

УДК 531.8

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПОЕЗДА

КОПЫЛОВ И. А., НОВОЖИЛОВ И. В.

Поперечное движение рельсовых экипажей определяется главным образом силами крива в точке контакта колеса с рельсами. Эти силы зависят от «псевдопроскальзывания» в точке контакта. Жесткость сил по этому аргументу весьма велика, следовательно, псевдопроскальзывание мало. Поэтому в ряде работ [1, 2] псевдопроскальзыванием пренебрегают, что эквивалентно наложению неголономных связей в точках контакта.

Однако такой подход конструктивен лишь для простейшей системы — одной колесной пары. Уравнения неголономных связей однозначно определяют ее движение — «кинематическое вливание». Для систем с числом колес, большим двух, уравнения неголономных связей образуют, вообще говоря, противоречивую систему [2, 3].

Для таких систем приходится учитывать псевдопроскальзывание. Это резко повышает порядок уравнений и приводит к появлению составляющих решения, сильно разнесенных по своим частотным характеристикам — от «медленных», типа кинематического вливания, до «быстрых», определяемых большой жесткостью сил крива. При численном анализе даже одного вагона [3] высокие порядок системы и разнесение частот сильно затрудняют счет.

В [4] при помощи предельного перехода тихоновского типа построена предельная модель двухосного вагона, учитывающая лишь низкочастотные составляющие движения. Уравнения этой модели схожи с уравнениями неголономных связей колесной пары, движение имеет характер кинематического вливания пары. (Предельная модель, очевидно, может быть построена для вагона с произвольным числом осей.) В публикуемой работе аналогичным предельным переходом строится предельная модель поперечных движений железнодорожного поезда из произвольного числа вагонов. Моделью описывается движение, происходящее с низшими частотами системы порядка частоты кинематического вливания. Для конкретного примера проведено численное исследование устойчивости и вынужденных колебаний. В частности, получен вывод о наибольшем размахе колебаний последнего вагона поезда.

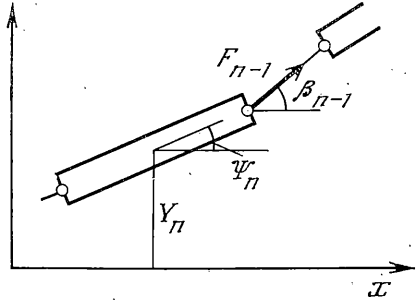
1. Рассмотрим поезд из N , для простоты, одинаковых вагонов, движущийся по горизонтальному прямолинейному рельсовому пути. Вагоны, как и в [4], абсолютно жесткие, двухосные. Пронумеруем цифрами $1, \dots, N$ вагоны, начиная с головного. Предположим, что сцепка вагонов осуществляется невесомым стержнем длины b , шарнирно соединенным с соседними вагонами (фиг. 1).

Составим уравнения поперечного бокового движения произвольного n -го и первого вагонов, добавив по сравнению с [2, 4] силы взаимодействия с соседними вагонами. Далее (для простоты) будем рассматривать случай неизношенных колец с конической поверхностью качения. Тогда

$$\begin{aligned} mV_n \dot{} &= -4k(V_n/V - \Psi_n) + F_{n-1}\beta_{n+1} - F_n\beta_n - F\Psi_n \\ I\Omega_n \dot{} &= -4k((a^2 + l^2)\Omega_n/V + \gamma l Y_n/r) - F_{n-1}a\Psi_n + \\ &\quad + F_{n-1}a\beta_{n-1} - F_n a\Psi_n + F_n a\beta_n \\ mV_1 \dot{} &= -4k(V_1/V - \Psi_1) + F_0\Psi_1 - F_1\beta_1 - F\Psi_1 \\ I\Omega_1 \dot{} &= -4k((a^2 + l^2)\Omega_1/V + \gamma l Y_1/r) - F_1 a(\Psi_1 - \beta_1) \\ Y_n \dot{} &= V_n, \Psi_n \dot{} = \Omega_n, Y_1 \dot{} = V_1, \Psi_1 \dot{} = \Omega_1 \quad (n=2, \dots, N) \\ \beta_n &= (Y_n - a\Psi_n - Y_{n+1} - a\Psi_{n+1})/b \quad (n=1, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения (1.1) записаны в неподвижной системе отсчета, ось x которой делит расстояние между рельсами пополам и направлена по

ходу движения, ось y направлена влево по движению. В (1.1) точкой обозначено дифференцирование по времени T , Y_n — боковая координата центра масс n -го вагона, Ψ_n — угол поворота его корпуса, β_n — угол поворота сцепки n -го вагона с $(n+1)$ -м. (Уравнения составлены для малых Ψ_n , β_n .) Через V_n , Ω_n обозначены боковая скорость n -го вагона и его угловая скорость, V — продольная скорость поезда, m — масса вагона, I — момент инерции относительно центральной оси, $2l$ — расстояние между рельсами, $2a$ — длина вагона, r — средний радиус колеса, γ — коничность, F_0 — сила тяги, приложенная к первому вагону по его оси, F — сила сопротивления, одинаковая для всех вагонов и направленная по оси вагона. Величина F определяется силами трения и проекций силы веса (если рассматривать движение поезда на подъеме).



Фиг. 1

Продольное движение железнодорожного состава развивается за характерные времена, существенно большие характерного времени бокового движения. Поэтому [4] при изучении бокового движения продольная скорость может считаться постоянной, а уравнения продольного движения переходят в статические соотношения. Их этих уравнений для малых Ψ_n , β_n получим

$$F_0 = N \cdot F, \quad F_n = (N-n)F \quad (n=1, \dots, N) \quad (1.2)$$

Проведем, как в [4], нормализацию систем (1.1), (1.2)

$$\begin{aligned} t &= T/T_*, & y_n &= Y_n/Y_*, & \psi_n &= \Psi_n/\Psi_* \\ v_n &= V_n/V_*, & \omega_n &= \Omega_n/\Omega_* & (n=1, \dots, N) \end{aligned}$$

Значения характерных величин T_* , \dots , Ω_* свяжем соотношениями, вытекающими из вырожденных уравнений отдельного вагона, $V_* = V\Psi_*$, $V_* = Y_*/T_*$, $\Omega_* = \Psi_*/T_*$, $T_* = T_2$, где $T_2 = [(a^2 + l^2)r/\gamma lV^2]^{1/2}$ — постоянная времени движения типа кинематического влияния для отдельного вагона [4].

После нормализации системы (1.1), (1.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \mu v_n' &= -(v_n - \psi_n) + \varepsilon p_n, & \mu \omega_n' &= -(\omega_n + y_n) + \varepsilon \lambda q_n \\ y_n' &= v_n, & \psi_n' &= \omega_n \quad (n=1, \dots, N) \\ p_1 &= (N-1) [\beta \psi_1 - (y_1 - \sigma \psi_1 - y_2 - \sigma \psi_2)] \\ q_1 &= (N-1) [-\beta \psi_1 + (y_1 - \sigma \psi_1 - y_2 - \sigma \psi_2)] \\ p_n &= -\beta \psi_n + (N-n+1) (y_{n-1} - \sigma \psi_{n-1} - y_n - \sigma \psi_n) - \\ &\quad - (N-n) (y_n - \sigma \psi_n - y_{n+1} - \sigma \psi_{n+1}) \\ q_n &= (N-n+1) [-\beta \psi_n + (y_{n-1} - \sigma \psi_{n-1} - y_n - \sigma \psi_n)] + \\ &\quad + (N-n) [-\beta \psi_n + (y_n - \sigma \psi_n - y_{n+1} - \sigma \psi_{n+1})] \end{aligned} \quad (1.3)$$

В (1.3) штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени t и введены безразмерные параметры

$$\begin{aligned} \mu &= T_1/T_2, & (T_1 &= mV/4k), & \varepsilon &= \alpha mgVT_2/(4kb) \\ \sigma &= a/VT_2, & \beta &= b/VT_2, & \lambda &= aVT_2/(a^2 + l^2) \\ \kappa &= \rho^2/(a^2 + l^2) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь ρ — радиус инерции корпуса, α — множитель, задающий величину силы сопротивления в долях веса вагона: $F = \alpha mg$.

Оценим величины параметров в (1.4) для порядка числовых значений параметров вагона из [3, 5]: $m=2 \cdot 10$ кг, $k=10$ Н, $a=8$ м, $l=0,76$ м, $b=3$ м, $\gamma=0,02$, $r=0,45$ м. При этом параметры β , λ , κ имеют величины порядка единицы. Зависимость параметра $\mu=(mV^2/4k)(\gamma l/(a^2+l^2)r)^{1/2}$ от скорости V (м·с⁻¹) определяется следующим образом:

| | | | | |
|-------|---------------------|---------------------|-------------------|---------------------|
| V | 1 | 5 | 10 | 20 |
| μ | $0,1 \cdot 10^{-3}$ | $2,5 \cdot 10^{-3}$ | $1 \cdot 10^{-2}$ | $0,4 \cdot 10^{-2}$ |

Отсюда получаем, что в рассматриваемом диапазоне значений исходных параметров величина μ мала. Это позволяет построить вырожденную систему уравнений, которая описывает составляющие движения поезда, происходящие с характерными временами порядка T_2 . Полагая $\mu=0$, получим вырожденную для (1.3) систему

$$y_n' = \psi_n + \varepsilon p_n, \quad \psi_n' = -y_n + \varepsilon \lambda q_n \quad (1.5)$$

Выражения p_n , q_n сохраняют вид (1.3), так как они от μ не зависят. Условия допустимости перехода от (1.3) к (1.5) совпадают с условиями для отдельно взятого вагона [4] и всегда выполняются.

В (1.5) входит малый параметр ε , определяющий величину взаимодействия между вагонами поезда. Так как уравнения (1.5) получены из (1.3) отбрасыванием слагаемых порядка μ , то следует оценить величину оставляемых в (1.5) членов с множителем ε . Составим из (1.4) отношение

$$\varepsilon/\mu = \alpha(a^2+l^2)rg/(b\gamma lV^2) \quad (1.6)$$

Для числовых значений геометрических параметров, принятых выше, зависимость V в (м·с⁻¹) от α , ε/μ оценим следующим образом:

| | | | |
|------------------------|-------------------|-----------|-------------------|
| α | $5 \cdot 10^{-3}$ | 10^{-2} | $5 \cdot 10^{-2}$ |
| $\varepsilon/\mu=1$ | 5,6 | 7,9 | 17,7 |
| $\varepsilon/\mu=0,5$ | 7,9 | 11,2 | 25,0 |
| $\varepsilon/\mu=0,25$ | 11,2 | 15,8 | 35,3 |

Элементами здесь являются значения V , вычисленные по (1.6). В уравнения (1.3), (1.5) параметр ε входит с множителем $(N-n+1)$, достигающим для головных вагонов величины порядка N — числа вагонов поезда. Если величина εN не превышает величины параметра μ , то в (1.5) слагаемые с ε следует опускать. При этом с погрешностью порядка μ можно считать, что движение вагонов поезда происходит независимо.

Уравнения (1.5) с выражениями для p_n и q_n из (1.3) можно привести к более компактной форме, если в них исключить переменные ψ_1, \dots, ψ_n , пренебрегая дополнительно квадратичными по ε членами

$$\begin{aligned} y_1'' + y_1 &= \varepsilon(N-1) [-(\sigma+\beta-\lambda)y_1 - (1+\lambda\sigma+\lambda\beta)y_1' - \\ &\quad - (\sigma+\lambda)y_2 + (1-\lambda\sigma)y_2'] \\ y_n'' + y_n &= \varepsilon [(N-n+1)(\sigma+\lambda)y_{n-1} + (N-n+1)(1-\lambda\sigma)y_{n-1}' + \\ &\quad + (\sigma+\beta-\lambda)y_n - (2N-2n+1)(1+\lambda\sigma+\lambda\beta)y_n' - \\ &\quad - (N-n)(\sigma+\lambda)y_{n+1} + (N-n)(1+\lambda\sigma)y_{n+1}'] \quad (n=2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Приведем результаты численного исследования уравнений (1.5), (1.7). Значения геометрических и массовых параметров указаны выше. Дополнительно примем $N=11$.

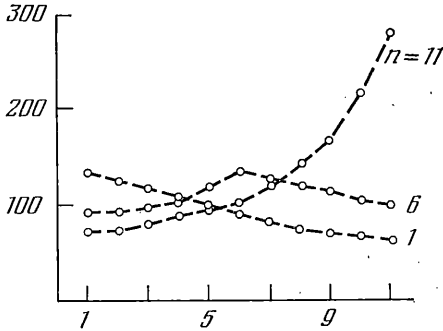
Устойчивость тривиального решения уравнений (6), (8) исследовалась при помощи частотного критерия Михайлова. Однотипный по номеру n вагона вид уравнений позволяет проводить вычисление характеристического полинома системы при помощи рекуррентных соотношений. Рассматривался диапазон параметра ε от $2 \cdot 10^{-3}$ до $4 \cdot 10^{-2}$. Этому диапазону отвечает движение при скоростях порядка 10–30 м/с, коэффициентах сопротивления порядка $5 \cdot 10^{-3}$ – $5 \cdot 10^{-2}$. Соответствующие измерения параметра μ рассматриваются в диапазоне 10^{-2} – 10^{-1} , отношение ε/μ — в диапазоне 0,25–1.

Установлена асимптотическая устойчивость систем (1.5), (1.7). Интересно, что вырожденные уравнения отдельно взятого вагона определяют незатухающее колебательное движение. Таким образом, силы взаимодействия между вагонами поезда

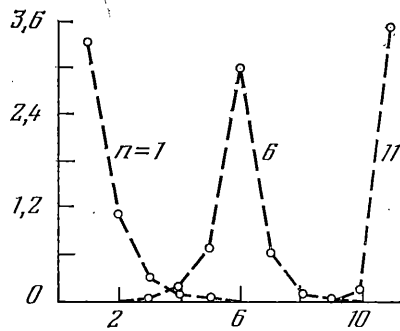
превращают систему нейтральных звеньев в асимптотически устойчивую систему.

Асимптотическая устойчивость вырожденной системы (1.5), согласно [6, 7], обеспечивает близость решений исходной (1.3) и вырожденной (1.5) систем на бесконечном интервале времени. Неасимптотическая устойчивость вырожденного движения отдельного вагона позволяет говорить о близости лишь на конечном интервале времени.

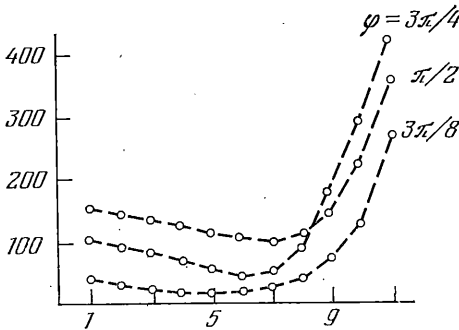
Критерий устойчивости Михайлова при счете проверялся по чередованию нулей вещественной и мнимой частей частотного годографа системы. При этом проводилось сравнение величин вещественной и мнимых частей для систем (1.5) и (1.7). Влияние опущенных в (1.7) квадратичных по ε членов привело к отличиям указанных величин, не превышающим 10%. При изучении резонансных свойств системы вычисляются частотные характеристики такого же вида, как при изучении устой-



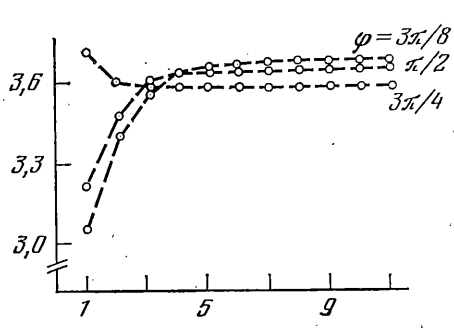
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

чивости. Отсюда следует, что резонансные характеристики систем (1.5) и (1.7) будут отличаться на величины такого же порядка, как годографы Михайлова этих систем. Поэтому резонансные свойства исследуются далее в силу упрощенных уравнений (1.7).

Не расшифровывая конкретной зависимости возмущающих воздействий от неровности пути, несовершенств изготовления вагона и т. п., будем задавать возмущения системы периодическими функциями $R_n(t)$ ($n=1, \dots, N$) в правых частях уравнений (1.7). Тогда

$$y_n = \sum_{m=1}^N \Phi_{nm} R_m \quad (2.1)$$

Здесь Φ_{nm} — передаточная функция системы, описывающая воздействие, оказываемое на n -й вагон от возмущения, действующего на m -й вагон.

На фиг. 2–5 представлены результаты вычислений амплитуд вынужденных колебаний по переменным y_n ($n=1, \dots, N$) от возмущений вида $R_n = \sin(\nu t + \varphi_n)$, где ν — частота возмущения, φ_n — его фаза. Для постоянной скорости движения и при гармоническом характере возмущений пути будем считать $\varphi_n - \varphi_{n+1} = \varphi = \text{const}$. По оси абсцисс откладывается номер вагона, по оси ординат — амплитуда колебаний.

На фиг. 2, 3 приведены амплитуды колебаний n -го вагона от возмущения, действующего на m -й вагон. Для наглядности результаты вычислений для каждого вагона соединены штриховой линией. Чтобы не загромождать фигуру, приведены только кривые для крайних и среднего вагонов. На фиг. 2 частота возмущения $\nu=1$,

на фиг. 3 — $\nu=0,85$. Из фиг. 2, 3 видно, что вес возмущения падает с удалением места возмущения от данного вагона; возмущение частоты $\nu=1$ дает наибольшие амплитуды колебаний; размах колебаний растет с увеличением номера вагонов — к хвосту поезда.

На фиг. 4, 5 приведены результаты счета, когда возмущение действует на все вагоны поезда (на фиг. 4 $\nu=1$, на фиг. 5 — $\nu=0,85$). В этом случае, по сравнению с фиг. 2, 3, зависимость размаха колебаний от частоты и номера вагона имеет более резкий характер.

Счет проводился для $\varepsilon=0,006$. При изменении этого параметра обнаружилось, что при $\nu=1$ амплитуда колебаний линейно зависит от $1/\varepsilon$.

Была сделана оценка сдвига по частоте максимума амплитудно-частотной характеристики. Для последнего вагона он отвечает сдвигу частоты от $\nu=1$ на величину $2 \cdot 10^{-3}$. При этом амплитуда колебаний возрастает на доли процента.

Заметим, что рассматриваемые здесь колебания могут реализоваться только в зоне коничности колес — до удара об ограничивающие гребни. Движение поезда с учетом гребней изучается в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тибилев Т. А.* Об устойчивости экипажа тележного типа, движущегося по рельсовому пути. — Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 10, с. 157–160.
2. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика негोलомных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
3. *Лазарян В. А., Длугач Л. А., Коротенко М. Л.* Устойчивость движения рельсовых экипажей. Киев: Наук. думка, 1972. 197 с.
4. *Новожилов И. В.* Разделение движений рельсового экипажа. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 1, с. 55–59.
5. *Медель В. Б.* Подвижной состав электрических железных дорог. Конструкция и динамика. М.: Транспорт, 1974. 232 с.
6. *Градштейн И. С.* О решениях на временной полупрямой дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных. — Матем. сб., 1953, т. 32, № 3, с. 533–544.
7. *Климушев А. И., Красовский Н. Н.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 680–690.
8. *Горохов В. А.* Исследование динамики железнодорожного состава асимптотическим методом. — В кн.: Динамика систем. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1975, вып. 6, с. 145–154.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1983