

ОБ ОСОБОЙ БИФУРКАЦИИ В ОДНОЙ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

[Киняпин С. Д.], Киняпина И. Б.

Рассматривается новая бифуркация в системе третьего порядка, близкой к релейной. В момент, когда состояние равновесия на инвариантной поверхности проходит через центр, состояние равновесия всей системы через «странный аттрактор» переходит из устойчивого состояния в неустойчивое, состоящее из конечного числа неустойчивых предельных циклов.

При определенной идеализации динамика ряда гироскопических систем (гироскопического креновыравнивателя, гироскопа направления и некоторых следящих систем) сводится к рассмотрению систем дифференциальных уравнений второго — четвертого порядков с нелинейностью, представленной на фиг. 1, а. В частности, такой вид имеет корректирующий момент в задаче гироскопического креновыравнивателя, а также связь между моментами двигателя и углом отклонения кожуха гироскопа от среднего положения [1].

Во многих случаях, когда это не противоречит здравому смыслу, эту нелинейную функцию заменяют релейной (фиг. 1, б), сводя, таким образом, рассмотрение соответствующих сильно нелинейных задач к более простым релейным¹. Такое приближение в релейных системах существует всегда, поскольку в природе нет релейных характеристик, представленных на фиг. 1, б.

Ранее одним из авторов была рассмотрена особая бифуркация в релейной системе третьего порядка [3]. Возник вопрос, насколько грубо рассмотренная бифуркация, остается ли она в реальных системах, чьи нелинейные характеристики близки к релейным? Выяснению этого и посвящена публикуемая работа.

Ниже рассматривается система²

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{1}{2}(1+\rho)x' - f(z'), & y'' &= \frac{1}{2}(1-\rho)y' - f(z') \\ z'' &= gx' - hy' - az' - f(z')\end{aligned}\quad (1)$$

$$f(z') = 1, \text{ если } z' > \mu \text{ или } z' = \mu, z'' > 0$$

$$f(z') = z'/\mu, \text{ если } -\mu < z' < \mu \text{ или } |z'| = \mu, z'' = 0$$

$$f(z') = -1, \text{ если } z' < -\mu \text{ или } z' = -\mu, z'' < 0$$

$$g = 2(\sigma - \frac{1}{4}b)(2a+1+\rho)\Delta\{(1+\rho)(2a+1-\rho) - \Delta(1-\rho)(2a+1+\rho)\}^{-1}$$

$$h = 2(\sigma - \frac{1}{4}b)(2a+1-\rho)\{(1+\rho)(2a+1-\rho) - \Delta(1-\rho)(2a+1+\rho)\}^{-1}$$

$$\rho = \sqrt{1-b} \text{ при } a > 0, \sigma > 0, \Delta < 0, b < -4a(a+1)$$

и бифуркация в ней, когда положительный параметр μ мал и состояние равновесия $M(0,0)$ на инвариантной поверхности изменяет свою устойчивость.

Система (1) и ее фазовое пространство симметричны относительно начала координат, поэтому достаточно рассмотреть задачу только в фазовом пространстве $z' \geq 0$ и на поверхности разрыва $z'/\mu = 1$.

Введя новые переменные $x = x', y = y', z = z'/\mu$, запишем линейную часть системы (1) для $-1 \leq z \leq 1$:

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{1}{2}(1+\rho)x - z, & y'' &= \frac{1}{2}(1-\rho)y - z \\ z'' &= gx - hy - (1-a\mu)z\end{aligned}\quad (2)$$

Нетрудно видеть, что все траектории в системе (2) при малом μ стремятся к инвариантной плоскости³ S:

$$\begin{aligned}z &= g(1+\mu B + \mu^2 n + \dots)x - h(1+\mu C + \mu^2 m + \dots)y \\ B &= \Gamma - \frac{1}{2}\rho, \quad C = \Gamma + \frac{1}{2}\rho, \quad n = N + \frac{1}{2}\rho(2k+1) \\ m &= N - \frac{1}{2}\rho(2k+1), \quad \Gamma = g - h - a^{-1/2}, \quad k = a + h - g \\ N &= gB - hC - \frac{1}{2}\Gamma(2k+1) + \frac{1}{4}\rho^2\end{aligned}\quad (3)$$

¹ Особенно в тех случаях, когда необходимое поведение системы удастся выявить при рассмотрении почти одних только скользящих движений [2].

² При этом имеются три разные системы дифференциальных уравнений для трех разных областей: $z' < -\mu$, $-\mu < z' < \mu$, $z' > \mu$ с последующим сшиванием соответствующих решений на границе областей $z' = -\mu$ и $z' = \mu$ по непрерывности.

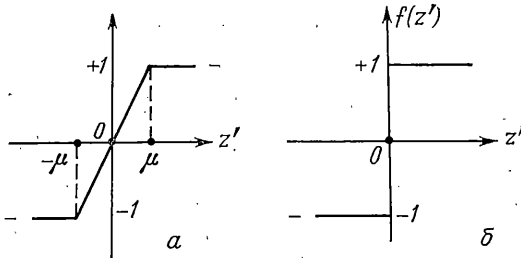
³ Для этого достаточно записать систему (2) в быстром времени $t = \mu t$ следующим образом: $x'' = [\frac{1}{2}(1+\rho)x - z]/\mu$, $y'' = [\frac{1}{2}(1-\rho)y - z]/\mu$, $z'' = gx - hy - (1+a\mu)z$.

Характер поведения траекторий на ней в значительной степени определяется состоянием равновесия $M(0,0)$, характеристическое уравнение которого записывается в виде

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \sigma = 0, \quad 2\varepsilon = h - g + 1 = \frac{(2a+1-\rho)[4\sigma + (1+\rho)^2] - \Delta(2a+1+\rho)[4\sigma + (1-\rho)^2]}{2[(1+\rho)(2a+1-\rho) - \Delta(1-\rho)(2a+1+\rho)]} \quad (4)$$

В соответствии с уравнением (4) состояние равновесия $M(0,0)$ меняет свою устойчивость, когда параметр Δ проходит через значение $\Delta = \Delta_* = (2a+1-\rho)[4\sigma + (1+\rho)^2] \{ (2a+1+\rho)[4\sigma + (1-\rho)^2] \}^{-1}$, т. е. последнее равенство является условием, при котором изменяется устойчивость состояния равновесия $M(0,0)$, расположенного на плоскости скользящих движений в релейной системе [3].

Прежде чем далее рассматривать фазовое пространство системы (1), полезно вспомнить исследование релейной системы [3-5], соответствующей системе (1), и сравнить их. Нетрудно видеть, что при малом μ поведение траекторий в фазовом пространстве $z > 1$ ($z' > \mu$) и на поверхности переключений $z = 1$ ($z' = \mu$) системы (1)



Фиг. 1

близки к соответствующим траекториям релейной системы в области G^+ ($z_p > 0$) и на поверхности скользящих движений $z_p = 0$ (здесь z_p означает координату z релейной системы). Поэтому ниже используются результаты указанных работ, в частности результаты точечного преобразования T области W_0 в область W . Продолжим рассмотрение фазового пространства системы (1), которое при $\varepsilon = 0$ представлено на фиг. 2. Прямая Γ (фазовое подпространство $z \geq 1, z^* = 0$):

$$y = gh^{-1}x - (1 + a\mu)h^{-1} \quad (5)$$

делит всю область переключения $z = 1$ на две полуплоскости с разным характером прошивания плоскости $z = 1$ траекториями. На прямой Γ условие

$$z^{**} |_{z=1, z^*=0} = g\rho x - [g - h^{-1/2}(1-\rho) + 1/2\mu a(1-\rho)] \leq 0 \quad (6)$$

выделяет полубесконечную прямую неподвижных точек точечного преобразования (на фиг. 2 помечены крестиками) с граничной точкой 3 — точкой перегиба.

Полуплоскость, лежащая правее прямой $\Gamma(W_0)$ по траекториям системы для фазового пространства $z > 1$, переходит в заштрихованную область W . Аналогичная картина и в релейной системе. Но теперь инвариантная поверхность S пересекает плоскость переключения $z = 1$ по прямой u , не совпадающей с прямой Γ .

Полупрямая u правее точки I преобразуется в конечную кривую 1-5 (пунктирная кривая с крестиками). Притом точка 2 (точка, в которой траектория системы (2) касается прямой u) преобразуется в точку 4. Нетрудно убедиться, что точки 1, 2, 3 расположены так, как показано на фиг. 2. Отрезок 1-2 прямой и — отрезок динамически неопределенных движений. Траектория, выходящая из точки 2, может идти по траектории инвариантной плоскости S и прийти в точку 2'. С другой стороны, она может идти по траекториям в фазовом пространстве $z > 1$ и прийти в точку 4. Такая же неоднозначность в поведении траектории имеет место и в симметричной точке 2'. Таким образом, траектория из точки 2 может прийти по замкнутой траектории ($\varepsilon = 0$) в ту же точку 2, а также в точки 2'' и 2''' в окрестности прямой u . Чтобы рассматриваемая система была динамической, доопределим ее так, чтобы траектории из 2 шли только по траекториям инвариантной плоскости S .

Если теперь перейти к фазовому пространству системы (1), то для малых μ между фазовыми полупространствами $z > \mu(G^+)$ и $z < -\mu(G^-)$ есть узкая область с инвариантной плоскостью, к которой все траектории приближаются. Если состояние равновесия $M(0,0)$ — устойчивый фокус, то он — элемент притяжения всей системы и при $\varepsilon = 0$ превращается в центр. Все его замкнутые траектории оказываются ω -предельными траекториями системы. При дальнейшем изменении параметра ε центр превращается в неустойчивый фокус и имеем картину преобразования, частично представленную на фиг. 3.

отрезка ab по точечному преобразованию T переходят в точки кривой AB' , а по точечному преобразованию N — в точки отрезка ab , т. е. то, что имело место при исследовании бифуркации в релейной системе со всеми вытекающими отсюда выводами.

Таким образом, изменение устойчивости состояния равновесия $M(0,0)$ на инвариантной поверхности системы (1) происходит через странный аттрактор [6–8], который существует не в окрестности значения параметра $\Delta = \Delta_*$, а только при выполнении равенства $\Delta = f(a, b, \sigma) = \Delta_*$, т. е. в трехмерном подпространстве четырехмерного пространства параметров a, b, σ и Δ . В этом смысле аттрактор существует в области меры нуль.

Авторы благодарят А. В. Гапонова-Грехова и А. Ю. Ишлинского, беседы с которыми в значительной степени способствовали написанию публикуемой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
2. Ishikawa T., Flugge-Lotz I. Contactor control of third-order systems with zeros in the transfer function of the plant.— Internat. J. Control., 1966, v. 3, No. 2, p. 163–181.
3. Кильяпин С. Д. Об одной бифуркации в релейной системе.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1, с. 19–26.
4. Кильяпин С. Д. Об одной бифуркации.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 3, с. 553–555.
5. Кильяпин С. Д. Об одной релейной неустойчивой системе.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 12, с. 81–88.
6. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Л. И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн.— Успехи физ. наук, 1979, т. 128, вып. 4, с. 579–624.
7. Нелинейные волны./Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. 359 с.
8. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Стохастические автоколебания в радиофизике и гидродинамике.— Вестн. АН СССР, 1980, № 10, с. 15–24.

Горький

Поступила в редакцию
10.II.1981