МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1985

УДК 534.1

СУЩЕСТВОВАНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

ЗЕВИН А. А.

Рассматриваются свободные, вынужденные и параметрические колебания нелинейных систем с конечным числом степеней свободы, характеризующиеся монотонным изменением координат между экстремальными значениями. Предполагается, что неконсервативные силы отсутствуют, позиционные силы отрицательны при положительных значениях координат, тип нелинейности является вогнутым либо выпуклым (математическая формулировка этих условий дана ниже), причем в первом случае величина нелинейности не ограничивается. Исследованы существование, устойчивость и характер амплитудно-частотных характеристик указанных решений.

Для автономных систем достаточно общего вида существование непрерывной ветви таких решений установлено в [1] на основе теории операторов положительного типа. В отличие от [1], в публикуемой работе существенно используется гамильтоновость системы, поэтому введенные условия вогнутости и выпуклости отличаются от условий вогнутости и выпуклости соответствующих операторов. Изучение решений с монотонным изменением координат в автономных гамильтоновых системах связано с теорией нормальных колебаний [2–4], которые обычно отыскиваются непосредственным анализом конкретных систем, главным образом, с двумя степенями свободы. Качественные исследования указанных решений в неавтономных гамильтоновых системах с несколькими степенями свободы, по-видимому, отсутствуют. Для неавтономных систем с одной степенью свободы такие исследования выполнены в [5, 6]; заметим, что многие утверждения этих работ следуют из полученных результатов.

1. Описание системы и вспомогательные результаты. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты, $T={}^1/_2\Sigma m_i\dot{q}_i^2$ и $V=V(q_1, \ldots, q_n)$ — кинетическая и потенциальная энергии системы. Полагаем, что $V(q_1, \ldots, q_n)$ дважды дифференцируема по всем q_i:

$$V(q_1, \ldots, q_n)=V(-q_1, \ldots, -q_n) \quad (1.1)$$

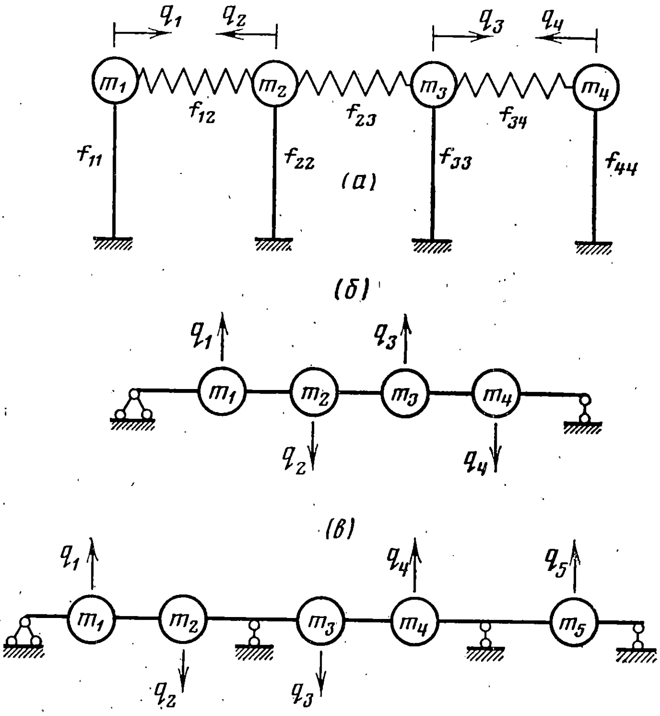
$$f_i(q_1, \ldots, q_n)=\partial V/\partial q_i>0 \quad \text{при} \quad q_1>0, \ldots, q_n>0 \quad (i=1, \ldots, n) \quad (1.2)$$

Физически условие (1.2) означает, что при положительных перемещениях все позиционные силы $Q_i=-f_i$ направлены к положению равновесия $q_1=\ldots=q_n=0$.

Проиллюстрируем условия (1.1), (1.2) на примерах, представленных на фиг. 1. Для системы осцилляторов, последовательно соединенных упругими связями (а), условие (1.1) выполняется, если характеристики связей симметричны ($f_{ik}(x)=-f_{ik}(-x)$). Если последние являются восстанавливающими ($f_{ik}(x)>0$ при $x>0$), то в системе координат, в которой положительным значениям q_i соответствуют противоположные перемещения соседних масс, условие (1.2) выполняется.

Для невесомой балки из нелинейно-упругого материала с симметричной характеристикой, несущей сосредоточенные массы (фиг. 1, *б*), условие (1.2) также выполняется, если положительные перемещения соседних масс противоположны (в этом случае при $q_1>0, \ldots, q_n>0$ действующая на i-ю массу сила упругости $Q_i=-f_i(q_1, \ldots, q_n)$ отрицательна). Если балка имеет промежуточные опоры (фиг. 1, *в*), то указанное правило должно сохраняться в пределах каждого пролета; положительные перемещения соседних масс, разделенных опорой, следует направить в одну сторону.

В силу (1.2) матрица $C(\mathbf{q})=\|c_{ik}(\mathbf{q})\|=\|\partial^2 V/\partial q_i \partial q_k\|_1^n$ при $\mathbf{q}=0$ неотрицательна, т. е. $c_{ik}(0)\geqslant 0$. Полагаем, что она неразложима [7], т. е. не существует перестановки индексов i, k, приводящей ее к квазидиагональному виду. Неразложимость $C(0)$ физически означает, что линеаризованная



Фиг. 1

в окрестности положения равновесия система является связанной, т. е. не распадается на независимые системы.

Представим вектор-функцию $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_n)^T$ в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{q})=B(\mathbf{q})\mathbf{q},\quad B(\mathbf{q})=\|b_{ik}(\mathbf{q})\|_1^n=\int_0^1 C(\theta\mathbf{q})\,d\theta \tag{1.3}$$

В дальнейшем рассматриваются системы, в которых при $\mathbf{q}>0$ выполняется условие

$$B(\mathbf{q})>C(\mathbf{q}) \quad \text{либо} \quad B(\mathbf{q})<C(\mathbf{q}) \tag{1.4}$$

т. е. для любого вектора $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^T$ квадратичные формы $(B(\mathbf{q})\mathbf{y},\mathbf{y})$ и $(C(\mathbf{q})\mathbf{y},\mathbf{y})$ удовлетворяют соответствующему неравенству [8]. Подчеркнем, что в отличие от условия (1.2), зависящего от вида системы, условия (1.4) определяются характером нелинейности.

Поясним условия (1.4) на (фиг. 1, a). Здесь

$$(C\mathbf{y},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{df_{ii}(q_i)}{dq_i}y_i^2+\frac{\partial f_{i,i+1}(q_i+q_{i+1})}{\partial q_i}(y_i+y_{i+1})^2\right]$$

$$(B\mathbf{y},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f_{ii}(q_i)}{q_i}y_i^2+\frac{f_{i,i+1}(q_i+q_{i+1})}{q_i+q_{i+1}}(y_i+y_{i+1})^2\right]$$

Первое либо второе неравенство (1.4) будет выполнено, если для всех i, k функции $f_{ik}(x)/x$ убывают либо возрастают при $x>0$. Эти условия, в частности, имеют место, если все $f_{ik}(x)$ вогнуты либо выпуклы при $x>0$, поэтому соответствующий тип нелинейности будем называть вогнутым либо выпуклым. В силу (1.3):

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}B(\varepsilon\mathbf{q})=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon C(z\mathbf{q})\,dz\right]=\frac{1}{\varepsilon}(C(\varepsilon\mathbf{q})-B(\varepsilon\mathbf{q}))$$

поэтому при первом условии (1.4) $B(\varepsilon\mathbf{q})$ убывает, а при втором — возрастает по ε. Так как $B(\mathbf{q})\to C(0)$ при $\mathbf{q}\to 0$, то при малых $\mathbf{q}$ матрица $B(\mathbf{q})$ неотрицательна и неразложима. Полагаем, что она остается таковой при всех $\mathbf{q}>0$ (очевидно, что в схеме (а) это условие выполняется).

Так как матрица $M^{-1}C(0)$ $(M=\mathrm{diag}(m_1,\ldots,m_n))$ неотрицательна и неразложима, то в соответствии с теоремой Фробениуса [7] ее наибольшее собственное значение является простым и положительным; обозначим его ω_0^2 (физически ω_0 — наибольшая частота собственных малых колебаний системы).

При исследовании систем с выпуклой нелинейностью будем полагать, что существует такая матрица $C_+>C(\mathbf{q})$, что при $\mathbf{q}>0$:

$$3\omega_0>\omega_0^+,\qquad \omega_0>\omega_1^+ \tag{1.5}$$

где ω_0^{+2}, ω_1^{+2} — положительные собственные значения матрицы $M^{-1}C_+(\omega_0^+>\omega_1^+\geqslant\ldots)$.

Заметим, что в схеме (а) для получения C_+ можно в матрице $C(\mathbf{q})$ заменить величины $df_{ik}(x)/dx$ их верхними границами на $[0,\infty)$.

Ниже рассматриваются симметричные периодические колебания вида

$$\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}(-t)=-\mathbf{q}(t+T/2)=\mathbf{q}(t+T),\quad \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)<0\ \text{ на }\ (0,T/2) \tag{1.6}$$

Таким образом, координаты $q_i(t)$ монотонно убывают от $q_i(0)=A_i$ до $q_i(T/2)=-A_i$, где A_i — амплитуды, T — период колебаний $(i=1,\ldots,n)$.

Прежде чем перейти к изложению основных результатов, установим несколько вспомогательных утверждений. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered}(M(t)\mathbf{y}^{\boldsymbol{\cdot}})^{\boldsymbol{\cdot}}+\lambda R(t)\mathbf{y}+\mathbf{l}(t)=0,\quad \mathbf{y}^{\boldsymbol{\cdot}}(a)=\mathbf{y}(b)=0\\ M(t)=\mathrm{diag}(m_1(t),\ldots,m_n(t)),\quad R(t)=\|r_{ik}(t)\|_1^n\\ \mathbf{l}(t)=(l_1(t),\ldots,l_n(t))^T,\ m_i(t)>0,\ r_{ik}(t)=r_{ki}(t)\geqslant 0\ \text{ на }\ (a,b)\end{gathered} \tag{1.7}$$

Полагаем, что матрица $R(t)$ неразложима при $t\in(a,b)$ и

$$\mathbf{L}(t)=\int\limits_a^t\mathbf{l}(s)\,ds\geqslant 0\quad\text{на}\quad(a,b) \tag{1.8}$$

Представим (1.7) в виде системы интегральных уравнений

$$y_i(t)=\lambda\int\limits_a^b\Gamma_i(t,\tau)\sum_{k=1}^n r_{ik}(\tau)y_k(\tau)\,d\tau+r_i(t)\qquad(i=1,\ldots,n) \tag{1.9}$$

$$r_i(t)=\int\limits_a^b\Gamma_i(t,\tau)l_i(\tau)\,d\tau$$

$$\Gamma_i(t,\tau)=\int\limits_\tau^b\frac{ds}{m_i(s)}\quad\text{при}\quad t<\tau,\qquad \Gamma_i(t,\tau)=\int\limits_t^b\frac{ds}{m_i(s)}\quad\text{при}\quad t>\tau$$

где $\Gamma_i(t,\tau)$ — функция Грина соответствующей краевой задачи для уравнения $-(m_i(t)y_i^{\boldsymbol{\cdot}})^{\boldsymbol{\cdot}}=l_i(t)$.

Интегрируя $r_i(t)$ по частям с учетом условия (1.8) и неравенства $\partial\Gamma_i/\partial\tau\leqslant 0$, найдем, что $r_i(t)\geqslant 0$ на (a, b). Так как $\Gamma_i(t, \tau)>0$, $r_{ik}(t)\geqslant 0$, то интегральный оператор G, стоящий в правой части (1.9), оставляет инвариантным конус неотрицательных функций, т. е. преобразует любую неотрицательную функцию $\mathbf{y}(t)$ в неотрицательную. Ввиду неразложимости матрицы $R(t)$ функция $G^{n-1}\mathbf{y}$ положительна на $[a, b)$, поэтому оператор G является u_0-положительным [1]. Следующие утверждения, вытекающие из теории таких операторов, будут неоднократно использованы в дальнейшем.

Наименьшее положительное собственное значение λ_1 однородной краевой задачи (1.7) ($\mathbf{l}(t)\equiv 0$) является простым, а соответствующая собственная функция $\mathbf{y}_1(t)$ (и только она) положительна на $[a, b)$.

При $\lambda<\lambda_1$ (и только при этом условии) решение $\mathbf{y}(t)$ задачи (1.7), (1.8) положительно на $[a, b)$.

Если $\mathbf{y}(t)>0$ при $\mathbf{r}(t)\leqslant 0$ на $[a, b)$, то $\lambda>\lambda_1$.

2. Свободные колебания. Уравнение свободных колебаний системы имеет вид

$$M\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{f}(\mathbf{q})=0 \tag{2.1}$$

Положив $\tau=\omega t$, где $\omega=2\pi/T$ — заранее неизвестная частота колебаний, приведем (2.1) к виду (штрих означает дифференцирование по τ):

$$\omega^2 M\mathbf{q}''+\mathbf{f}(\mathbf{q})=0 \tag{2.2}$$

Пусть $\mathbf{q}_0(t)$ — решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (1.6). Так как $\mathbf{q}_0^{\cdot}(0)=\mathbf{q}_0(T/4)=0$, $\mathbf{q}_0(t)>0$ на $[0, T/4)$, $\mathbf{f}(\mathbf{q}_0)=B(\mathbf{q}_0)\mathbf{q}_0$, то $\mathbf{y}_1(\tau)=\mathbf{q}_0^{\cdot}(\tau/\omega)$ является собственной функцией краевой задачи

$$\omega^2 M\mathbf{y}''+\lambda B_0(\tau)\mathbf{y}=0,\quad \mathbf{y}'(0)=\mathbf{y}(\pi/2)=0,\quad B_0(\tau)=B(\mathbf{q}_0(\tau/\omega)) \tag{2.3}$$

отвечающей наименьшему положительному собственному значению $\lambda_1=1$.

При первом условии (1.4) $B_0(\tau)<C(0)$, при втором — $B_0(\tau)>C(0)$. Так как $b_{ik}(q)=b_{ki}(q)$, то задача (2.3) является самосопряженной. Как известно, положительные собственные значения самосопряженной задачи уменьшаются при возрастании $B_0(\tau)$, поэтому при первом условии (1.4) частота рассматриваемых колебаний $\omega<\omega_0$, при втором — $\omega>\omega_0$.

Так как собственное значение ω_0^2 является простым, то в соответствии с теоремой Ляпунова [9] в окрестности начала координат существует единственное (с точностью до сдвига по t) однопараметрическое семейство решений $\mathbf{q}(t, s)$ с периодом $T(s)$, такое, что $\mathbf{q}(t, s)\to 0$, $T(s)\to 2\pi/\omega_0$ при $s\to 0$. Наряду с $\mathbf{q}(t, s)$ уравнению (2.1) удовлетворяют также функции $\mathbf{q}(-t, s)$ и $-\mathbf{q}(-t, s)$, откуда можно показать, что при соответствующем выборе начала отсчета $\mathbf{q}(t, s)=\mathbf{q}(-t, s)=-\mathbf{q}(t+T/2, s)$. Поэтому $\mathbf{q}(\tau/\omega, s)$ является собственной функцией задачи (2.3) при $B_0=B_0(\tau, s)$. Так как $B_0(\tau, s)\to C(0)$, $\omega\to\omega_0$ при $s\to 0$, а ω_0^2 — наибольшее собственное значение матрицы $M^{-1}C(0)$, то $\mathbf{q}(\tau/\omega, s)$ — первая собственная функция и, следовательно, $\mathbf{q}(t, s)>0$ на $[0, T/4)$. Таким образом, при малых s решение $\mathbf{q}(t, s)$ удовлетворяет условиям (1.6) ($M\mathbf{q}^{\cdot\cdot}=-\mathbf{f}(\mathbf{q})<0$ на $(0, T/4)$, откуда $\mathbf{q}^{\cdot}(t)<0$ на $(0, T/4]$).

Будет показано, что $\mathbf{q}(t, s)$ продолжимо по s сколь угодно далеко. Точнее, предельным является такое значение $s=s_*$, что $\|\mathbf{q}(0, s)\|\to\infty$ при $s\to s_*$ (т. е. хотя бы одна амплитуда $A_{0i}(s)\to\infty$). Частота колебаний $\omega(s)$ при первом условии (1.4) монотонно убывает, при втором — возрастает, поэтому ω, в свою очередь, может служить параметром, определяющим рассматриваемое семейство. Пусть ω_∞ — предельное значение $\omega(s)$, т. е. $\omega(s)\to\omega_\infty$ при $s\to s_*$.

Теорема 1. Семейство $\mathbf{q}(t, \omega)$ ($\mathbf{q}(t, \omega)\to 0$ при $\omega\to\omega_0$) единственным образом продолжимо до $\omega=\omega_\infty$, если выполнено первое условие (1.4) либо второе условие (1.4) и условие (1.5).

Доказательство. Пусть $\mathbf{q}(\tau, \omega)$ — решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условиям $\mathbf{q}'(0)=\mathbf{q}(\pi/2)=0$, $\mathbf{q}(\tau, \omega)>0$ на $(0, \pi/2)$. Очевидно, что $\mathbf{q}(\omega t, \omega)$, будучи продолжено по t, имеет вид (1.6).

Как известно [10], решение $\mathbf{q}(\tau, \omega)$ нелинейной краевой задачи может быть единственным образом продолжено по параметру ω на некоторый $(\omega-\varepsilon, \omega+\varepsilon)$, если $\lambda=1$ не является собственным значением соответствующей краевой задачи для уравнения в вариациях

$$\omega^2 M\mathbf{y}''+\lambda C(\tau, \omega)\mathbf{y}=0, \quad \mathbf{y}'(0)=\mathbf{y}(\pi/2)=0, \quad C(\tau, \omega)=C(\mathbf{q}(\tau, \omega)) \quad (2.4)$$

При первом условии (1.4) $C(\tau, \omega)<B(\tau, \omega)$, поэтому $\lambda_1(C)>\lambda_1(B)=1$, т. е. указанное условие выполняется. При втором — $C(\tau, \omega)>B(\tau, \omega)$, $\lambda_1(C)<\lambda_1(B)=1$; покажем, что $\lambda_2(C)>1$. При $C=C_+$ второе собственное значение задачи (2.4) $\lambda_2(C_+)=\min(\omega^2/\omega_1^{+2}, 9\omega^2/\omega_0^{+2})$. В силу (1.5) $\lambda_2(C_+)>1$ при $\omega>\omega_0$, следовательно, $\lambda_2(C)>\lambda_2(C_+)>1$. Таким образом, решение $\mathbf{q}(\tau, \omega)$ единственным образом продолжимо по ω.

Покажем, что при изменении ω неравенство $\mathbf{q}(\tau, \omega)>0$ на $[0, \pi/2)$ не нарушается. Действительно, в обратном случае $\mathbf{q}(\tau, \omega_*)\geqslant 0$ на $[0, \pi/2)$, $q_k(\tau_*, \omega_*)=0$ либо $q_k^{\boldsymbol{\cdot}}(\pi/2, \omega_*)=0$ при некоторых k, ω_*, $\tau_*\in[0, \pi/2)$. Так как $q_k^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}=-f_k(\mathbf{q})\leqslant 0$ на $[0, \pi/2)$, то $q_k(\tau, \omega_*)\equiv 0$. Ввиду неразложимости $B(\mathbf{q})$ это возможно, если только $\mathbf{q}(\tau, \omega_*)\equiv 0$.

Учитывая положительность $B(\mathbf{q})$, $\mathbf{q}(\tau, \omega)$ и равенство $B(0)=C(0)$, найдем, что $\mathbf{q}(\tau, \omega)\to 0$ только при $\omega\to\omega_0$. Таким образом, при продолжении $\mathbf{q}(\tau, \omega)$ по ω вторым предельным является такое значение $\omega=\omega_\infty$, что $\|\mathbf{q}(0, \omega)\|\to\infty$ при $\omega\to\omega_\infty$. Теорема доказана.

Если все $q_i(\tau, \omega)\to\infty$ при $q_k(\tau, \omega)\to\infty$ и существует не зависящая от $\mathbf{q}>0$ матрица $B_\infty=\lim B(\varepsilon q)$ при $\varepsilon\to\infty$, то $B(\tau, \omega)\to B_\infty$ при $\omega\to\omega_\infty$. Поэтому величина ω_∞^2 равна наибольшему собственному значению матрицы $M^{-1}B_\infty$ (в схеме (а) указанные условия выполняются, если $f_{i,i+1}(x)\to\infty$ при $x\to\infty$).

Можно показать, что любое решение вида (1.6) принадлежит семейству $\mathbf{q}(\tau, \omega)$.

Если функции $f_i(q_1, \ldots, q_n)$ возрастают по всем q_k при $\mathbf{q}>0$, то

$$a_{ik}(\mathbf{q})\geqslant 0 \quad \text{при } \mathbf{q}>0 \quad (i, k=1, \ldots, n) \quad (2.5)$$

Покажем, что при этом условии в системе с вогнутой нелинейностью решение $\mathbf{q}(\tau, \omega)$ монотонно убывает по ω при $\tau\in[0, \pi/2)$.

Дифференцируя (2.2) по параметру ω, найдем, что функция $\mathbf{q}_\omega= =\partial\mathbf{q}(\tau, \omega)/\partial\omega$ удовлетворяет уравнению

$$\omega^2 M\mathbf{q}_\omega''+C(\tau, \omega)\mathbf{q}_\omega-2\mathbf{f}(\mathbf{q}(\tau, \omega))/\omega=0. \quad (2.6)$$

Так как $\mathbf{q}_\omega'(0, \omega)=\mathbf{q}_\omega(\pi/2, \omega)=0$, $\mathbf{f}(\mathbf{q}(\tau, \omega))>0$ на $(0, \pi/2)$ и, как показано, в задаче (2.4) $\lambda_1(C)>1$, то в соответствии с результатами, приведенными в п. 1, $\mathbf{q}_\omega(\tau, \omega)<0$ на $[0, \pi/2)$. Отсюда, в частности, следует, что амплитудно-частотные характеристики рассматриваемого решения $A_{0k}(\omega)=q_{0k}(0, \omega)$ монотонно убывают на $(\omega_\infty, \omega_0)$ $(k=1, \ldots, n)$.

3. Вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$M\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+\mathbf{f}(\mathbf{q})+\mathbf{p}(\omega t+\alpha)=0 \quad (3.1)$$

где $\mathbf{p}=(p_1, \ldots, p_n)^T$ — вектор вынуждающих сил. Полагаем, что последние симметричны и сохраняют одинаковый знак в течение полупериода, т. е.

$$\mathbf{p}(\tau)=\mathbf{p}(-\tau)=-\mathbf{p}(\tau+\pi)=\mathbf{p}(\tau+2\pi), \quad \mathbf{p}(\tau)\geqslant 0 \ \text{ на } (0, \pi/2) \quad (3.2)$$

Решения уравнения (3.1), удовлетворяющие условиям (1.6) при $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=\pi$, обозначим, соответственно, $\mathbf{q}_1(t)$ и $\mathbf{q}_2(t)$ (таким образом, знак $\mathbf{q}_1(t)$ совпадает, знак $\mathbf{q}_2(t)$ противоположен знаку вынуждающей силы). Дальше исследуется существование и устойчивость таких решений, под которой будем понимать устойчивость в первом приближении, т. е. устойчивость соответствующего уравнения в вариациях

$$M\mathbf{y}^{\cdot\cdot}+C_i(t)\mathbf{y}=0,\quad C_i(t)=C(\mathbf{q}_i(t)) \tag{3.3}$$

При анализе устойчивости будем полагать, что матрица $C(\mathbf{q})$ при $\mathbf{q}>0$ является неотрицательной и положительно-определенной, т. е. удовлетворяет условию (2.5) и

$$C(\mathbf{q})>0 \quad \text{при} \quad \mathbf{q}>0 \tag{3.4}$$

Установим сначала некоторые вспомогательные результаты. Отметим, что так как $C(\mathbf{q})=C(-\mathbf{q})$, $\mathbf{q}_i(t)=-\mathbf{q}_i(t+T/2)$, то $C_i(t)=C_i(t+T/2)$, т. е. минимальный период матрицы $C_i(t)$ равен $T/2$.

Обозначим $\lambda_{kr}{}^i$ и $\lambda_{kH}{}^i$ ($k=1, 2, \ldots$; $i=1, 2$) — положительные собственные значения краевых задач при условиях $\mathbf{y}^\cdot(0)=\mathbf{y}(T/4)=0$ и $\mathbf{y}^\cdot(-T/4)=\mathbf{y}(0)=0$, соответственно, для уравнения

$$M\mathbf{y}^{\cdot\cdot}+\lambda C_i(t)\mathbf{y}=0 \tag{3.5}$$

Покажем, что при условии (2.5) $\lambda_{1H}{}^1>1$, $\lambda_{1H}{}^2<1$. Положим $\mathbf{v}_i(t)=\mathbf{q}_i^\cdot(t)$; из (1.6) получим $\mathbf{v}_i^\cdot(-T/4)=\mathbf{v}_i(0)=0$, $\mathbf{v}_i(t)>0$ на $[-T/4,0)$. Дифференцируя (3.1), найдем, что $\mathbf{v}_i(t)$ удовлетворяет уравнению

$$M\mathbf{v}^{\cdot\cdot}+C_i(t)\mathbf{v}+\mathbf{p}^\cdot(\omega t+\alpha_i)=0 \tag{3.6}$$

и, следовательно, является положительным решением краевой задачи (1.7) при $M(t)=M$, $R(t)=C_i(t)$, $\mathbf{l}^i(t)=\mathbf{p}^\cdot(\omega t+\alpha_i)$, $a=-T/4$, $b=0$, $\lambda=1$. В силу (3.2) $\mathbf{l}^1(t)=\mathbf{p}^\cdot(\omega t)$ удовлетворяет условию (1.8), поэтому первое собственное значение соответствующей однородной задачи $\lambda_{1H}{}^1>\lambda=1$. Так как $\mathbf{l}^2(t)=-\mathbf{l}^1(t)$, то $\lambda_{1H}{}^2<1$.

Очевидно, что $\mathbf{q}_i(t)$ является положительным решением краевой задачи (1.7) при $M(t)=M$, $R(t)=B(\mathbf{q}_i(t))$, $\mathbf{l}^i(t)=\mathbf{p}(\omega t+\alpha_i)$, $a=0$, $b=T/4$, $\lambda=1$. При помощи аналогичных рассуждений найдем, что в соответствующей однородной задаче $\lambda_1>1$ при $i=1$, $\lambda_1<1$ при $i=2$. Так как λ_1 убывает с возрастанием $R(t)$, то и подавно при первом условии (1.4) $\lambda_{1r}{}^1>1$, при втором — $\lambda_{1r}{}^2<1$.

Рассмотрим сначала систему с вогнутой нелинейностью.

Теорема 2. В системе с вогнутой нелинейностью для любого $\omega\in(\omega_\infty{}^1, \infty)$ существует решение вида $\mathbf{q}_1(t)$, причем $\|\mathbf{q}_1(0)\|\to\infty$ при $\omega\to\omega_\infty{}^1$, $\|\mathbf{q}_1(0)\|\to0$ при $\omega\to\infty$. При условии (2.5) его амплитудно-частотные характеристики $A_{1k}(\omega)$ монотонно убывают и удовлетворяют неравенствам $A_{1k}(\omega)>A_{0k}(\omega)$. При условиях (2.5), (3.4) решение $\mathbf{q}_1(t)$ устойчиво.

Доказательство. Так как $C(\mathbf{q})<B(\mathbf{q})<C(0)$, то при $\omega>\omega_0$ существует единственное решение, удовлетворяющее соотношениям $\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}(-t)=-\mathbf{q}(t+T/2)$, причем $\mathbf{q}(t)\to0$ при $\omega\to\infty$ [11].

При малых $\mathbf{q}$ матрица $B(\mathbf{q})\approx C(0)$, поэтому $B(\mathbf{q}(t))$ — неотрицательная неразложимая матрица. Учитывая также, что $\mathbf{p}(\omega t)\geqslant0$ на $(0, T/4)$, найдем, что $\mathbf{q}(t)>0$, $\mathbf{q}^{\cdot\cdot}(t)<0$ на $(0, T/4)$, т. е. $\mathbf{q}(t)$ удовлетворяет соотношениям (1.6). Так как $\lambda_{1r}{}^1>1$, то $\mathbf{q}_1(t)$ единственным образом продолжимо по ω в сторону убывания ω; при этом, как показывают приведенные рассуждения, вид решения сохраняется. Предельным является значение $\omega_\infty{}^1$, такое, что $\|\mathbf{q}_1(0)\|\to\infty$ при $\omega\to\omega_\infty{}^1$.

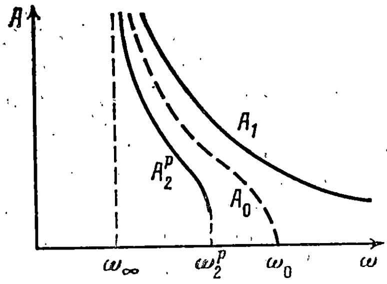
Доказательство монотонности амплитудно-частотных характеристик $A_{1k}(\omega)$ аналогично случаю свободных колебаний.

Для доказательства неравенства $A_{1k}(\omega)>A_{0k}(\omega)$ положим в (3.1) $\mathbf{p}=\varepsilon\mathbf{p}(\omega t)$ и рассмотрим поведение решения $\mathbf{q}(t, \varepsilon)$ ($\mathbf{q}(t, 0)=\mathbf{q}_0(t)$, $\mathbf{q}(t, 1)=\mathbf{q}_1(t)$) при возрастании ε на $[0, 1]$ (возможность непрерывного продолжения $\mathbf{q}(t, \varepsilon)$ по ε обусловлена неравенством $\lambda_{1r}{}^1(\varepsilon)>1$). Дифференцируя (3.1) по ε, получим $M\mathbf{q}_\varepsilon{}^{\cdot\cdot}+C(t, \varepsilon)\mathbf{q}_\varepsilon+\mathbf{p}(\omega t)=0$, $C(t, \varepsilon)=C(\mathbf{q}(t, \varepsilon))$.

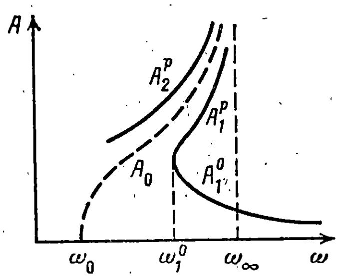
Так как $\lambda_{1r}^1>1$, $\mathbf{p}(\omega t)\geqslant 0$ на $(0, T/4)$, то $\mathbf{q}_\varepsilon(t, \varepsilon)>0$ на $[0, T/4)$, т. е. $\mathbf{q}(t, \varepsilon)$ монотонно возрастает по ε.

Как показано в [12], при $M>0$, $C_i(t)>0$ уравнение (3.5) устойчиво, если в соответствующей краевой задаче при условиях $\mathbf{y}(T/4)=-\mathbf{y}(-T/4)$, $\mathbf{y}^\cdot(T/4)=-\mathbf{y}^\cdot(-T/4)$ первое собственное значение $\lambda_1^i>\lambda$. Так как $C(t)=$ $=C(-t)$, то собственная функция $\mathbf{y}_1(t)$ является четной либо нечетной, т. е. удовлетворяет условиям $\mathbf{y}^\cdot(0)=\mathbf{y}(T/4)=0$ либо $\mathbf{y}^\cdot(-T/4)=\mathbf{y}(0)=0$. Поэтому $\lambda_1^i=\min(\lambda_{1r}^i, \lambda_{1H}^i)$. По доказанному, $\lambda_{1r}^1>1$, $\lambda_{1H}^1>1$, следовательно, при $i=1$ для уравнения (3.3) (ему соответствует $\lambda=1$) выполняется условие устойчивости $\lambda_1^1>1$. Теорема доказана.

Таким образом, в системе с вогнутой нелинейностью при условии (2.5) амплитудно-частотные характеристики решения $\mathbf{q}_1(t)$ имеют вид, представленный на фиг. 2. Если существует указанный предел B_∞, то оче-



Фиг. 2



Фиг. 3

видно, что $\omega_\infty^1=\omega_\infty$, т. е. предельные частоты в случае свободных и вынужденных колебаний совпадают. Более детальный анализ показывает, что этот вывод справедлив и в общем случае. Можно также показать, что для любого $\omega\in(\omega_\infty^1, \infty)$ решение вида $\mathbf{q}_1(t)$ единственно; при $\omega<\omega_\infty^1$ таких решений не существует.

Рассмотрим решение $\mathbf{q}_2(t)$. Положив в (3.1) $\mathbf{p}=\varepsilon\mathbf{p}(\omega t+\pi)=-\varepsilon\mathbf{p}(\omega t)$, аналогично найдем, что на некотором $(\omega_\infty, \omega_2^p<\omega_0)$ существует единственное решение $\mathbf{q}_2(t)$, такое, что $\mathbf{q}_2(t)\to\mathbf{q}_0(t)$ при $\mathbf{p}(t)\to 0$; назовем его резонансным и обозначим $\mathbf{q}_2^p(t)$.

При $\omega=\omega_2^p$ нарушается последнее условие (1.6) либо имеет место равенство $\lambda_{1r}^2=1$. В последнем случае при помощи (2.6) найдем, что $\mathbf{q}_{2\omega}^p(\tau, \omega)\to-\infty$ при $\omega\to\omega_2^p$, поэтому амплитудно-частотные характеристики $A_{2k}^p(\omega)$ решения $\mathbf{q}_2^p(t)$ имеют в точке $\omega=\omega_2^p$ вертикальную касательную. Аналогично решению $\mathbf{q}_1(t)$ можно доказать, что при условии (2.5) $A_{2k}^p(\omega)$ на $(\omega_\infty, \omega_2^p)$ монотонно убывают и удовлетворяют неравенствам $A_{2k}^p(\omega)<A_{0k}(\omega)$ (фиг. 2).

Покажем, что при условиях (2.5), (3.4), $\omega>\omega_0/3$, $\omega>\omega_1$ решение $\mathbf{q}_2^p(t)$ неустойчиво. С учетом неравенства $C_2(t)<C(0)$ найдем, что при указанных условиях $\lambda_{2H}^2>1$; как показано выше, $\lambda_{1H}^2<1$, $\lambda_{1r}^2>1$. В силу $C_2(t)>0$ при малых λ мультипликаторы первого рода уравнения (3.5) лежат на верхней, второго рода — на нижней полуокружности; при возрастании λ они движутся, соответственно, против и по часовой стрелке [12]. При $\lambda=\lambda_1^2=\lambda_{1H}^2<1$ авангардные мультипликаторы разного рода ρ_1^1 и ρ_1^2 встречаются в точке $\rho=-1$. Так как при условии (2.5) собственное значение λ_{1H}^2 является простым, то кратному мультипликатору $\rho=-1$ соответствует один жорданов ящик, причем его порядок равен двум, иначе при $\lambda<\lambda_{1H}^2$ некоторые мультипликаторы лежали бы вне единичной окружности [8]. Поэтому при дальнейшем увеличении λ мультипликаторы ρ_1^1 и ρ_1^2 движутся по действительной оси. Как следует из неравенств $\lambda_{1r}^2>1$, $\lambda_{2H}^2>1$, ни один из мультипликаторов ρ_k^1, ρ_k^2 $(k=1, \ldots, n)$ при $\lambda\in(\lambda_{1H}^2, 1]$ не попадает в точку $\rho=-1$. Следовательно, при $\lambda=1$ мультипликатор ρ_1^2 находится вне единичной окружности, т. е. решение $\mathbf{q}_2^p(t)$ неустойчиво.

Рассмотрим систему с выпуклой нелинейностью. Аналогично случаю вогнутой нелинейности можно показать, что на некотором $(\omega_i^p, \omega_\infty)$ существует единственное резонансное решение $\mathbf{q}_i^p(t)$ $(i=1,2;\ \mathbf{q}_i^p(t)\to\mathbf{q}_0(t)$ при $\mathbf{p}(t)\to 0)$. Так как $\lambda_{2r}^2>1$ при $\omega>\omega_0$, $\lambda_{1r}^2<1$, то в предельной точке ω_2^p нарушается последнее условие (1.6). При непрерывном изменении параметра ω условия (1.6) для решения $\mathbf{q}_1(t)$ сохраняются, поэтому в точке ω_1^p $\lambda_{1r}^1=1$.

Теорема 3. В системе с выпуклой нелинейностью при условиях (1.5), (2.5), (3.4) решение $\mathbf{q}_1^p(t)$ неустойчиво, решение $\mathbf{q}_2^p(t)$ устойчиво при $\omega>(\omega_0^++\omega_1^+)/2$.

Доказательство. Как показано, $\lambda_{1H}^1>1$, $\lambda_{1r}^1<1$ при $\omega>\omega_1^p$; учитывая (1.5) и неравенство $C(t)<C_+$, найдем, что $\lambda_{2r}^1>1$. При этих условиях неустойчивость $\mathbf{q}_1^p(t)$ доказывается аналогично неустойчивости $\mathbf{q}_2^p(t)$ в системе с вогнутой нелинейностью.

Положим в (3.3) $C(t, s)=(1-s)C_++sC_2(t)$ и рассмотрим поведение мультипликаторов $\rho_k^1(s)$, $\rho_k^2(s)$ при возрастании параметра s от 0 до 1. При $s=0$ мультипликаторы первого рода $\rho_k^1(0)=\exp(i\omega_{k+1}^+ T/2)$, второго — $\rho_k^2=1/\rho_k^1$. Так как $\omega>(\omega_0^++\omega_1^+)/2$, то мультипликаторы $\rho_2^1(0),\ldots,\rho_n^1(0)$ и $\rho_1^2(0)$ находятся на верхней полуокружности, причем $\arg\rho_2^1(0)<$ $<2\pi+\arg\rho_1^2(0)$. Следовательно, при $s=0$ собственные значения указанных краевых задач $\lambda_{1r}^2(0)=\lambda_{1H}^2(0)<1$, $\lambda_{2r}^2(0)=\lambda_{2H}^2(0)>1$. С возрастанием s матрица $C(t, s)$ убывает, мультипликаторы $\rho_k^1(s)$ движутся по часовой стрелке, $\rho_k^2(s)$ — против. Так как $C(t, s)>0$ при $s\in[0, 1]$, то $\arg\rho_k^1(s)>0$ [12], поэтому встреча мультипликаторов разного рода может произойти только в точке $\rho=-1$, при этом хотя бы одно из неравенств $\lambda_{1r}^2(s)<1$, $\lambda_{1H}^2(s)<1$ должно нарушаться. Как показано, $\lambda_{1r}^2(1)<1$, $\lambda_{1H}^2(1)<1$, т. е. при $s\in[0, 1]$ не происходит встречи мультипликаторов разного рода. Следовательно, уравнение (3.3) при $C=C(t, 1)=C_2(t)$ устойчиво. Теорема доказана.

Аналогично случаю вогнутой нелинейности можно показать, что при $\omega>\omega_\infty$ существует единственное решение $\mathbf{q}_1(t)$, причем $\mathbf{q}_1(t)\to 0$ при $\mathbf{p}(t)\to 0$; обозначим его $\mathbf{q}_1^0(t)$. Здесь $\lambda_{1r}^1>1$, поэтому $\mathbf{q}_1^0(t)$ может быть продолжено по ω в область $\omega<\omega_\infty$ до значения ω_1^0, при котором $\lambda_{1r}^1=1$. Так как $\lambda_{1H}^1>1$, $\lambda_{1r}^1>1$, то при условиях (2.4), (3.5) решение $\mathbf{q}_1^0(t)$ устойчиво для любого $\omega\in(\omega_1^0, \infty)$.

Можно показать, что если $c_{ik}(q)$ монотонно возрастают по всем q_k (такой случай, например, имеет место в схеме (а) с выпуклыми упругими характеристиками), то решения $\mathbf{q}_1^0(t)$ и $\mathbf{q}_1^p(t)$ совпадают при $\omega=\omega_1^p=\omega_1^0$, поэтому для любого $\omega\in(\omega_1^0, \infty)$ существуют два решения $\mathbf{q}_1(t)$ — $\mathbf{q}_1^p(t)$ и $\mathbf{q}_1^0(t)$. Их амплитудно-частотные характеристики удовлетворяют неравенству $A_{1k}^p(\omega)>A_{1k}^0(\omega)$ (фиг. 3).

Как показано в [5], в системе с одной степенью свободы с выпуклой упругой характеристикой для амлитудно-частотных характеристик решений $\mathbf{q}_0(t)$, $\mathbf{q}_1(t)$ и $\mathbf{q}_2(t)$ справедливо неравенство $A_1(\omega)<A_0(\omega)<A_2(\omega)$. Можно показать, что в системе с n степенями свободы оно имеет место, во всяком случае, при значениях ω, достаточно близких к ω_∞ (фиг. 3).

4. Параметрические колебания. Предположим, что упругие и инерционные характеристики периодически изменяются, т. е. $V=V(\mathbf{q}, \omega t+\alpha)$, $T={}^1/_2\sum m_i(\omega t+\alpha)\dot q_i^{2}$, причем $V(0, \omega t+\alpha)=\mathrm{const}$. Уравнение параметрических колебаний такой системы имеет вид

$$(M(\omega t+\alpha)\dot{\mathbf{q}})^{\cdot}+\mathbf{f}(\mathbf{q}, \omega t+\alpha)=0 \qquad (4.1)$$

$$M=\mathrm{diaq}(m_1,\ldots, m_n), \qquad \mathbf{f}=(f_1,\ldots, f_n)^{\mathrm{T}}, \qquad f_i=\partial V/\partial q_i$$

Полагаем, что выполнены следующие условия:

$$M(\omega t)>0, \quad M(\omega t)=M(-\omega t)=-M(\omega t+\pi/2) \qquad (4.2)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \omega t)=\mathbf{f}(\mathbf{q}, -\omega t)=-\mathbf{f}(\mathbf{q}, \omega t+\pi/2)$$

$$\dot M(\omega t)\geqslant 0, \quad \mathbf{f}_t(q, \omega t)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{q}>0, \quad -\pi/2\omega<t<0$$

Таким образом, упругие и инерционные характеристики симметричны и монотонно изменяются между экстремальными значениями. Отметим, что в приложениях часто $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \omega t)=\mathbf{f}_0(\mathbf{q})+r(\omega t)\mathbf{f}_1(q)$, где $r(\omega t)$ — скалярная функция с нулевым средним значением (обычно $r(\omega t)=\cos 2\omega t$).

Кроме (4.2) используются также условия (1.1), (1.2), (1.4) и другие, при этом подразумевается, что они выполняются для всех t.

Решения уравнения (4.1), удовлетворяющие условиям (1.6) при $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=\pi/2$, обозначим соответственно $\mathbf{q}_1(t)$ и $\mathbf{q}_2(t)$. Таким образом, период рассматриваемых решений равен удвоенному периоду параметрических возмущающих воздействий.

Положив $\tau=\omega t$ и используя представление $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \omega t)=B(\mathbf{q}, \omega t)\mathbf{q}$, найдем, что $\mathbf{y}_1^i(\tau)=\mathbf{q}_i(\tau/\omega)$ является собственной функцией краевой задачи

$$(M(\tau+\alpha_i)\mathbf{y}')'+\lambda B_i(\tau)\mathbf{y}=0, \qquad \mathbf{y}'(0)=\mathbf{y}(\pi/2)=0 \tag{4.3}$$

$$B_i(\tau)=B(\mathbf{y}_1^i(\tau), \tau+\alpha_i), \quad B(\mathbf{q}, \tau)=\int_0^1 C(\theta\mathbf{q}, \tau)\,d\theta$$

отвечающей первому собственному значению $\lambda_1=1/\omega^2$.

Обозначим $\omega_0^i=(\lambda_0^i)^{-2}$, где λ_0^i — первое положительное собственное значение задачи (4.3) при $B_i(\tau)=C(0, \tau+\alpha_i)$ (величины ω_0^1, ω_0^2 представляют собой границы основного параметрического резонанса линеаризованной системы). Предположим, что в окрестности начала координат существует единственное однопараметрическое семейство решений $\mathbf{q}_i(t, s)$, такое, что $\mathbf{q}_i(t, s)\to 0$, $\omega_i(s)\to\omega_0^i$ при $s\to 0$ (существование $\mathbf{q}_i(t, s)$ может быть доказано при естественных предположениях относительно вида $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \omega t)$ в окрестности $\mathbf{q}=0$ [1]). Так как $M(\tau)$, $B(0, \tau)=C(0, \tau)$ — неотрицательные матрицы, то $\mathbf{q}_i(t, s)$ при малых s удовлетворяют соотношениям (1.6).

При первом условии (1.4) $C(0, \tau+\alpha_i)>B_i(\tau)$, при втором — $C(0, \tau+\alpha_i)<B_i(\tau)$, поэтому частота рассматриваемых колебаний в системе с вогнутой нелинейностью $\omega<\omega_0^i$, с выпуклой — $\omega>\omega_0^i$.

Как и выше, положительные собственные значения краевой задачи для уравнения

$$(M\mathbf{y}^{\cdot})^{\cdot}+\lambda C_i(t)\mathbf{y}=0, \qquad C_i(t)=C(\mathbf{q}_i(t), \omega t+\alpha_i) \tag{4.4}$$

при условиях $\mathbf{y}^{\cdot}(0)=\mathbf{y}(T/4)=0$ обозначим λ_{kr}^i, при условиях $\mathbf{y}^{\cdot}(-T/4)=\mathbf{y}(0)=0-\lambda_{kH}^i$ ($i=1, 2$; $k=1, 2, \ldots$).

При первом условии (1.4) $B_i(t)=B(\mathbf{q}_i(t), \omega t+\alpha_i)>C_i(t)$, при втором — $B_i(t)<C_i(t)$, поэтому в системе с вогнутой нелинейностью $\lambda_{1r}^i(C_i(t))>\lambda_{1r}^i(B_i(t))=1$, с выпуклой — $\lambda_{1r}^i(C_i(t))<\lambda_{1r}^i(B_i(t))=1$.

Обозначим $\mathbf{v}_i=\mathbf{q}_i^{\cdot}(t)$; в силу (1.6) $\mathbf{v}_i^{\cdot}(-T/4)=\mathbf{v}_i(0)$, $\mathbf{v}_i(t)>0$ на $[-T/4, 0)$. Дифференцируя (4.1), найдем, что $\mathbf{v}_i(t)$ является положительным решением краевой задачи (1.7) при $M=M(\omega t+\alpha_i)$, $R=C_i(t)$, $\mathbf{l}^i(t)=(M^{\cdot}(\omega t+\alpha_i)\mathbf{v}_i(t))^{\cdot}+\mathbf{f}_t(\mathbf{q}_i(t), \omega t+\alpha_i)$, $a=-T/4$, $b=0$, $\lambda=1$. Так как $M^{\cdot}(\omega t)\geqslant 0$, $\mathbf{f}_t(\mathbf{q}_i(t), \omega t)\geqslant 0$, $\mathbf{v}_i(t)>0$, то $\mathbf{L}^1(t)=-\mathbf{L}^2(t)>0$ на $[-T/4, 0)$. Поэтому аналогично случаю вынужденных колебаний найдем $\lambda_{1H}^1>1$, $\lambda_{1H}^2<1$.

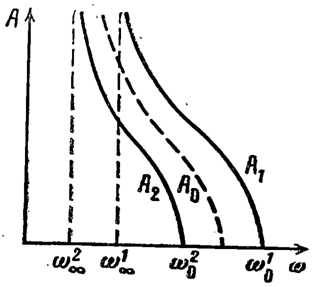
Рассмотрим сначала систему с вогнутой нелинейностью. Обозначим $\omega_{2H}=(\lambda_{2H}^0)^{-2}$, где λ_{2H}^0 — второе собственное значение краевой задачи для уравнения (4.4) при $C=C(0, \omega t+\pi/2)$, $\mathbf{y}^{\cdot}(-T/4)=\mathbf{y}(0)=0$.

Теорема 4. В системе (4.1), (4.2) с вогнутой нелинейностью для любого $\omega\in(\omega_\infty^i, \omega_0^i)$ существует решение вида $\mathbf{q}_i(t)$, причем $\|\mathbf{q}_i(0)\|\to\infty$ при $\omega\to\omega_\infty^i$ ($i=1, 2$). При условии (2.5) амплитудно-частотные характеристики $A_{ik}(\omega)$ ($k=1, \ldots, n$) монотонно убывают. При условиях (2.5), (3.4) решение $\mathbf{q}_1(t)$ устойчиво для всех ω, решение $\mathbf{q}_2(t)$ неустойчиво при $\omega>\omega_{2H}$.

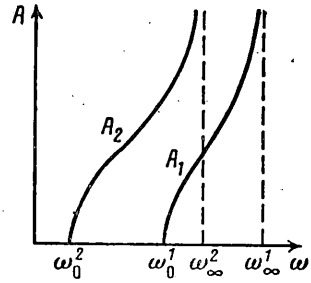
Доказательство. Как было показано, $\lambda_{1r}^i>1$ ($i=1, 2$), поэтому любое решение $\mathbf{q}_i(t)$ единственным образом продолжимо по параметру ω, при этом соотношения (1.6) сохраняются. Аналогично случаю свободных колебаний можно показать, что для рассматриваемых решений $\|\mathbf{q}_i(t)\|\to 0$ только при $\omega\to\omega_0^i$. Поэтому при продолжении по ω вторым предельным является такое значение $\omega=\omega_\infty^i$, что $\|\mathbf{q}_i(0, \omega)\|\to\infty$ при $\omega\to\omega_\infty^i$.

Указанное достаточное условие устойчивости уравнения (3.5) $\min(\lambda_{1r}^i, \lambda_{1H}^i)>\lambda$ справедливо и для уравнения (4.4) [12]. Так как $\lambda_{1r}^1>1$, $\lambda_{1H}^1>1$, то уравнение (4.4) при $i=1$, $\lambda=1$ (т. е. уравнение в вариациях, отвечающее решению $\mathbf{q}_1(t)$) устойчиво.

Так как $C(\mathbf{q}, \omega t)<B(\mathbf{q}, \omega t)<C(0, \omega t)$, то $\lambda_{2H}^2(C_2(t))>\lambda_{2H}^2(C(0, \omega t+\pi/2))>1$ при $\omega>\omega_{2H}$; установлено, что $\lambda_{1r}^2>1$, $\lambda_{1H}^2<1$. Как и в случае



Фиг. 4



Фиг. 5

вынужденных колебаний, эти неравенства свидетельствуют о неустойчивости соответствующего решения $\mathbf{q}_2(t)$.

Доказательство неравенства $dA_{ik}(\omega)/d\omega<0$ проводится так же, как и для свободных колебаний. Теорема доказана.

Можно показать, что для любого $\omega\in(\omega_\infty^i, \omega_0^i)$ решение $\mathbf{q}_i(t)$ единственно.

Перейдем к системе с выпуклой нелинейностью. Если существует матрица C_+, удовлетворяющая при $\mathbf{q}>0$ неравенству $C_+>C(\mathbf{q}, \omega t)$ и условиям (1.5), где ω_0^{+2} и ω_1^{+2} — собственные значения матрицы $M^{-1}(\pi/2)C_+$ ($\omega_0^+>\omega_1^+\geqslant\ldots$), то решение $\mathbf{q}_i(t)$ единственным образом продолжимо по ω от $\omega=\omega_0^i$ до $\omega=\omega_\infty^i$, причем $\|\mathbf{q}_i(0)\|\to\infty$ при $\omega\to\omega_\infty^i$. Доказательство этого утверждения аналогично случаю свободных колебаний; при этом в силу $M(t)>M(\pi/2)$ и $C_+>C_i(t)$ условия (1.5) гарантируют неравенство $\lambda_{2r}^i>1$.

При условиях (2.4), (3.5) и $\omega>\max(\omega_0^+/3, \omega_1^+)$ решение $\mathbf{q}_1(t)$ неустойчиво. Действительно, при этом $\lambda_{2r}^1>1$; выше показано, что $\lambda_{1r}^1<1$, $\lambda_{1H}^1>1$. Как установлено при доказательстве теоремы 3, при выполнении этих неравенств мультипликатор ρ_1^2 лежит вне единичной окружности.

При условиях (2.4), (3.5) и $\omega>(\omega_1^++\omega_0^+)/2$ решение $\mathbf{q}_2(t)$ устойчиво. Для доказательства можно положить $M(t, s)=(1-s)M(\pi/2)+sM(\omega t+\pi/2)$, $C(t, s)=(1-s)C_++sC_2(t)$ и повторить рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3.

Используя вариационное определение первого положительного собственного значения самосопряженной краевой задачи, можно доказать, что $\omega_0^1>\omega_0^2$. Поэтому при достаточно малых A амплитудно-частотные характеристики $A_{1k}(\omega)$, $A_{2k}(\omega)$ решений $\mathbf{q}_1(t)$, $\mathbf{q}_2(t)$ в системах с вогнутой и выпуклой нелинейностью имеют вид, представленный на фиг. 4, 5 соответственно (в системах с одной степенью свободы неравенство $\omega_1(A)>\omega_2(A)$ справедливо для всех A [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 394 с.
2. *Rosenberg R. M.* On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom.— In: Advances in Applied Mechanics. N. Y.— L.: Acad. Press, 1966, v. 9, p. 156—243.
3. *Vito R.* Similar normal mode vibrations in certain conservative systems with two degrees-of-freedom.— Internat. J. Nonlinear Mech., 1972, v. 7, № 5, p. 473—487.
4. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В.* О периодических решениях, близких к прямолинейным нормальным формам колебаний.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 6, с. 1051—1058.
5. *Зевин А. А.* Устойчивость периодических колебаний в системах с мягкой и жесткой нелинейностью.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 4, с. 640—649.
6. *Зевин А. А.* Качественное исследование устойчивости периодических колебаний и вращений в параметрически возбуждаемых нелинейных системах второго порядка.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 38—44.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
8. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
9. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
10. *Келлер Д. Б.* Теория ветвления решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974, с. 19—34.
11. *Зевин А. А.* Некоторые условия существования и устойчивости периодических колебаний в нелинейных неавтономных гамильтоновых системах.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 637—646.
12. *Крейн М. Г.* Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— В кн.: Памяти Александра Александровича Андронова. М.: Изд-во АН СССР, 1955, с. 413—498.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
6.IX.1984