F_1(p)=0$, разрешенного относительно параметра g , т. е. при нескольких значениях ρ построены графики функции $g(p)$, найденной из условий $F_1(p)=0$ и при $\alpha = 1/2\pi$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ имеющей вид

$$g(p) = \frac{\sin \pi p [0,7(2\rho p + \sin \pi p) - \rho p^2 - 0,4\rho \sin^2(1/2\pi p)]}{[p^2 - \sin^2(1/2\pi p)](0,4\rho \sin \pi p + 1,4 \cos \pi p)} \quad (2.1)$$

С изменением ρ интервал (p_0, p_∞) , в котором функция $g(p)$ при $p \in (p_0, p_\infty)$ растет от 0 до ∞ , также изменяется. Согласно (2.1), функция $g(p)$ обращается в бесконечность, если p удовлетворяет равенству $\rho = -3,5 \text{ctg } \pi p$, и равна нулю, если

$$\rho = 0,7 \sin \pi p / [p(p-1,4) + 0,4 \sin^2(1/2\pi p)] \quad (2.2)$$

На фиг. 2, б нанесены графики 1 и 2 функций $\rho(p)$, определяемых формулами (2.1) и (2.2). Абсциссы точек пересечения прямой $\rho = \rho_1$ с этими графиками являются числами p_∞ и p_0 : прямая $\rho = \rho^+$ касается графика 2, прямая $\rho = \rho^-$ проходит через точку пересечения графиков 1 и 2.

Если $\rho_1 > \rho^+$, то функция $g(p)$ (кривая 1, фиг. 2, а) имеет минимум $g^* > 0$. При каждом значении $g > g^*$ эта кривая дает два вещественных

корня p_1 и $p_2 < p_1$. При $g = g^*$ они сливаются, при $g < g^*$ уходят в комплексную плоскость левее прямой $\operatorname{Re} p = -1$. Если $\rho_1 = \rho^+$, то $g^* = 0$. Если $\rho^- < \rho_1 < \rho^+$, то $p_0 < p_\infty$, функция $g(p)$ (кривые 2-4, фиг. 2, а) монотонно возрастает в интервале (p_0, p_∞) . Во всех указанных случаях показатель степени роста напряжений $\sigma_1(r, 0)$ около вершины клина при $r \rightarrow 0$ увеличивается по модулю с увеличением g .

Если $\rho = \rho^-$, то $p_0 = p_\infty = p_1$. Функция $g(p)$ вырождается в вертикальную прямую $p = p_1$. Если $\rho < \rho^-$, то $p_0 > p_\infty$. Функция $g(p)$ монотонно убывает. Следовательно, здесь с увеличением g степень роста напряжений при $r \rightarrow 0$ уменьшается.

Приведенный анализ дает аналогичные качественные результаты и при других значениях α, ν_j .

Замечание. Задача, рассмотренная в [7] поставлена некорректно. При ее решении не используется ни в силовой (M) ни в кинематической (δ) форме одно из условий на бесконечности. В результате в [7] найдено неконтролируемое частное решение задачи. В [8] повторяется та же ошибка и получено аналогичное решение.

Своеобразие клина состоит в том, что при постановке однородных контактных задач для этой области необходимо искусственно вводить ее поворот на бесконечности δr , решая затем неоднородную задачу [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко С. П. Резание металлов. М.-Киев: Машгиз, 1963. 211 с.
2. Ивановский Е. Г. Резание древесины. М.: Наука, 1975. 330 с.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402 с.
4. Нуллер Б. М. Контактная задача для упругого клина, подкрепленного стержнем равного сопротивления. — Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 3, с. 532.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
6. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 278 с.
7. Дыгнов А. Е. Контактная задача для упругих клиньев при наличии трения вдоль примыкающего к общей вершине участка граней. — Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 4, с. 804—808.
8. Кипнис Л. А., Черепанов Г. П. Контактное взаимодействие с трением двух клиновидных упругих тел из различных материалов. — ПММ, 1984, т. 48, вып. 6, с. 1015—1019.
9. Нуллер Б. М. Некоторые контактные задачи для упругого бесконечного клина. — ПММ, 1972, т. 36, вып. 1, с. 158—163.

Ленинград

Поступила в редакцию
23.III.1983