

УДК 531.8

ОБ УРАВНЕНИЯХ «КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВЛИЯНИЙ» ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ВАГОНОВ РАЗЛИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ЛУГОВАЯ Л. И.

Движение железнодорожного вагона описывается дифференциальными уравнениями высокого порядка, что затрудняет аналитическое исследование уравнений: численное же решение осложнено разбросом собственных частот [1].

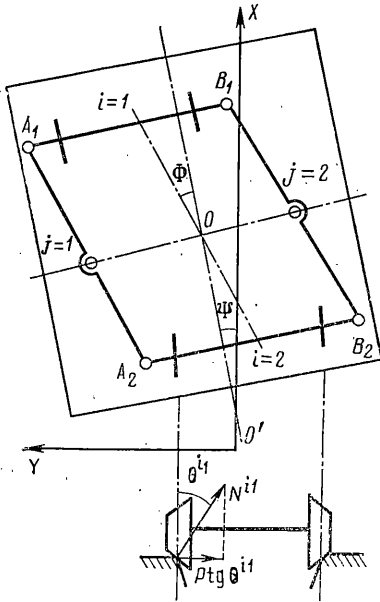
В [2] рассмотрено движение железнодорожной колесной пары. Отмечено, что неголономные связи полностью определяют ее движение, называемое кинематическим влиянием, а тележку с жестко закрепленными осями колесных пар лишают подвижности. Поэтому исследование динамики рельсовых экипажей требует рассмотрения сил псевдоскольжения (крипа) между колесом и рельсом. Предельным переходом к нулю по массе системы или ее продольной скорости в уравнениях динамики колесной пары получены упрощенные уравнения, совпадающие с уравнениями кинематического влияния. В [3] предельным переходом тихоновского типа построена вырожденная система уравнений, описывающая такие движения жесткой тележки. В качестве малого параметра взято отношение постоянной времени, характеризующей скорость протекания переходных процессов под действием сил крипа к постоянной времени, характеризующей кинематическое влияние экипажа.

В публикуемой работе проводится построение вырожденных уравнений для двух схем железнодорожных вагонов: вагона с тележкой, представляющей собой шарнирный параллелограмм, и вагона с упругодиссипативными узлами крепления колесных пар. Устанавливается зависимость низших собственных значений систем от величин их параметров.

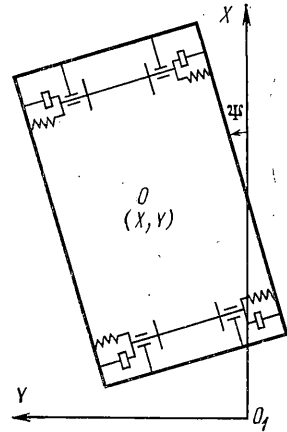
Рассмотрим вагон, колесные пары которого могут совершать поступательное движение относительно кузова за счет соединений осей в виде шарнирного параллелограмма (фиг. 1): Пусть движение происходит по прямолинейному горизонтальному участку пути. Неподвижную систему координат O_1XY определим следующим образом: ось O_1X направлена в сторону движения вдоль рельсового пути и делит расстояние между рельсами пополам, ось O_1Y направлена влево, как показано на фиг. 1. Считая движение вагона плоским, положение вагона в горизонтальной плоскости определим следующими координатами: X, Y — координаты центра масс кузова (точки O), Ψ — угол поворота кузова, Φ — угол поворота балансиров A_1A_2, B_1B_2 , соединяющих колесные пары, α_i — угол поворота i -й колесной пары относительно собственной оси ($i=1, 2$). Индексы $i=1, i=2$ соответствуют передней и задней колесным парам, $j=1$ — левым, $j=2$ — правым по ходу движения колесам.

Введем следующие обозначения: m — масса кузова вагона, m_1 — масса каждой колесной пары, I — момент инерции кузова вагона, I_1 — момент инерции колесной пары вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно оси вращения колес, I_2 — момент инерции колесной пары относительно ее оси вращения, $2a$ — длина балансиров, $2l$ — расстояние между колесами каждой колесной пары, r_{ij} — расстояние от точки контакта (i, j) -го колеса с рельсом до центра колеса, r — его среднее значение (при $Y=0, \Phi=0, \Psi=0$), M_1 — движущий момент, приложенный для определенности к передней колесной паре, M — момент

сил сопротивления, действующих на каждую колесную пару, F_x^{ij} , F_y^{ij} — проекции сил крипа на оси неподвижной системы координат, определяемые, как в [2], N^{ij} — величина нормальной реакции, действующей на (i, j) -е колесо со стороны рельса. Будем считать $N^{ij} = P$, где P — четверть веса вагона, θ^{ij} — малый угол между вертикалью и нормальной реакцией.



Фиг. 1



Фиг. 2

Составим уравнения движения системы, считая Y , Ψ , Φ , θ^{ij} малыми величинами и учитывая только линейные члены, в предположении, что масса каждого балансира пренебрежительно мала по сравнению с остальными массами

$$(m+2m_1)X'' = \sum_{i,j} F_x^{ij} \quad (1)$$

$$I_2 \alpha_1'' = - \sum_j^2 F_x^{1j} r_{1j} + M_1 - M, \quad I_2 \alpha_2'' = - \sum_j^2 F_x^{2j} r_{2j} - M$$

$$(m+2m_1)Y'' = \sum_{i,j} F_y^{ij} - P \sum_i (\theta^{i1} - \theta^{i2}), \quad (I+2I_1)\Psi'' = l \sum_{i,j} (-1)^j F_x^{ij}$$

$$r_{ij} = r \{ 1 + (-1)^{j+1} \gamma [Y + (-1)^i a (\Phi + \Psi)] \}$$

$$\theta^{i1} - \theta^{i2} = \delta [Y + (-1)^i a (\Phi + \Psi)]$$

$$\alpha_i = V/r + \Delta \omega_i, \quad X' = V$$

$$F_x^{ij} = -K \{ r \Delta \omega_i / V - (-1)^j \gamma [Y + (-1)^i a (\Phi + \Psi) - (-1)^j l \Psi' / V] \}$$

$$F_y^{ij} = -K [\Psi - Y' / V + (-1)^i (a/V) (\Phi' + \Psi')]$$

Здесь γ — конусность колес, γ — коэффициент, характеризующий изношенность профиля колес, K — коэффициент крипа.

Первые три уравнения системы (1) описывают продольное движение вагона и не зависят от остальных уравнений, описывающих боковое движение. Из уравнений продольного движения имеем

$$(m+2m_1)V' = -(2Kr/V) (\Delta \omega_1 + \Delta \omega_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{mr^2} \Delta \omega_1 &= -\frac{2K}{mV} \left[\left(1 + \frac{I_2}{mr^2} \right) \Delta \omega_1 + \frac{I_2}{mr^2} \Delta \omega_2 \right] + \frac{M_1 - M}{mr^2} \\ \frac{I^2}{mr^2} \Delta \omega_2 &= -\frac{2K}{mV} \left[\frac{I_2}{mr^2} \Delta \omega_1 + \left(1 + \frac{I_2}{mr^2} \right) \Delta \omega_2 \right] - \frac{M}{mr^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения (2) полностью совпадают с аналогичными уравнениями, полученными в [3].

Проведем нормализацию уравнений, описывающих боковые движения вагона. Положим

$$T = T_* t, \quad Y = Y_* y, \quad \Psi = \Psi_* \psi, \quad \Phi = \Phi_* \varphi, \quad V = V_* v \quad (3)$$

$$Y_* = V_* \Psi_* v_y, \quad \Psi_* = \Psi_* / T_*, \quad Y_* = V_* \Psi_* T_*, \quad \Psi_* = \Phi_*, \quad T_* = T_1$$

Здесь T_1 , Y_* , Ψ_* — характерные для рассматриваемого движения значения соответствующих величин, выбираемые так, чтобы переменные y , v_y , ψ , φ , ω не превосходили значений порядка единицы.

Будем считать, что T_1 существенно меньше времени разгона экипажа, поэтому в уравнениях боковых движений примем $V = V_* = \text{const}$, $v = 1$. В результате нормализации получаем уравнения с безразмерными переменными

$$\begin{aligned} T_2 / T_1 dv_y / dt &= (\psi - v_y) - 2T_2 T_1 y / T_3^2, \quad dy / dt = v_y \\ \frac{I + 2I_1}{m + 2m_1} \frac{T_2}{T_1} \frac{d\omega_1}{dt} &= -(\gamma l V^2 T_*^2 y + l^2 \omega), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $T_2 = \sqrt[4]{(m + 2m_1) V / K}$ — характерное время переходных процессов под действием сил крива, T_3 — постоянная времени, характеризующая движение вагона под действием горизонтальных составляющих сил нормальной реакции на колесо со стороны рельса. Величина T_3 определяется из соотношения $T_3^2 = 4 / (\delta g) (T_3 \sim T_1)$. Так как K — весьма большая величина, будем рассматривать класс движений, для которых $T_2 / T_1 = \mu \ll 1$. При этом уравнения поперечных движений вагона примут вид

$$\begin{aligned} \mu dv_y / dt &= (\psi - v_y) - 2\mu_1 y \\ \mu d\omega / dt &= -(m + 2m_1) (\gamma l V^2 T_*^2 y + l^2 \omega) / (I + 2I_1) \\ dy / dt &= v_y, \quad d\psi / dt = \omega \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) имеет малый множитель μ при части производных. Исследуя ее, построим вырожденную систему [4, 5], положив

$$\psi - v_y = 0, \quad \gamma l V^2 T_*^2 y + l^2 \omega = 0, \quad dy / dt = v_y, \quad d\psi / dt = \omega \quad (6)$$

Для того чтобы решение (6) с точностью порядка μ описывало изменение медленных составляющих поперечного движения, необходимо, чтобы точка покоя присоединенной системы, описывающей движение в быстром времени $\tau = t / \mu$, была асимптотически устойчива. В данном случае присоединенная система имеет вид

$$\frac{dv_y}{d\tau} = \psi - v_y, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{m + 2m_1}{I + 2I_1} (\gamma l V^2 T_*^2 y + l^2 \omega) \quad (7)$$

Так как здесь ψ , y — постоянные параметры, то условия устойчивости выполняются. Из системы (6) можно определить характерное время T_1 кинематических влияний $T_1^2 = l / (\gamma V^2)$, которое будет меньше характерного времени колебаний жесткой тележки [3], не зависит от размеров балансиров и совпадает с характерным временем единичной колесной пары [2].

Такой же результат получается в случае вагона с несколькими осями, соединенными последовательно в виде шарнирных параллелограммов. Характерное время кинематических влияний вагона с двумя шарнирно

закрепленными жесткими тележками совпадает с характерным временем кинематических влияний единичной жесткой тележки.

Аналогичные построения вырожденных уравнений можно провести и для вагона с упругозакрепленными осями при наличии диссипации (фиг. 2). Координаты, характеризующие положение вагона в горизонтальной плоскости, введем следующим образом: X, Y — координаты центра масс кузова, Ψ — угол поворота кузова, Y_i — проекция смещения центра масс i -й колесной пары в ее движении относительно кузова (считаем, что конструкция допускает только поперечные перемещения колесной пары относительно кузова), α_i — поворот i -й колесной пары вокруг ее оси. Силы взаимодействия между кузовом вагона и колесной парой сводятся к реакции упругих связей с коэффициентом упругости C и сил вязкого трения с коэффициентом n .

Вырожденные уравнения продольного движения такого вагона дают решение, совпадающее с соответствующим решением в предыдущем случае. При изучении бокового движения считаем $X^* = V = \text{const}$. Нормализуя уравнения бокового движения и предполагая, что $mV/(2KT_1) = \mu_1 \ll 1$ (T_1 — характерное время кинематического влияния рассматриваемого экипажа), $m/m \ll 1$, $m/(CT_1^2) \sim \mu_1$, $\sqrt{4/(\delta g)} \sim T_1$, $n/(CT_1) \sim \mu_1$, получим уравнения боковых колебаний в виде системы уравнений с малыми параметрами μ_1, μ_2 при производных ($\mu_2 = m_1 \mu_1 / m$).

Параметры рассматриваемого движения вагона таковы, что корни характеристического уравнения парциальных систем — сильно разнесенные отрицательные действительные числа и можно ожидать, что после вырождения уравнений бокового движения один из них исчезнет. Проведя аналогично предыдущему вырождение уравнений бокового движения, получим

$$\begin{aligned} -z_1 + 2(\psi + v_y) - v_{z1} &= 0, & -z_2 + 2a/(VT_1)\omega - v_{z2} &= 0 \\ -2[(l^2 + a^2)\omega + \gamma l V^2 T_1^2 y] - aVT_1 v_{z2} - \gamma l V^2 T_1^2 z_1 &= 0 \\ z_1 = 0, & dz_1/dt = v_{z1}, & dz_2/dt = v_{z2}, & d\psi/dt = \omega \\ dy/dt = v_y, & z_1 = y_1 + y_2, & z_2 = y_2 - y_1 \end{aligned} \quad (8)$$

Переход от полных уравнений движения к вырожденным по μ_1, μ_2 уравнениям (8) является правомерным.

Получим оценочные значения собственных частот экипажа. Характеристическое уравнение системы (8) имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2 l^2 + a^2/l^2 + \lambda \gamma V^2 T_1^2/l^2 + \gamma V^2 T_1^2/l^2 = 0$$

При $V=20$ м/с, $T_1=1$ с; $\gamma=1/20$ м⁻¹, $2a=2,4$ м, $2l=1,6$ м уравнение имеет следующие приближенные значения корней: $\lambda_1 = -1,14$; $\lambda_{2,3} = -1,18 \pm 4,6i$.

Автор благодарит И. В. Новожилова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазарян В. А., Длугац Л. А., Коротенко М. Л. Устойчивость движения рельсовых экипажей. Киев: Наук. думка, 1972. 197 с.
2. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неавтономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
3. Новожилов И. В. Разделение движений рельсового экипажа. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 1, с. 55–59.
4. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. — Матем. сб., 1952, т. 31, № 3, с. 575–586.
5. Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. — Успехи матем. наук., 1963, т. 18, вып. 3, с. 15–86.

Москва

Поступила в редакцию
15.III.1984