МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1985

УДК 531.8

ОБ УПРАВЛЕНИИ МАНИПУЛЯТОРОМ В ОСОБЕННЫХ ПОЛОЖЕНИЯХ

ГЛАЗУНОВ В. А.

Рассмотрен способ установления факта попадания кинематической цепи манипулятора в особенное положение и предложен алгоритм управления манипулятором по вектору скорости в особенном положении. В качестве математического аппарата используется теория винтов.

Манипулятор, кинематическая схема которого представляет открытую кинематическую цепь, может иметь особенные положения.

Пусть цепь состоит из шести звеньев, соединенных между собой вращательными кинематическими парами (фиг. 1). Последнее звено, содержащее схват, представляет тело, которое, благодаря суммированию вращений вокруг шести осей в принципе может занять любое положение в области пространства, определяемой кинематическими параметрами цепи.

Тело-схват в общем случае может иметь любое начальное бесконечно малое перемещение — кинематический винт — из заданного положения, что используется, например, при биотехническом управлении по вектору скорости [1, 2].

Сказанное справедливо только при условии, что скользящие векторы шести осей шарниров не окажутся в особенном положении, в котором они перестают быть независимыми.

В указанном случае орты осей пар определят пятичленную группу винтов, и выведение схвата из рассматриваемого положения по некоторому кинематическому винту возможно только при условии, что этот винт сам входит в ту же группу.

Задача заключается в обнаружении особенного положения манипулятора и в выборе для схвата начального кинематического винта, входящего в пятичленную группу и наиболее близкого к требуемому. Эти две операции должны осуществляться автоматически.

Остановимся на первой операции. Согласно [3, 4], кинематический винт схвата равен сумме векторов элементарных приращений относительных угловых координат в кинематических парах

$$d\boldsymbol{\varphi}+\omega d\mathbf{S}=\mathbf{E}_1 d\varphi_1+\mathbf{E}_2 d\varphi_2+\ldots+\mathbf{E}_6 d\varphi_6 \qquad (1)$$

Здесь $d\boldsymbol{\varphi}$ и $d\mathbf{S}$ — элементарные векторы углового перемещения схвата и линейного перемещения его точки O_c (фиг. 1), ω — множитель Клиффорда, $\omega^2=0$, $\mathbf{E}_i$ — орт оси i-го шарнира, $d\varphi_i$ — элементарное приращение относительного угла поворота в i-м шарнире ($i=1,\ldots,6$).

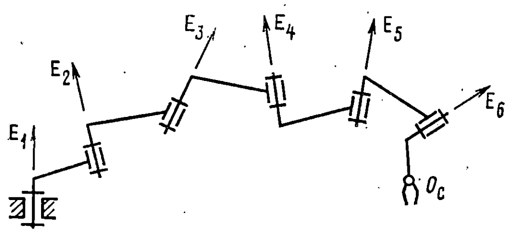
Равенство (1) раскладываем по плюккеровым координатам, которые в принципе известны при данных обобщенных координатах. Тогда в системе координат, связанной с неподвижным основанием, получим

$$d\varphi_x=x_1 d\varphi_1+x_2 d\varphi_2+\ldots+x_6 d\varphi_6$$
$$d\varphi_y=y_1 d\varphi_1+y_2 d\varphi_2+\ldots+y_6 d\varphi_6$$
$$d\varphi_z=z_1 d\varphi_1+z_2 d\varphi_2+\ldots+z_6 d\varphi_6$$

$$
\begin{aligned}
dS_x+(\eta d\varphi_z-\zeta d\varphi_y)&=l_1 d\varphi_1+\ldots+l_6 d\varphi_6\\
dS_y+(\zeta d\varphi_x-\xi d\varphi_z)&=m_1 d\varphi_1+\ldots+m_6 d\varphi_6\\
dS_z+(\xi d\varphi_y-\eta d\varphi_x)&=n_1 d\varphi_1+\ldots+n_6 d\varphi_6
\end{aligned} \qquad (2)
$$

Здесь x_i, y_i, z_i, l_i, m_i, n_i — плюккеровы координаты орта оси i-го шарнира ($i=1,\ldots,6$), $d\varphi_x$, $d\varphi_y$, $d\varphi_z$ — проекции вектора $d\varphi$, dS_x, dS_y, dS_z — проекции вектора $d\mathbf{S}$, ξ, η, ζ — координаты точки O_c схвата.

При биотехническом управлении манипулятором по вектору скорости оператор при помощи рукоятки задает кинематический винт схвата. В контуре управления содержится ЭВМ, которая вычисляет приращения



Фиг. 1

обобщенных координат, необходимые для реализации этого кинематического винта.

На каждом шаге по начальным значениям обобщенных координат по способу, приведенному в [1] или [5], должны быть определены элементы матрицы коэффициентов уравнений системы (2)

$$
\left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 \ldots x_6\\ y_1 & y_2 \ldots y_6\\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ m_1 & m_2 \ldots m_6\\ n_1 & n_2 \ldots n_6 \end{matrix}\right\| \qquad (3)
$$

Далее из системы (2) определяются $d\varphi_i$. Фактически на каждом шаге по задаваемому малому перемещению схвата определяются и осуществляются малые приращения обобщенных координат.

Для выполнения первой операции предлагается включить в алгоритм управления вычисление на каждом шаге определителя Δ шестого порядка матрицы (3), и если он по абсолютной величине меньше некоторого установленного малого числа ε, то манипулятор должен считаться попавшим в особенное положение.

Перейдем ко второй операции — управлению манипулятором в особенном положении. Пусть на некотором шаге управления зарегистрировано, что определитель шестого порядка матрицы (3) равен нулю $\Delta=0$. Это значит, что орты осей шарниров линейно зависимы, ранг матрицы (3) равен пяти. Он может быть и меньше пяти, однако случай одновременного снижения ранга матрицы на два порядка здесь рассматривать не будем.

Предположим, что в данном случае любой из шести ортов осей шарниров может быть выражен линейной комбинацией остальных пяти, что соответствует тому положению, что в составе шести линейно-зависимых ортов осей не содержится группа из k ($k<6$) линейно-зависимых ортов.

Следует задать модуль элементарного углового перемещения в одной из кинематических пар, например $d\varphi_6=0$. Остальные орты осей шарниров определят пятичленную группу, в которую входит любой кинематический винт схвата в данном положении.

Согласно [4], каждый винт $\mathbf{R}=\mathbf{r}+\omega\mathbf{r}^\circ$ пятичленной группы взамен с некоторым единственным винтом $\mathbf{H}=\mathbf{h}+\omega\mathbf{h}^\circ$, т. е. $\mathbf{r}\cdot\mathbf{h}^\circ+\mathbf{h}\cdot\mathbf{r}^\circ=0$.

Винт $\mathbf{H}$ с точностью до постоянного множителя определяется по известным плюккеровым координатам пяти ортов из пяти уравнений [4] $l_i h_x + m_i h_y + n_i h_z + x_i h_x^\circ + y_i h_y^\circ + z_i h_z^\circ = 0$, где x_i, y_i, z_i, l_i, m_i, n_i $(i=1, \ldots, 5)$ — плюккеровы координаты из матрицы (3), h_x, h_y, h_z, h_x°, h_y°, h_z° — плюккеровы координаты винта $\mathbf{H}$.

Отметим, что если манипулятор находится в особенном положении, то определенный выше винт $\mathbf{H}$ может быть интерпретирован как единственный силовой винт, статическое уравновешивание которого, если он действует на схват, не вызывает сил в приводах, что следует также из принципа возможных перемещений.

Вернемся к алгоритму управления. Итак, нужно определить кинематический винт $d\boldsymbol{\varphi}' + \omega d\mathbf{S}'$, который был бы взаимен с винтом $\mathbf{H}$ и наиболее геометрически близок винту $d\boldsymbol{\varphi} + \omega d\mathbf{S}$, задаваемому оператором.

Через точку O_c построим полярную плоскость Q винта $\mathbf{H}$, перпендикулярную моменту винта $\mathbf{H}$ относительно точки O_c, и плоскость P, перпендикулярную вектору $\mathbf{h}$ (фиг. 2). Векторы $d\boldsymbol{\varphi}'$ и $d\mathbf{S}'$ предлагается определить как проекции, соответственно, вектора $d\boldsymbol{\varphi}$ на плоскость Q и вектора $d\mathbf{S}$ на плоскость P.

Итак, результатом выполнения второй операции предлагается считать найденный винт $d\boldsymbol{\varphi}' + \omega d\mathbf{S}'$, его компоненты имеют неотрицательные проекции на компоненты винта $d\boldsymbol{\varphi} + \omega d\mathbf{S}$.

Нетрудно убедиться, что ось найденного винта лежит в полярной плоскости винта $\mathbf{H}'$, соосного с винтом $\mathbf{H}$ и имеющего параметр $p' + p_H$, где p' — параметр винта $d\boldsymbol{\varphi}' + \omega d\mathbf{S}'$, p_H — параметр винта $\mathbf{H}$.

Отметим, что если речь идет лишь об обеспечении в особенном положении элементарного перемещения $d\mathbf{S}$ точки O_c, то его можно получить элементарным вращением схвата вокруг любой оси, найденной пересечением плоскости, проходящей через точку O_c и перпендикулярной вектору $d\mathbf{S}$, с любой полярной плоскостью винта $\mathbf{H}$.

Ранее предполагалось, что любой орт осей шарниров входит в пятичленную группу, определяемую другими пятью ортами, но возможно, что снижение ранга матрицы (3) вызвано тем, что k ортов осей шарниров вошли в $(k-1)$-членную группу, где $k=2, \ldots, 5$.

Поэтому в алгоритме управления после установления факта попадания кинематической цепи манипулятора в особенное положение нужно предусмотреть определение, какие именно орты осей шарниров вошли в эту группу, поскольку задать можно модуль одного из именно этой группы векторов.

Для этого можно рассмотреть все матрицы размера 6×5, полученные из исходной (3) путем вычеркивания одного столбца. Если, например, матрица получена вычеркиванием i-го столбца и ранг ее равен пяти, то i-й орт может быть представлен линейной комбинацией остальных ортов и входить в искомую группу.

Теперь рассмотрим, как изменится результат управления, если абсолютная величина Δ равна нулю лишь приблизительно. Пусть $|\Delta| = \varepsilon$, где ε — некоторое заданное малое число.

Способ определения, какие именно k ортов приблизительно вошли в $(k-1)$-членную группу, в принципе остается таким же, как и приведенный выше.

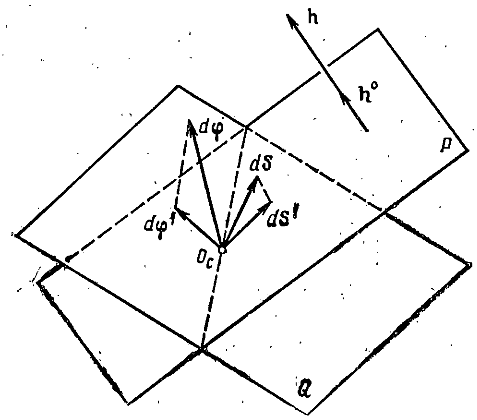
Любой орт из этой группы, например $\mathbf{E}_i$, может быть представлен как сумма некоторого орта $\mathbf{E}_i'$, который действительно входит в пятичленную группу, определяемую пятью другими ортами, и некоторого малого винта $\boldsymbol{\delta}$, так, что $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i' + \boldsymbol{\delta}$.

Согласно [4], $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}_i'$, $\boldsymbol{\delta}$ — образующие одного цилиндроида. Поскольку $\mathbf{E}_i \approx \mathbf{E}_i'$, то ось винта $\boldsymbol{\delta}$ занимает положение, близкое перпендикулярному к $\mathbf{E}_i$.

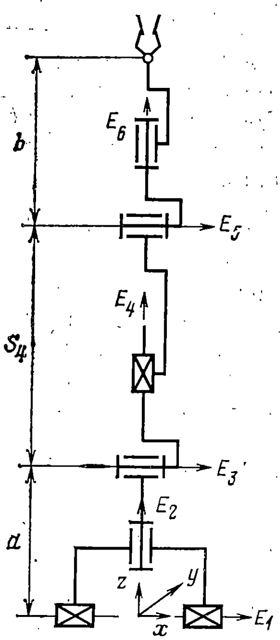
Если задать нулевой модуль приращения i-й угловой координаты $d\varphi_i = 0$, то получаемый кинематический винт схвата $d\boldsymbol{\varphi}' + \omega d\mathbf{S}'$ будет точно входить в пятичленную группу, определяемую остальными пятью осями.

Если же $d\varphi_i \neq 0$, то получаемый кинематический винт будет иметь составляющую по оси винта δ, порядок малости ее модуля — второй по отношению к $|d\varphi_i|$. Однако во избежание непредвиденных отклонений движения схвата следует задавать минимально возможное приращение угла $d\varphi_i$.

Выше рассмотрен локальный критерий выявления особенного положения, согласно которому проверяется конкретное положение манипулятора. Однако при автоматическом контурном управлении может появиться и



Фиг. 2



Фиг. 3

глобальная задача об определении всей совокупности особенных положений манипулятора.

Очевидно (фиг. 1), что на взаимное расположение всех шести осей шарниров влияют лишь обобщенные координаты 2, . . . , 5. Поэтому для решения глобальной задачи можно при каких-либо фиксированных значениях первой и последней обобщенных координат с определенным малым шагом «провернуть» кинематическую цепь в шарнирах 2, . . . ,5 и перебрать все возможные конфигурации цепи, определяя Δ и запоминая положения, когда $|\Delta| \leqslant \varepsilon$.

Кроме того, можно указать путь составления систем уравнений относительно обобщенных координат, решение которых будет соответствовать попаданию k ортов в $(k-1)$-членную группу. Для этого путем вычеркивания $(6-k)$ столбцов из (3) нужно составить матрицу размера $6 \times k$. Линейная зависимость всех ее столбцов соответствует равенству нулю всех ее определителей k-го порядка [5], которые, в свою очередь, зависят от обобщенных координат.

Таким образом, выражения для этих определителей, приравненные нулю, можно считать искомой системой уравнений.

Приведем пример управления манипулятором с кинематической схемой, подобной манипулятору «Универсал-15» в особенном положении (фиг. 3), когда оси 2 и 6 совпали, при этом углы между звеньями 2—3 и 3—4, а также 5—4 и 5—6 равны 180°.

Линейные размеры взяты произвольно (м): $S_4=0{,}4$, $a=0{,}2$, $b=0{,}2$. Для простоты принято, что ось x совпадает с осью кинематической пары

1, а ось z — с осью 2, оси кинематических пар 3 и 5 параллельны оси x. Тогда координаты точки O_c будут: $\xi=0$, $\eta=0,8$ м, $\zeta=0$.

Пусть оператором задан вектор угловой скорости схвата с проекциями ($с^{-1}$): $\Omega_x=0,2$, $\Omega_y=0,1$, $\Omega_z=0,1$, а также вектор скорости точки O_c с проекциями (м/с): $V_x=0,4$, $V_y=0,2$, $V_z=0,4$. Тогда на основании расчета по приведенному выше алгоритму из всех возможных наиболее близким к требуемому будет скоростной винт с проекциями: $\Omega_x'=0,2$ $с^{-1}$, $\Omega_y'=0,1$ $с^{-1}$, $\Omega_z'=0$, $V_x'=0,4$ м/с, $V_y'=0,2$ м/с, $V_z'=0,4$ м/с. При этом скорости в кинематических парах, найденные из уравнений (2), будут: $V_1=0,4$ м/с, $\Omega_2=0,1$ $с^{-1}$, $\Omega_3=0$, $V_4=0,2$ м/с, $\Omega_5=0,2$ $с^{-1}$, $\Omega_6=0$.

Отметим, что решению поставленной задачи управления существенно способствует применение теории винтов.

Автор выражает признательность Ф. М. Диментбергу за обсуждение работы и Е. И. Воробьеву за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whitney D. E.* The mathematics of coordinated control of prosthetic arms and manipulators.— Trans. ASME. Ser. G. J. Dynam. Systems, Meas. and Control, 1972, v. 94, No. 4, p. 303–309.— Рус. перев.: Прикл. механика. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. G, 1972, т. 94, № 4, с. 19–27.
2. *Верещагин А. Ф., Генерозов В. Л., Кучеров В. Б.* Алгоритмы управления манипулятором по вектору скорости.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1975, № 3, с. 66–71.
3. *Ball R. S.* A Treatise on the Theory of Screws. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1900. 514 p.
4. *Диментберг Ф. М.* Теория пространственных шарнирных механизмов. М.: Наука, 1982. 336 с.
5. *Глазунов В. А., Диментберг Ф. М.* Об особом положении пространственного пятизвенника, образованного из двух механизмов Беннета.— Машиноведение, 1984, № 5, с. 50–54.

Москва

Поступила в редакцию
3.XII.1984