МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1985

УДК 531.8

О ТОРМОЖЕНИИ ОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

ГОРИНЕВСКИЙ Д. М.

Производительность промышленных роботов определяется в основном их быстродействием. Повышение быстродействия приводит, однако, к значительным инерционным силам. При наличии в системе податливости могут возникать нежелательные колебания [1]. Актуальным является внедрение адаптивных промышленных роботов, способных действовать в условиях не полностью определенной внешней среды. Силовое очувствление позволяет решать многие задачи адаптации [2]. Силомоментный датчик, установленный в запястье,— податливая конструкция, к нему присоединен инерционный захват с грузом. При быстром торможении (разгоне) в такой системе могут возникнуть колебания и показания датчика будут сниматься со значительной погрешностью. В публикуемой работе решается задача выбора закона торможения такой системы при ограничениях на амплитуду возникающих колебаний силы. Существенная особенность задачи – отсутствие точной информации о всех собственных частотах системы. Рассматривается также случай ограничения на энергию возникающих колебаний. Предложенный подход может быть применен и для других задач торможения.

1. Рассмотрим многокомпонентный силомоментный датчик. Основная область применения таких датчиков — сборочные роботы[1]. Датчик представляет собой податливую конструкцию. Частота его собственных колебаний с присоединенной массой невысока. Перед осуществлением сборочной операции деталь должна быть взята из накопителя и доставлена к месту сборки. Если перемещение осуществляется со значительной скоростью, то при торможении могут возникнуть колебания. При этом внешние силы, действующие на захват робота, будут определяться со значительной погрешностью. В частности, неверно может быть определен момент выхода на контакт с сопрягаемой деталью. Таким образом, при выборе закона торможения (разгона) желательно учитывать податливость датчика.

Пусть датчик расположен в запястье робота — между рукой и захватом. Рассмотрим систему координат с началом в центре недеформированного датчика. Приложенные к захвату внешние силы и моменты вызывают упругие деформации датчика. Деформации могут измеряться, например, при помощи тензорезисторов. Перемещение захвата под внешним воздействием в рассматриваемой системе координат можно описать векторами малых линейных перемещений $\mathbf{x}$ и малых угловых перемещений $\boldsymbol{\alpha}$. Зависимость этих векторов от приложенных сил и моментов можно записать в виде (d — расстояние от центра датчика до конца захвата):

$$\left\|\begin{matrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{M}/d\end{matrix}\right\|=K\left\|\begin{matrix}\mathbf{x}\\ \boldsymbol{\alpha} d\end{matrix}\right\|$$

где $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$ — соответственно, векторы внешних сил и моментов, K — матрица жесткости. Обозначим $q=\|\mathbf{x}'\boldsymbol{\alpha}'d\|'$ шестикомпонентный вектор коор-

[1] *Шнейдер А. Ю., Гориневский Д. М., Ленский А. В., Можжевелов А. Б.* Силомоментные датчики для робототехнических систем. Датчики, размещаемые на манипуляторе.— Препринт. Ин-та проблем передачи информации АН СССР. М., 1984. 70 с.

динат. Потенциальная энергия деформированного датчика и кинетическая энергия захвата с грузом имеют вид (штрих означает транспонирование):

$$\Pi={}^1/_2\mathbf{q}'K\mathbf{q},\qquad T={}^1/_2\mathbf{q}'^{\boldsymbol\cdot}A\mathbf{q}^{\boldsymbol\cdot}\tag{1.1}$$

где элементы матрицы A характеризуют массы и моменты инерции системы. С учетом малости перемещений считаем матрицы A и K постоянными.

При торможении (разгоне) манипулятора на захват с грузом действует сила инерции. Будем считать движение при торможении чисто поступательным. Пусть $\mathbf{a}$ — вектор, компоненты которого — проекции ускорения захвата на оси связанной с датчиком системы координат. Из (1.1) получим уравнение движения захвата с грузом

$$A\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+K\mathbf{q}=A\mathbf{w},\qquad \mathbf{w}=(-\mathbf{a}'0')'\tag{1.2}$$

В правой части уравнения (1.2) записана сила инерции.

Пусть v_0 — величина скорости перед началом торможения (после конца торможения скорость считаем нулевой) и T — время торможения. Тогда, считая направление ускорения во время торможения неизменным, представим вектор $\mathbf{w}$ в виде ($w^{(0)}$ — единичный вектор):

$$\mathbf{w}=(v_0/T)\varphi(t/T)\mathbf{w}^{(0)}\tag{1.3}$$

$$\varphi(\xi)=0\quad\text{при}\quad \xi\equiv[0,1],\quad \int\limits_0^1\varphi(\xi)d\xi=1$$

Обозначим $R=\{\mathbf{r}^{(1)},\ \mathbf{r}^{(2)},\dots,\ \mathbf{r}^{(6)}\}$ матрицу, составленную из собственных векторов матрицы $A^{-1}K$. Матрицу R считаем нормированной[2] так, что $\|R^{-1}\|=1$. Делая в уравнении (1.2) замену переменных $\mathbf{q}=R\mathbf{u}$ и домножая слева на матрицу $R^{-1}A^{-1}$, получим

$$\mathbf{u}_k^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+\omega_k^2u_k=z_kv_0/T\varphi(t/T)\quad (k=1,\dots,6),\qquad \mathbf{z}=R^{-1}\mathbf{w}^{(0)}\tag{1.4}$$

Пусть перед началом торможения колебания отсутствовали. Отыскивая решение уравнения (1.4) в виде $u_k=a_k(t)\cos(\omega_kt)+b_k(t)\sin(\omega_kt)$, найдем амплитуду k-й формы колебаний в конце торможения: $U_k=(a_k^2(T)+$ $+b_k^2(T))^{1/2}=|-a_k(T)+ib_k(T)|$. Подставив сюда выражения для $a_k(T)=$ $=-z_kv_0/(\omega_kT)\int\varphi(t/T)\cos(\omega_kt)dt$ и $b_k(T)=z_kv_0/(\omega_kT)\int\varphi(t/T)\sin\times$ $\times(\omega_kt)dt$, получим

$$U_k=z_kv_0/\omega_k\left|\int\limits_0^1\exp(i\omega_kT\xi)\varphi(\xi)d\xi\right|\tag{1.5}$$

Амплитудный вектор силы, соответствующий k-й форме колебаний, определим из (1.5):

$$\mathbf{Q}_k=U_kK_{\mathbf{r}}^{(k)}=\omega_k^2U_kA\mathbf{r}^{(k)}=A\mathbf{r}^{(k)}v_0z_k\omega_k\left|\int\limits_0^1\exp(i\omega_kT\xi)\varphi(\xi)d\xi\right|\tag{1.6}$$

2. После окончания торможения колебания силы должны составлять малую часть характерной измеряемой силы $-F_0$. (Характерный измеряемый момент $M_0=F_0\cdot d$.) Потребуем, чтобы величина погрешности измерения силы, вызванной этими колебаниями, была $|\mathbf{Q}|\leqslant F_0\eta$, где η — относительная погрешность. Согласно (1.6):

$$|\mathbf{Q}|\leqslant\sum_{k=1}^{6}|\mathbf{Q}_k|=v_0\sum_{k=1}^{6}|z_k|\,\omega_k|Ar^{(k)}|\cdot\left|\int\limits_0^T\exp(i\omega_kT\xi)\varphi(\xi)d\xi\right|\tag{2.1}$$

[2] Здесь и далее рассматривается евклидова норма вектора и соответствующая ей норма матрицы.

Отметим, что величина $|A\mathbf{r}^{(k)}|$ в неравенстве (2.1) имеет физический смысл массы, вовлеченной в k-ю форму собственных колебаний. Поскольку чувствительности датчика к различным компонентам силы должны быть близки, жесткости, приходящиеся на различные формы колебаний, также близки. Таким образом, более высокой частоте соответствует меньшая масса. Поэтому величины $|A\mathbf{r}^{(k)}|\omega_k$ принимают близкие значения. Будем считать, что для этих величин выполнено неравенство (2.2):

$$|Ar^{(k)}|\omega_k \leqslant bm\omega_1. \tag{2.2}$$

Здесь m — характерная масса (например, m — норма матрицы A), ω_1 — первая (низшая) собственная частота, b — безразмерная величина порядка единицы. Справедлива также оценка

$$\sum_{k=1}^{6}|z_k| \leqslant \sqrt{6}\,|z| \leqslant \sqrt{6}\,\|R^{-1}\|\cdot|w^{(0)}| = \sqrt{6} \tag{2.3}$$

Итак, согласно (2.1), (2.2) и (2.3) для выполнения неравенства $|Q| \leqslant F_0\eta$ достаточно, чтобы

$$v_0 m\omega_1\sqrt{6}\max\left|\int_0^1 \exp(i\omega_k T\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right| \leqslant F_0\eta \tag{2.4}$$

Перепишем (2.4) в виде

$$\max_k\left|\int_0^1 \exp(if_k 2\pi\tau\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \frac{F_0\eta}{mv_0\omega_1 b\sqrt{6}} \tag{2.5}$$

Здесь $f_k=\omega_k/\omega_1$ — отношение частоты колебаний к низшей собственной частоте, $\tau=\omega_1 T/(2\pi)$ — величина, показывающая, сколько периодов колебаний с низшей собственной частотой укладывается во времени торможения.

При заданном времени T закон торможения выберем так, чтобы левая часть неравенства (2.5) была как можно меньше. Известны законы торможения (разгона) за кратчайшее время с гашением колебаний в конечный момент, в том числе и для колебательных систем с несколькими степенями свободы [3]. Однако для их реализации необходимо точно знать механические параметры системы, в частности все собственные частоты. Во многих случаях все собственные частоты точно неизвестны. Низшую собственную частоту обычно можно определить (например, экспериментально) с некоторой погрешностью. Поэтому примем, что известны оценка снизу низшей собственной частоты ω_1 и интервал, в котором лежат собственные частоты, т. е. оценка сверху для отношения $f^*=\omega_{max}/\omega_1$ максимальной собственной частоты к минимальной. С учетом сказанного заменим (2.5) задачей

$$\beta=\max_{f\in[1,f^*]}\left|\int_0^1 \exp(if2\pi\tau\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right| \to \min \tag{2.6}$$

Решив задачу (2.6), получим зависимость $\beta=\beta(\tau)$ и закон торможения для каждого значения τ. Зная начальную скорость движения, можно определить необходимое время торможения $T=2\pi\tau/\omega_1$ и закон торможения $\varphi(t/T)$ из условия

$$\beta(\tau)=F_0\eta/(mv_0\omega_1 b\sqrt{6}\,) \tag{2.7}$$

3. Обозначим $S(\omega)=\int_0^1 \exp(i\omega\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$ ($S(\omega)$ — преобразование

Фурье функции $\varphi(\xi)$). Тогда задачу (2.6) можно записать в виде

$$\beta = \max_{\omega \in [2\pi\tau, 2\pi\tau f^*]} |S(\omega)| \to \min \tag{3.1}$$

Здесь минимум вычисляется по всем $\varphi(\xi)$ из (1.3).

Разложим функцию $\varphi(\xi)$ в ряд Фурье на отрезке $\xi \in [0, 1]$:

$$\varphi(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_k \cos(2\pi k\xi) + d_k \sin(2\pi k\xi)] \tag{3.2}$$

Свободный член ряда (3.2) равен единице, поскольку $\int \varphi(\xi) d\xi = 1$. Подставляя ряд (3.2) в интеграл Фурье и почленно интегрируя его, получим

$$|S(\omega)|^2 = \left| \operatorname{sinc}\frac{\omega}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (-1)^k \omega \frac{\operatorname{sinc}(\omega/2 - \pi k)}{\omega + 2\pi k} \right|^2 + \left| \sum_{k=1}^{\infty} d_k (-1)^k 2\pi k \frac{\operatorname{sinc}(\omega/2 - \pi k)}{\omega + 2\pi k} \right|^2, \quad \operatorname{sinc} u = \sin\frac{u}{u} \tag{3.3}$$

Из (3.3) видно, что если положить все $d_k = 0$, то $|S(\omega)|$ не увеличится. Таким образом, искомая $\varphi(\xi)$ должна быть симметрична относительно $\xi = {}^1/_2$. Полосы пропускания привода и системы управления ограничены. Поэтому оставим в разложении (3.2) конечное число гармоник N. Задача (3.1) при этом примет вид

$$\beta = \max_{\omega \in [2\pi\tau, 2\pi\tau f^*]} \left| \operatorname{sinc}\frac{\omega}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k \omega \frac{\operatorname{sinc}(\omega/2 - \pi k)}{\omega + 2\pi k} \right| \to \min \tag{3.4}$$

Задача (3.4) решалась численно при $N=5$, $1 \leqslant \tau \leqslant 4$ и $2 \leqslant f^* \leqslant 20$. Максимум по ω отыскивался перебором, а минимум функции пяти переменных c_k — модифицированным методом Ньютона. При этом получены следующие результаты.

Из пяти гармоник существенными оказались только первые две — коэффициенты c_k ($k=3, 4, 5$) при минимизации были меньше, чем 10^{-2} (величины c_1 и c_2 порядка 1 и 0,1 соответственно). Поэтому во всех дальнейших расчетах минимизация проводилась только по c_1 и c_2.

Для значений f^*, больших 2,5, получены одинаковые значения β, c_1 и c_2. Результаты при $f^* = 2{,}0$ отличаются менее чем на 10%. В правой части формулы (3.4) стоит произведение $\sin({}^1/_2\omega)$ на убывающую при больших ω функцию (для конечного числа гармоник). Максимум этой функции достигается на одном из нескольких первых полупериодов функции $\sin({}^1/_2\omega)$. Оценки показывают, что при получившихся коэффициентах c_1 и c_2 величина β не зависит от f^* при $f^* \geqslant 20$. Таким образом, можно считать, что полученные результаты справедливы при $f^* \to \infty$, т. е. при сколь угодно большой высшей частоте колебаний. Итак, если высшая частота превышает низшую более чем в 2,5 раза, ее значение не влияет на выбор закона торможения.

Результаты численной минимизации приведены в таблице. Результаты справедливы для всех значений $f^* \geqslant 2.5$. Закон торможения (3.2) с c_1 и c_2, полученными в результате минимизации, сравнивался с равномерным торможением (все c_k равны нулю). Величина β_0, приведенная в таблице,— это $\beta_0 = \max|\operatorname{sinc}(\omega/2)|$ максимум спектра ускорения при равномерном торможении на промежутке $\omega \in [2\pi\tau, 2\pi\tau f^*]$.

Время τ_0 при равномерном торможении, необходимое для достижения тех же значений β, что и при рассмотренном законе, можно оценить по формуле $\tau_0 \simeq 1/(\pi\beta)$.

τ	β_0	β	c_1	c_2
1,00	0,216	0,116	−0,21	0,05
1,25	0,216	0,053	−0,46	−0,01
1,50	0,212	0,023	−0,64	−0,03
1,75	0,129	0,014	−0,80	−0,03
2,00	0,127	0,0069	−0,86	0,00
2,25	0,128	0,0040	−0,93	0,03
2,50	0,127	0,0029	−0,98	0,06
2,75	0,091	0,0018	−1,03	0,08
3,00	0,091	0,0010	−1,07	0,11
3,25	0,091	0,0010	−1,07	0,11
3,50	0,091	0,0009	−1,08	0,11
3,75	0,070	0,0006	−1,10	0,12
4,00	0,070	0,0005	−1,10	0,13

Итак, пусть известны параметры датчика с захватом: номинальная измеряемая сила F_0, допустимая погрешность измерения η, масса захвата m, низшая собственная частота колебаний ω_1 и оценка b для величины $\max[\omega_k|Ar^{(k)}|/(\omega_1 m)]$. Для начальной скорости движения v_0 можно, определив значение β из (2.7), найти по таблице необходимую величину τ и значения параметров c_1 и c_2, входящих в закон торможения (3.2). При этом T в (1.3) определится через τ как $T=2\pi\tau/\omega$.

4. Предложенные законы торможения (разгона) (1.3), (3.2) с учетом приведенных численных значений (таблица) минимизируют колебания силы при точно неизвестных собственных частотах колебаний системы. Ограничения на колебания силы могут появиться также из условий прочности тормозимой конструкции.

Рассмотрим теперь ограничения на энергию возникающих колебаний:

$$E=\sum_{k=1}^{6}E_k={}^1/_2\sum_{k=1}^{6}\mathbf{r}^{(k)\prime}K\mathbf{r}^{(k)}U_k^2={}^1/_2\sum_{k=1}^{6}\omega_k^2U_k^2\mathbf{r}^{(k)\prime}A\mathbf{r}^{(k)}$$

Здесь E_k — энергия k-й формы колебаний. Подставляя U_k из (1.5), получим

$$E={}^1/_2\sum_{k=1}^{6}\mathbf{r}^{(k)\prime}A\mathbf{r}^{(k)}z_k^2v_0^2\left|\int_0^1\exp(i\omega_kT\xi)\varphi(\xi)d\xi\right|^2$$

Обозначим $m_*=\max\limits_k[\mathbf{r}^{(k)\prime}A\mathbf{r}^{(k)}]$. Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{6}z_k^2=|R^{-1}\mathbf{w}^{(0)}|^2\leqslant1$, получим, что для выполнения неравенства $E\leqslant E_0$ достаточно, чтобы

$$\max_k\left|\int_0^1 e^{i\omega_kT\xi}\varphi(\xi)d\xi\right|^2\leqslant\frac{2E_0}{m_*v_0^2} \qquad (4.1)$$

Задача (4.1) сводится к задаче (2.6) с $\beta=\sqrt{2E_0/(m_*v_0^2)}$.

Автор благодарит А. М. Формальского и А. Ю. Шнейдера за полезные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гориневский Д. М.* О динамике манипулятора с учетом податливости шарниров.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 6, с. 43–48.
2. *Gurfinkel' V. S., Devyanin E. A. et al.* Controlling a manipulator using sensory motor interaction.— Robotica, 1984, v. 2, p. 155–159.
3. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.

Москва

Поступила в редакцию 2.VIII.1984