

УДК 539.3

## ЗАДАЧА О ДВУХ ТРЕЩИНАХ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА В СЛОИСТОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

БИРЮКОВ А. П., ГОЛЬДШТЕЙН Р. В., РАБИНОВИЧ М. Л.

Одним из характерных видов разрушения слоистых композиционных материалов является образование трещин по границам раздела слоев. Для анализа условий и закономерностей разрушения материалов в этом случае необходимы решения задач теории упругости, моделирующие характерные случаи расположения трещин. Один из основных случаев моделирует рассматриваемая ниже плоская задача о двух прямолинейных трещинах на параллельных границах упругого слоя, разделяющего две полуплоскости. Свойства всех трех соединенных материалов различны. Приложенные нагрузки представляют произвольную комбинацию отрыва и сдвига.

Задача сводится к системе четырех сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши относительно производных вдоль трещин скачков смещений на трещинах. Решение системы строится численно<sup>1</sup>. Расчеты проведены для широкого круга характерных сочетаний упругих постоянных материалов и геометрических параметров трещин, соответствующие наиболее сильному их взаимодействию. Важно, что эти области различны для условий сдвигового и отрывного нагружения.

Отметим, что задача о двух параллельных трещинах в однородной среде исследовалась в [1]. Задача об одиночной трещине на границе полупространства и слоя, скрепленного с другим полупространством, рассматривалась в осесимметричной [2] и плоской [3] постановках.

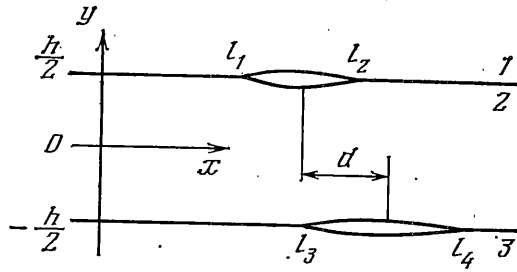
**1. Постановка задачи. Вывод системы сингулярных интегральных уравнений.** 1.1. Рассмотрим упругую среду, состоящую из полупространства (1), соединенного с полупространством (3) промежуточным слоем (2) и находящегося в условиях плоской деформации. Предположим, что на каждой из границ раздела свойств имеется трещина, которая раскрывается заданными на ее поверхностях нормальными и касательными нагрузками (фиг. 1). Будем считать, что вдоль границ раздела вне трещин имеет место полное сцепление материалов. Все величины, относящиеся к различным материалам, будем обозначать индексами один, два, три соответственно.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{yy1} &= \sigma_{yy2}, & \tau_{xy1} &= \tau_{xy2}, & u_{x1} &= u_{x2}, & u_{y1} &= u_{y2} \\ & (y=h/2, & x < l_1, & x > l_2) \\ \sigma_{yy2} &= \sigma_{yy3}, & \tau_{xy2} &= \tau_{xy3}, & u_{x2} &= u_{x3}, & u_{y2} &= u_{y3} \\ & (y=-h/2, & x < l_3, & x > l_4) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_1(x), & \tau_{xy} &= \tau_1(x) & (y=h/2, & x \in [l_1, l_2]) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_2(x), & \tau_{xy} &= \tau_2(x) & (y=-h/2, & x \in [l_3, l_4]) \end{aligned} \quad (1.1)$$

1.2. Для того чтобы свести задачу (1.1) к системе интегральных уравнений, рассмотрим вспомогательную задачу об определении смеще-

<sup>1</sup> См.: Вайншельбаум В. М., Гольдштейн Р. В. Об одном классе смешанных осесимметричных задач теории упругости для многослойных сред. — В кн.: VI Всес. конф. по прочности и пластичности: Тез. докл. М., Изд-е Моск. ин-та стали и сплавов, 1975, с. 8–9.



Фиг. 1

ний точек границы упругой полосы  $\{-h/2 \leq y \leq h/2, -\infty < x < +\infty\}$  при заданных на этих границах нормальных и касательных нагрузках.

В дальнейшем будем использовать преобразование Фурье различных функций по  $x$ :

$$\tilde{f}(\xi) = F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(i\xi x) dx \quad (1.2)$$

Продифференцируем уравнения закона Гука по  $x$  и преобразуем их по Фурье. Воспользовавшись приведенным в [4] решением первой основной задачи теории упругости для полосы, данным в трансформантах Фурье, получим

$$\begin{aligned} \mu R v_1 \tilde{\phantom{x}}(\xi, h/2) &= \sigma_1 \tilde{\phantom{x}}[(\kappa-1)s^2 + 8b^2] - 2\sigma_2 \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1)bs - \\ &\quad - i\tau_1 \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1)(sc-2b) + i\tau_2 \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1)(s-2bc) \\ \mu R v_2 \tilde{\phantom{x}}(\xi, h/2) &= i\sigma_1 \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1)(sc+2b) + i\sigma_2 \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1)(s+2bc) - \\ &\quad - \tau_1 \tilde{\phantom{x}}[(\kappa-1)s^2 + 8b^2] - 2\tau_2 \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1)bs \\ \mu R v_1 \tilde{\phantom{x}}(\xi, -h/2) &= -2\sigma_1 \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1)bs + \sigma_2 \tilde{\phantom{x}}[(\kappa-1)s^2 + 8b^2] - \\ &\quad - i\tau_1 \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1)(s-2bc) + i\tau_2 \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1)(sc-2b) \\ \mu R v_2 \tilde{\phantom{x}}(\xi, -h/2) &= -i\sigma_1 \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1)(s+2bc) + i\sigma_2 \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1)(sc+2b) - \\ &\quad - 2\tau_1 \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1)bs - \tau_2 \tilde{\phantom{x}}[(\kappa-1)s^2 + 8b^2] \\ v_1 &= \partial u_x / \partial x, \quad v_2 = \partial u_y / \partial x, \quad R = 4(s^2 - 4b^2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_k \tilde{\phantom{x}} &= F[\sigma_{yy}(x, (-1)^{k+1}h/2)], \quad \tau_k \tilde{\phantom{x}} = F[\tau_{xy}(x, (-1)^{k+1}h/2)] \quad (k=1, 2) \\ s &= \text{sh}(2b), \quad c = \text{ch}(2b), \quad b = i/2 \xi h \\ \kappa &= 3-4\nu, \quad \mu = i/2 E/(1+\nu) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Формулы (1.3)–(1.4) дают решение вспомогательной задачи. Предельным переходом легко получить решение аналогичной задачи о полуплоскости, нагруженной по границе

$$\begin{aligned} 4\mu v_1 \tilde{\phantom{x}}(\xi) &= \sigma \tilde{\phantom{x}}(\kappa-1) + ik\tau \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1) |\xi|/\xi \\ 4\mu v_2 \tilde{\phantom{x}}(\xi) &= ik\sigma \tilde{\phantom{x}}(\kappa+1) |\xi|/\xi - \tau \tilde{\phantom{x}}(\kappa-1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $k$  принимает значение единица для верхней и минус единица для нижней полуплоскостей.

1.3. Получим теперь систему четырех сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши относительно производных по  $x$  от разностей смещений поверхностей трещин

$$\begin{aligned} w_k &= v_k(x, h/2+0) - v_k(x, h/2-0), \quad w_{k+2} = v_k(x, -h/2+0) - \\ &\quad - v_k(x, -h/2-0) \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Введем обозначения  $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)^T$ ,  $\omega \tilde{\phantom{x}}(\xi) = F(w)$ ,  $\sigma \tilde{\phantom{x}}(\xi) = F(\sigma)$ . Для получения системы сингулярных интеграль-

ных уравнений будем временно полагать известным вектор  $w$  и найдем зависимость  $\sigma^\vee = \sigma^\vee(w^\vee)$ . Из решения задачи п. 1.2 получим в трансформантах Фурье

$$\begin{aligned} a_{11} &= -a_{22} = c_1 - c_3, & a_{12} &= c_2 + c_4^-, & a_{13} &= a_{24} = -a_{31} = -a_{42} = c_6 \\ a_{14} &= a_{32} = c_5^-, & a_{21} &= c_2 + c_4^+, & a_{23} &= a_{41} = c_5^+ \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} a_{33} &= -a_{44} = -c_8 + c_3, & a_{34} &= c_7 + c_4^-, & a_{43} &= c_7 + c_4^+ \\ c_1 &= \frac{\kappa_1 - 1}{4\mu_1}, & c_2 &= \frac{i|\xi|(\kappa_1 + 1)}{4\xi\mu_1}, & c_3 &= \frac{(\kappa_2 - 1)s^2 + 8b^2}{R\mu_2} \\ c_4^\pm &= \frac{i|\xi|(\kappa_2 + 1)[sc \pm 2b]}{\xi R\mu_2}, & c_5^\pm &= -\frac{i|\xi|(\kappa_2 + 1)(s \pm 2bc)}{\xi R\mu_2} \\ c_6 &= \frac{2(\kappa_2 + 1)bs}{R\mu_2}, & c_7 &= \frac{i|\xi|(\kappa_3 + 1)}{4\xi\mu_3}, & c_8 &= \frac{\kappa_3 - 1}{4\mu_3} \end{aligned}$$

где  $A(\xi)$  — матрица с элементами  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ); значения  $R, b, c, s$  те же, что и в (1.4).

Обратим (1.7) ( $B$  — матрица с элементами  $b_{ij}(\xi)$ ):

$$\sigma^\vee(\xi) = B(\xi)w^\vee(\xi), \quad B = A^{-1} \quad (1.8)$$

$$b_{11} = \frac{t_1}{D} \{r_1 m_1 p_3 + e^{-2z} [m_5 r_3 - p_3 r_2 - 4z^2 m_5 (m_2 + m_4)] + e^{-4z} m_3 r_1 r_2\}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} b_{12} \\ b_{21} \end{array} \right\} &= -\frac{i|\xi|t_1}{\xi D} \{m_1 p_3 (p_4 + m_2) + e^{-2z} (m_2 - m_4) (m_5 + p_3 r_2) + \\ &+ 4e^{-2z} m_5 [\pm (p_4 + m_4)z + (m_2 - m_4)z^2] - e^{-4z} m_3 r_2 r_3\} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{13} \\ b_{24} \end{array} \right\} = \frac{t_2}{D} \{e^{-z} [\pm (m_1 p_4 - m_2 p_3) + 2z m_1 m_2] + e^{-3z} [\mp (m_4 r_4 - m_3 r_1) - 2z m_3 m_4]\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{14} \\ b_{23} \end{array} \right\} = -\frac{i|\xi|t_2}{\xi D} \{e^{-z} [m_1 p_4 + m_2 p_3 \pm 2z m_1 m_2] + e^{-3z} [-r_1 m_3 - m_4 (r_2 + m_3) \pm 2z m_3 m_4]\}$$

$$b_{33} = -\frac{t_3}{D} \{r_4 m_2 p_4 + e^{-2z} [m_6 r_6 - p_4 r_5 - 4z^2 m_6 (m_1 + m_3)] + e^{-4z} m_4 r_4 r_5\}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} b_{34} \\ b_{43} \end{array} \right\} &= -\frac{i|\xi|t_3}{\xi D} \{m_2 p_4 (p_3 + m_1) + e^{-2z} (m_1 - m_3) (m_6 + p_4 r_5) + \\ &+ 4e^{-2z} m_6 [\pm (p_3 + m_3)z + (m_1 - m_3)z^2] - e^{-4z} m_4 r_5 r_6\} \end{aligned}$$

$$b_{22} = -b_{11}, \quad b_{44} = -b_{33}, \quad b_{31} = -b_{24}, \quad b_{32} = b_{14}, \quad b_{41} = b_{23}, \quad b_{42} = -b_{13}$$

$$m_1 = \mu_3 + \mu_2 \kappa_3, \quad m_2 = \mu_1 + \mu_2 \kappa_1, \quad m_3 = \mu_3 - \mu_2$$

$$m_4 = \mu_1 - \mu_2, \quad m_5 = m_1 m_3, \quad m_6 = m_2 m_4$$

$$p_1 = \kappa_3 \mu_2 - \kappa_2 \mu_3, \quad p_2 = \kappa_1 \mu_2 - \kappa_2 \mu_1, \quad p_3 = \mu_2 + \mu_3 \kappa_2$$

$$p_4 = \mu_2 + \mu_1 \kappa_2, \quad t_1 = \mu_1 \mu_2, \quad t_2 = \mu_1 \mu_2 \mu_3 (\kappa_2 + 1)$$

$$t_3 = \mu_2 \mu_3, \quad r_1 = p_4 - m_2, \quad r_2 = p_3 + m_3 - m_1$$

$$r_3 = r_1 + 2m_4, \quad r_4 = p_3 - m_1$$

$$r_5 = p_4 + m_4 - m_2, \quad r_6 = r_4 + 2m_3$$

$$D = m_1 m_2 p_3 p_4 + e^{-2z} (p_1 p_3 m_6 + p_2 p_4 m_5 - 4z^2 m_5 m_6) + e^{-4z} p_1 p_2 m_3 m_4, \quad z = h\xi$$

Применим к (1.8) формулу обращения преобразования Фурье

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) w(t) \exp[i\xi(t-x)] dt \quad (1.9)$$

С целью перемены порядка интегрирования в (1.9) преобразуем подынтегральное выражение. Введем обозначения

$$B_1(\xi) = \frac{1}{2}(B(i\xi) + B(-i\xi)), \quad B_2(\xi) = \frac{1}{2}(B(i\xi) - B(-i\xi))/i$$

$$Q_k = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} B_k(\xi), \quad T_k(\xi) = B_k(\xi) - Q_k \quad (k=1, 2)$$

$$Q_1 = \begin{vmatrix} 0 & q_{11} & 0 & 0 \\ q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{12} \\ 0 & 0 & q_{12} & 0 \end{vmatrix}, \quad Q_2 = \begin{vmatrix} q_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_{22} \end{vmatrix}$$

$$q_i = \frac{t_1(p_4 \pm m_2)}{p_4 m_2} \quad (i=11, 21), \quad q_j = \frac{t_3(m_1 \pm p_3)}{p_3 m_1} \quad (j=12, 21)$$

Очевидно, что

$$\pi\sigma(x) = Q_1 I_1 + Q_2 I_2 + \int_0^\infty K(t-x) w(t) dt$$

$$I_n = \int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty w(t) \begin{Bmatrix} \sin(t-x)\xi \\ \cos(t-x)\xi \end{Bmatrix} dt \quad (n=1, 2)$$

$$K(\alpha) = \int_0^\infty [T_1(\xi) \sin \xi \alpha + T_2(\xi) \cos \xi \alpha] d\xi$$

Преобразуем  $I_1$  и  $I_2$ . В результате будем иметь

$$I_1 = \lim_{P \rightarrow +\infty} \int_0^P d\xi \int_{-\infty}^\infty w(t) \sin \xi(t-x) dt =$$

$$= \lim_{P \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^\infty w(t) \frac{1 - \cos P(t-x)}{t-x} dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{w(t) dt}{t-x} -$$

$$- \lim_{P \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos P(t-x)}{t-x} w(t) dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{w(t) dt}{t-x}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty w(t) \exp[i\xi(t-x)] dt = \pi w(x)$$

Таким образом равенство (1.8) приводится к следующему интегральному соотношению:

$$\sigma(x) = Q_2 w(x) + \frac{Q_1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{w(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty K(t-x) w(t) dt \quad (1.10)$$

В силу граничных условий отрезками интегрирования в (1.10) фактически служат длины трещин. Так как на этих отрезках вектор известен (его компоненты — заданные нагрузки), соотношение (1.10) является векторным сингулярным интегральным уравнением.

Дополнительными условиями к (1.10) служат условия однозначности смещений при обходе вокруг каждой трещины  $\int w(t) dt = 0$  ( $-\infty < t < \infty$ ).

Вводя функции  $g_k(x) = \sigma_k(x) - i\tau_k(x)$ ,  $\psi_k(x) = w_{2k-1}(x) + iw_{2k}(x)$  ( $k=1, 2$ ) и приводя отрезки интегрирования к отрезку  $[1, 1]$ , получим систему двух комплексных сингулярных интегральных уравнений относительно  $\psi_k$ :

$$g_k(x) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \int_{-1}^1 [L_{kj}(t, x) \psi_j(t) + L_{kj}^*(t, x) \bar{\psi}_j(t)] dt + \\ + \frac{q_{1k}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\psi_k(t) dt}{t-x} + q_{2k} \psi_k(x), \quad x \in [-1, 1] \quad (k=1, 2) \quad (1.11)$$

с дополнительными условиями

$$\int_{-1}^1 \psi_k(t) dt = 0, \quad a_1 = \frac{l_2 - l_1}{2}, \quad a_2 = \frac{l_4 - l_3}{2} \quad (1.12)$$

Соотношения, связывающие функции  $L_{ij}(t, x)$ ,  $L_{ij}^*(t, x)$  и  $K_{mn}(t, x)$ , вполне очевидны. Черта над функциями означает комплексно-сопряженную величину.

Исходя из (1.11) легко получить систему сингулярных интегральных уравнений задачи об одиночной трещине в трехслойной упругой среде. Отметим, что интегральные уравнения, приведенные в [3] для этого случая, содержат ошибки.

**2. Решение системы сингулярных интегральных уравнений.** Рассмотрим, следуя [5], характеристические уравнения системы (1.26). Они имеют вид

$$a\psi(x) + \frac{b}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t) dt}{t-x} = g(x), \quad x \in [-1, 1] \quad (2.1)$$

В классе  $h_0$  [5] функций, имеющих в точках  $\pm 1$  интегрируемые особенности, уравнение (2.1) имеет решение

$$\psi(x) = r(x) \varphi(x), \quad x \in (-1, 1) \quad (2.2)$$

$$r(x) = (1-x^2)^{-1/2} \left[ \cos \left( \omega \ln \frac{1-x}{1+x} \right) + i \sin \left( \omega \ln \frac{1-x}{1+x} \right) \right] \\ \omega = (1/2\pi) \ln(b+a)/(b-a) \quad (2.3)$$

где  $r(x)$  — каноническая функция уравнения (2.1),  $\varphi(x)$  — непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$  функция, определенная с точностью до постоянной, значение которой находится из дополнительных условий.

Для численного решения системы (1.11) применим следующий способ. Учитывая, что решение имеет асимптотику (2.3), выберем в качестве новых неизвестных  $\varphi_1, \varphi_2$ :  $\psi_k(x) = r_k(x) \varphi_k(x)$  ( $k=1, 2$ ). Введем регулярное представление сингулярных интегралов с помощью тождества

$$\int_{-1}^1 \frac{r(t) dt}{t-x} = -\frac{\pi i}{b} r(x) \quad (2.4)$$

Для решения полученной системы воспользуемся методом коллокаций.

Разобьем отрезок  $[-1, 1]$   $m=4n+1$  равноотстоящими узлами ( $x_1 = -1, \dots, x_m = 1$ ) на  $2n$  интервалов, образованных узлами с последовательными нечетными номерами. Будем искать неизвестные в виде непрерывных функций, являющихся многочленами второй степени на каждом

из интервалов. Произведя кусочно-квадратичную интерполяцию функции  $\varphi_1$ , получим квадратурные формулы

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t-x} r(t) dt = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(x_i), \quad \int_{-1}^1 \varphi(t) r(t) dt = \sum_{i=1}^m \beta_i \varphi(x_i) \quad (2.5)$$

Для вычисления ядер  $L_{kj}(t, x)$  и  $L_{kj}^*(t, x)$  в (1.11), являющихся трансформантами Фурье, используются асимптотические разложения подынтегральных функций при стремлении аргумента к бесконечности. Первые члены этих разложений интегрируются аналитически, а к быстро сходящемуся остатку применяется формула Симпсона.

Осуществляя коллокацию в каждом узле  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) и используя формулы (2.5), получим систему  $(8n+2)$  комплексных или  $(16n+4)$  действительных линейных алгебраических уравнений относительно значений искомых функций в узловых точках. Дополнительные условия (1.12), преобразованные аналогично, включаются в систему вместо уравнений, отвечающих  $x_{2n+1}=0$ . Система решается методом Гаусса. Соотношения (1.11) позволяют по известным решениям  $\psi_k$  найти напряжения  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  на границах раздела и, исходя из их асимптотики в вершинах трещин, основные в механике разрушения величины — коэффициенты интенсивности напряжений  $N_1, N_2$ :

$$N_1 + iN_2 = \mp \sqrt{1/2} L (b^2 - a^2) \varphi(\mp 1) \quad (2.6)$$

где  $L$  — полудлина трещины, верхние (нижние) знаки соответствуют левой (правой) вершине трещины.

Удельное изменение упругой энергии тела при продвижении конца трещины определяется формулой [6]  $(\partial W / \partial l) = 1/2 \pi (N_1^2 + N_2^2) / b$ . Условие роста трещины имеет вид [4]:  $\partial W / \partial l = 2\gamma$ , где  $\gamma$  — поверхностная энергия, необходимая для образования единицы новой поверхности трещины вдоль границы раздела данных материалов.

**3. Результаты расчетов.** 3.1. Расчеты проводились для широкого диапазона значений упругих постоянных  $E_i$ ,  $\nu_i$  среды в случае нормального отрыва ( $\sigma_{yy} = -1$ ,  $\tau_{xy} = 0$ ) и сдвига ( $\tau_{xy} = -1$ ,  $\sigma_{yy} = 0$ ). При фиксированных значениях  $E_i$ ,  $\nu_i$  для различных полудлин трещин  $L_1, L_2$  и величины  $h$  находились зависимости  $\partial W / \partial l$  в каждой из вершин трещин от расстояния между их центрами  $d = 1/2 (l_3 + l_4 - l_1 - l_2)$ .

Опишем сначала результаты методических расчетов. Цель их заключалась в том, чтобы выяснить число  $m=4n+1$  точек коллокации, необходимое для получения заданной точности приближенного решения. Трудность заключается в том, что в зависимости от соотношения длин трещин и расстояния между ними необходимое значение  $n$  меняется. Наиболее отчетливо это проявилось при анализе влияния полубесконечного разреза ( $2L_1 = \infty$ ), поверхности которого свободны от нагрузок, на разрез-трещину конечной длины, раскрываемую нормальными и касательными нагрузками. При фиксированных толщине слоя и значении  $n$  точность, очевидно, падает по мере увеличения длин трещин. Поэтому сначала для выбранного диапазона изменения длин трещин подбиралось такое значение  $n^*$ , чтобы при  $n > n^*$  решение изменялось по мере увеличения  $n$  не более чем на  $\Delta = 10^{-4}$ . Далее, при фиксированном  $n = n^*$  определялось такое значение  $L_1^*$ , что при  $L_1 = L_1^* + \delta L_1$  решение с точностью  $\Delta$  не зависит от  $\delta L_1$  для  $L_2$ , изменяющегося в определенном диапазоне. Трещина длины  $2L_1^*$  и моделировала в дальнейшем полубесконечный разрез.

Приведем два примера расчетов при характерных соотношениях между упругими постоянными материалов.

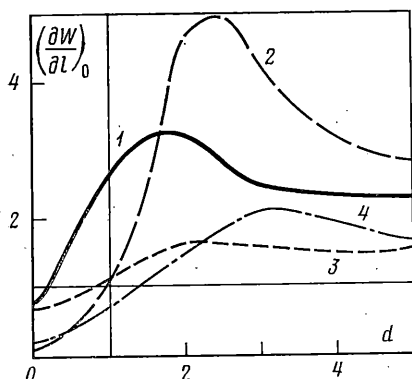
Пусть  $E_1 : E_2 : E_3 = 10^4 : 10^3 : 10$ ;  $\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 = 0,3 : 0,35 : 0,5$ ;  $2L_2 = 1, 2, 3, 4$ ;  $r = l_3 - l_2 = -2, -1, 0, 0,5, 1, 2, 4, 5$ ;  $h = 1$ . В этом случае оказывается, что  $L_1^* = 6L_2$ . При всех соотношениях  $L_2$  и  $r$  верхняя полуплоскость (1) и полубесконечный разрез практически не влияют на нижнюю. Так, максимальное отклонение решения при  $2L_1 = \infty$  от случая  $2L_1 = 0$ ,  $E_1 = E_2 = 10^3$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,35$  составляет 1–2% при  $2L_2 = 4$ . Изменение  $E_1$  с  $10^4$  до  $10^6$  и (или)  $\nu_2$  с 0,35 до 0,5 практически не меняет решения. При  $r \geq 5$  осуществляется выход на асимптотику  $r = \infty$ .

Пусть  $E_1 : E_2 : E_3 = 10^4 : 10 : 10$ ;  $\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 = 0,3 : 0,5 : 0,5$ . Значения  $2L_1, 2L_2, h, r$  такие же, как в первом примере. Результаты расчетов приведены в таблице, где приняты следующие обозначения:  $D_1(D_2)$  — величины  $(\partial W / \partial l) \cdot 10^3$  для левого (правого) конца трещины  $2L_2$  при нормальном отрыве, отнесенные к значению  $(\partial W / \partial l)$  для трещины  $2L = 2$ , расположенной на границе раздела полупространств

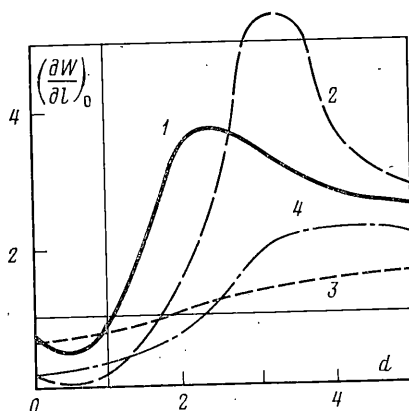
со свойствами (2) и (3);  $D_3(D_4)$  — аналогичные величины для сдвигового нагружения. Влияние  $r$  проявляется так же, как и в первом примере.

3.2. Все дальнейшие расчеты проводились при  $L_1=1$ ;  $L_2, h \sim 1$ . Принимались значения  $n=3,4$ . Было установлено, что относительная погрешность решения не превышает при этом 1%. Время решения задачи на ЭВМ ЕС 1040 составляет 15–25с.

Решение тестовых задач об одиночной трещине в неоднородной среде и сравнение результатов с опубликованными [7] показало, что для достижения заданной точности в описанном алгоритме требуется в среднем в два раза меньше узлов кол-



Фиг. 2



Фиг. 3

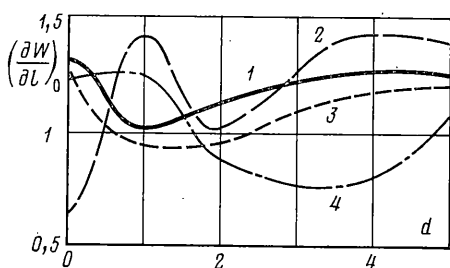
локации (и неизвестных), чем при реализации метода разложения решения по многочленам Якоби [7].

Цель расчетов заключалась, прежде всего, в том, чтобы выявить характерные особенности взаимодействия близко расположенных трещин неравной длины в неоднородной среде в двух случаях нагружения — нормального отрыва и сдвига.

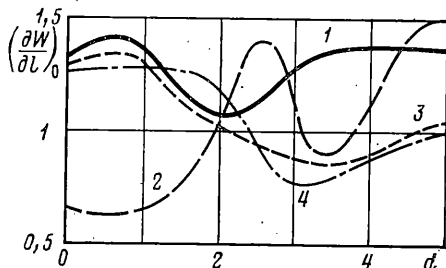
Вопрос о том, при каком взаимном расположении трещин отрыва и сдвига максимально их взаимодействие, рассмотрен в [8]. Там показано, что их наибольшее влияние проявляется при нормальном отрыве — когда прямая, соединяющая центры трещин, составляет с плоскостями трещин некоторый острый угол, а при сдвиговом нагружении — когда они расположены одна под другой. Пользуясь асимптотикой решения соответствующей плоской задачи об удаленных трещинах в однородной среде, приведенной в [1], можно показать, что эти закономерности справедливы и в плоском случае. Выясним, сохраняются ли они при уменьшении относительного расстояния между трещинами.

Результаты расчетов показали, что и для близко расположенных трещин отрыва максимальное взаимодействие наблюдается почти всегда при  $d > L_1 + L_2$ . При малых же  $d$  трещины отрыва испытывают разгрузку, весьма значительную для меньшей трещины, особенно при малой толщине слоя ( $\partial W / \partial l \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ ).

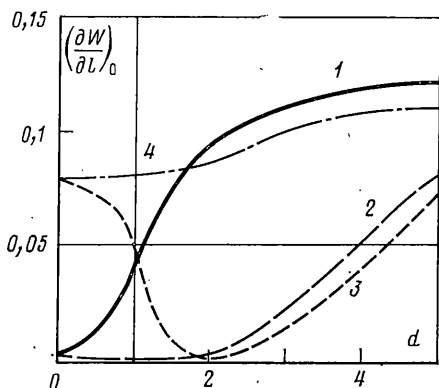
$L_2$	$D$	$r=2$	$-1$	$0$	$0,5$	$1$	$2$	$4$	$5$
2	$D_1$	2794	1612	1601	1442	1304	1178	1125	1120
	$D_2$	1322	1356	1294	1225	1179	1143	1121	1117
	$D_3$	2146	2036	1804	1720	1721	1717	1685	1678
	$D_4$	1830	1738	1711	1717	1714	1701	1678	1676
1,5	$D_1$	2518	1309	1120	1051	972	900	871	868
	$D_2$	1026	1024	987	941	909	882	868	866
	$D_3$	1636	1576	1385	1321	1318	1316	1302	1300
	$D_4$	1530	1365	1314	1316	1316	1309	1300	1298
1	$D_1$	1917	1014	752	710	611	638	626	624
	$D_2$	1369	725	695	667	647	632	625	624
	$D_3$	1072	1071	949	899	892	891	886	885
	$D_4$	1056	986	896	891	891	889	885	885
0,5	$D_1$	671	586	424	409	399	391	389	389
	$D_2$	666	528	413	402	396	390	389	389
	$D_3$	534	517	419	468	468	464	463	463
	$D_4$	530	516	475	465	464	463	463	463



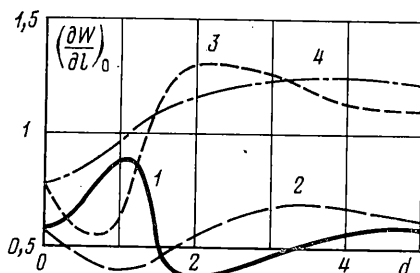
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

В качестве примера на фиг. 2, 3 представлены зависимости  $(\partial W / \partial l)_0$  от  $d$  для вершин  $l_1(l_2)$  при  $E_1:E_2:E_3=10^4:10^2:10$ ;  $\nu_1:\nu_2:\nu_3=0,3:0,5:0,5$ . Безразмерные величины  $(\partial W / \partial l)_0$  везде получены делением на значение  $\partial W / \partial l$  для трещины длины 2, расположенной на границе раздела соответствующих полупространств. Кривые построены для следующих случаев: 1 —  $h=1$ ,  $L_2=1$ ; 2 —  $h=1$ ,  $L_2=2$ ; 3 —  $h=2$ ,  $L_2=1$ ; 4 —  $h=2$ ,  $L_2=2$ . Предполагается, что  $l_4 \geq l_2$ . Кривые, представленные на фиг. 2, 3, являются типичными для трещин отрыва при различных значениях  $E_i$ ,  $\nu_i$  и произвольных  $h$ ,  $L_2$ .

Для трещин сдвига, напротив, характер взаимодействия зависит от величины  $h$ . При малых  $h$  также наблюдается эффект разгрузки меньшей трещины, хотя и не столь резкий (величина  $\partial W / \partial l$  на порядок больше соответственных значений для отрыва); максимальное взаимодействие проявляется при  $d > L_1 + L_2$ . При увеличении толщины слоя до значения  $h^* \sim \max(L_1, L_2)$  величина существенно меняется: максимум  $\partial W / \partial l$  достигается теперь при  $d \approx 0$ , так же как и для удаленных трещин; см. фиг. 4 (вершина  $l_1$ ) и фиг. 5 (вершина  $l_2$ ). Параметры среды, геометрии и обозначения кривых приняты те же, что и на фиг. 2, 3. Кажущееся качественное отличие кривых 1 и 2 объясняется следующим образом. При  $d=0$  и  $L_2=1$  вершина  $l_1$ , например, находится строго над вершиной  $l_3$ , а при  $L_2=2$  — на расстоянии, равном единице от нее над трещиной. Если же учесть соответствующие сдвиги по оси  $d$ , окажется, что кривые 1 и 2 соответствуют друг другу. Отметим наличие локального максимума  $\partial W / \partial l$  в области, соответствующей положению вершины верхней трещины непосредственно над вершиной нижней трещины.

В рассматриваемом случае зависимости  $(\partial W / \partial l)(d)$  для нижней трещины не представлены, поскольку качественно они не отличаются от описанных; а относительные изменения от асимптотических значений, полученных при  $d=\infty$ , малы и составляют не более 10–15% для отрыва и 2–3% — для сдвига.

На фиг. 6, 7 представлен случай жестких полупространств, разделенных несжимаемым слоем малой жесткости ( $E_1:E_2:E_3=10^3:10:10^3$ ,  $\nu_1:\nu_2:\nu_3=0,3:0,5:0,3$ )  $h=1$ ,  $L_2=2$ . Фиг. 6 соответствует отрыву, фиг. 7 — сдвигу. Кривые 1–4 построены для вершин  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ ,  $l_4$  соответственно.

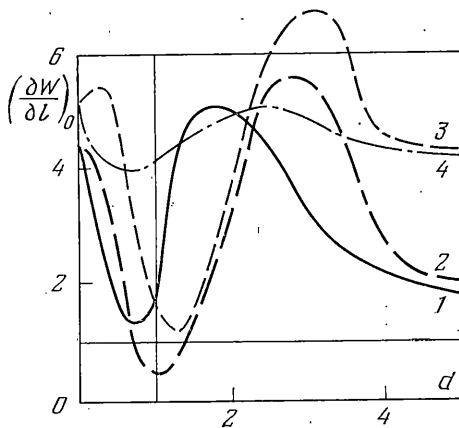
Отмеченные особенности взаимодействия трещин проявляются и для этой комбинации сред. Опишем взаимодействие трещин отрыва неравной длины для различных  $h$  при  $d=0$  и переменной жесткости слоя. В однородной среде величина  $(\partial W / \partial l)(h)$  для меньшей трещины изменяется монотонно от значения, соответствующего одиночной трещине при  $h=\infty$ , до нуля при  $h \rightarrow 0$  (в отличие от приближения к свободной границе, когда  $\partial W / \partial l$  (неограниченно возрастает). При умень-



шении жесткости слоя эта зависимость также монотонна. При увеличении жесткости слоя ( $E_2 \geq 2E_1 = 2E_3$ ) влияние большей трещины падает и  $(\partial W / \partial l)(h)$  убывает медленнее, чем в однородном случае. Наблюдается даже область роста  $\partial W / \partial l$  для меньшей из трещин при их сближении. Кривые  $(\partial W / \partial l)_0(d)$ , построенные при этих значениях  $h$ , существенно отличаются от приведенных на фиг. 2, 3. В качестве примера на фиг. 8 представлен случай отрыва при  $E_1 : E_2 : E_3 = 1 : 10 : 1$ ,  $v_1 = v_2 = v_3 = 0,3$ ,  $L_2 = 2$ ,  $h = 0,5$ . Кривые 1–4, как и выше, соответствуют вершинам  $l_1$ – $l_4$ .

Рассмотрим еще одно обстоятельство. Известно, что для одиночной трещины, расположенной на границе раздела в слоистой среде, уменьшение жесткости любого из слоев увеличивает раскрытие трещины (и величину  $\partial W / \partial l$ ) и наоборот. В случае двух трещин это справедливо не всегда. В частности, если в последнем случае (фиг. 8) положить  $E_2 = E_1$ , величины  $\partial W / \partial l$  обеих трещин уменьшатся. Проиллюстрируем возможность этого эффекта на модельном примере.

Рассмотрим две трещины отрыва равной длины в однородной несжимаемой среде, величину  $\partial W / \partial l$  для одиночной трещины примем за единицу. При  $d=0$  трещины разгружают друг друга, например, при  $h=0,5$  для каждой вершины  $\partial W / \partial l = 0,55$ . При неизменных  $E_1 = E_3$  и увеличении жесткости слоя до бесконечности взаимное влияние трещин пропадает, аналитически может быть найдено, что при этом  $(\partial W / \partial l) = 0,5$ . Таким образом, увеличение жесткости слоя, с одной стороны, уменьшает величину  $\partial W / \partial l$  для каждой трещины, с другой стороны — уменьшает разгружающее влияние трещин друг на друга, что может привести к увеличению  $\partial W / \partial l$ . Результаты вычислений на ЭВМ показывают, какой из двух альтернативных эффектов доминирует при конкретных значениях параметров.



Фиг. 8

Анализ результатов расчетов позволяет сделать также следующие выводы: при  $h$ ,  $L_2 \sim 1$  значения коэффициентов Пуассона  $v_1$ ,  $v_3$  мало (в пределах 10–15%) влияют на величину  $\partial W / \partial l$ . Значение  $v_2$  влияет гораздо больше, особенно при уменьшении  $h$  и  $v_2 = 0,45$ – $0,5$ ; при  $E_2 / E_3 = 100$ ;  $h$ ,  $L_2 \sim 1$  для трещины  $2L_2$  величина  $(\partial W / \partial l) \approx \text{const}$  (в пределах 1–2%) независимо от  $E_1 / E_2$ ; при  $E_1 = E_3$ ,  $v_1 = v_3$  трещина меньшей длины может иметь большее значение  $\partial W / \partial l$  (фиг. 6, 8). Чаще всего это наблюдается при  $v_2 \sim 0,5$ .

3.3. Для трещин, расположенных в неоднородной среде, можно рассматривать еще один вид нагружения: боковое сжатие на бесконечности усилиями  $\sigma_{xx}$ . В отличие от однородной среды в этом случае нагрузки, действующие вдоль линии трещин, приводят к появлению нормальных напряжений  $\sigma_{yy}$ . В результате трещины будут раскрываться и величины коэффициентов интенсивности напряжений станут отличными от нуля.

Решение плоской задачи теории упругости показывает, что условие равновесия рассматриваемого неоднородного тела в отсутствие трещин выражается следующей зависимостью между величинами  $\sigma_{xx}^{(i)}$  ( $i=1, 2, 3$ ), постоянными для  $i$ -го однородного компонента, и  $\sigma_{yy} = \text{const}$ :

$$\frac{(\sigma_{xx}^{(1)} - v_1 \sigma_{yy})}{E_1} = \frac{(\sigma_{xx}^{(2)} - v_2 \sigma_{yy})}{E_2} = \frac{(\sigma_{xx}^{(3)} - v_3 \sigma_{yy})}{E_3} \quad (3.1)$$

Из (3.1) видно, что все три величины  $\sigma_{xx}^{(i)}$  не могут быть заданы произвольно.

Таким образом, при рассмотрении упругого поля вблизи трещин нужно решать ту же задачу, что и в п. 1, но при нагрузках на берегах, равных по величине и противоположно направленным найденным. Поэтому взаимодействие трещин при боковом сжатии носит тот же характер, что и при нормальном отрыве, а соотношения (3.1) позволяют использовать для указанного нагружения численные результаты, полученные для трещин отрыва.

3.4. На основе созданной программы проводилось моделирование кинетики трещин в предположении об их развитии по границам раздела при  $E_1 = E_3$ ,  $v_1 = v_3$ . Рост трещин моделировался изменением на  $\Delta l$  координат тех вершин, в которых превышен критический уровень  $\partial W / \partial l$ . При этом исходная задача решалась многократно для изменяющихся параметров геометрии.

Остановимся подробнее на примере однородной среды. Если в условиях отрыва при  $L_1=L_2$ ,  $d>L_1+L_2$  принять за  $(\partial W/\partial l)_0$  значение  $\partial W/\partial l$  во «внутренних» вершинах (т. е.  $l_2, l_3$  при  $l_3>l_1$ ), то процесс развития трещин будет протекать так. Сначала растут только внутренние вершины, затем, при достаточном уменьшении  $d$ , начинают расти и внешние. С появлением «перекрытия» между трещинами ( $d<L_1+L_2$ ) внешние вершины продолжают монотонно расти ( $\partial W/\partial l$  в них резко нарастает), а внутренние подрастают не на каждом шаге цикла, сохраняя почти постоянный уровень  $\partial W/\partial l$ . При неравных длинах развитие трещин может происходить аналогично. Однако если меньшая трещина, не начав расти, оказывается полностью под (или над) растущей большей трещиной, развитие первой уже не начнется, так как на этой трещине в дальнейшем ( $\partial W/\partial l$ ) будет неуклонно падать.

Одна из описанных выше схем реализуется, как правило, и в неоднородной среде. К числу исключений можно отнести обнаруженную область устойчивого развития трещин на границах раздела жестких полупространств с несжимаемым слоем малой жесткости ( $E_1=E_3\gg E_2$ ,  $\nu_2=0.5$ ). Существование подобной области для осесимметричной задачи обнаружено в [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976, 443 с.
2. Вайншельбаум В. М., Гольдштейн Р. В. Осесимметричная задача о трещине на границе раздела слоев в многослойной среде.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2, с. 130–143.
3. Erdogan F., Gupta G. D. Layered composites with an interface flaw.— Internat. J. Solids and Struct., 1971, v. 7, No. 8, p. 1089–1107.
4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401 с.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. Салганик Р. Л. О хрупком разрушении склеенных тел.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, с. 957–962.
7. Ashbaugh N. Stress solution for a crack at an arbitrary angle to an interface.— Internat. J. Fract., 1975, v. 11, No. 2, p. 205–219.
8. Гольдштейн Р. В., Капцов А. В. Формирование структур разрушения слабо взаимодействующих трещин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 4, с. 173–182.

Москва

Поступила в редакцию  
18.IV.1984