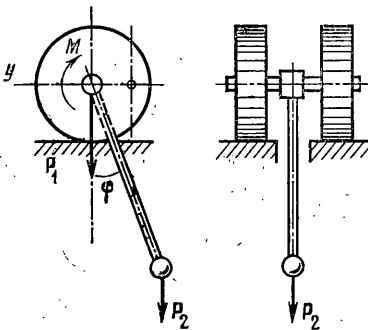


УДК 531.53

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ МАЯТНИКОМ  
КАЮМОВ О. Р.

Рассматривается управляемая механическая система в виде маятника с точкой подвеса на оси колеса, которое может катиться по горизонтали без проскальзывания. Управляющий момент, приложенный к колесу ограничен по модулю. На фазовом цилиндре строится оптимальное по быстродействию гашение колебаний маятника. Дается алгоритм построения программного управления, переводящего систему из нижнего положения равновесия в неустойчивое верхнее с гашением скорости точки подвеса в конце движения.

1. Рассмотрим маятник в виде жесткого стержня длины  $l$  с массой  $m_2$  на конце, точка подвеса которого лежит на оси колеса массы  $m_1$ . Положение маятника определим углом  $\varphi$ , образованным стержнем с вертикальной осью (фиг. 1) и координатой точки подвеса по горизонтали  $y$ . Трение качения и трение в точке подвеса отсутствуют. Моменты инерции колеса и стержня, масса стержня не рассматриваются, так как их можно учесть приведением массы груза, массы колеса и длины стержня. Ограничение на внешний управляющий момент  $M$ , приложенный к колесу, симметричное. Рассмотрим случай  $\varepsilon = m_2/m_1 \ll 1$ . Величины  $\varepsilon$  берутся достаточно малые для выполнения условия непроскальзывания колес  $\mu[(m_1+m_2)g + m_2l\varphi'' \cos \varphi + m_2l\varphi'' \sin \varphi] \geq M/R$ , где  $\mu$  — коэффициент трения скольжения колес о поверхность,  $R$  — радиус колес.



Фиг. 1

Для рассматриваемой системы выпишем функцию Лагранжа  $L = \frac{1}{2}(\varepsilon+1)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon(\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + \varepsilon\cos\varphi$ ,  $x=y/l$ ,  $t=\sqrt{g/l}\tau$ . Система, описывающая управляемое движение

$$\begin{aligned} d/dt[(1+\varepsilon)\dot{x} - \varepsilon\dot{\varphi}\cos\varphi] &= u, \\ \varphi'' &= -\sin\varphi + \dot{x}''\cos\varphi \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $u = M/(m_1lg)$ ,  $|u| \leq a$ , распадается в силу цикличности координаты  $x$ .

Представляют интерес следующие взаимосвязанные задачи управления маятником:

перемещение за минимальное время из произвольной точки  $\|\varphi, \dot{\varphi}, x, \dot{x}\|^T$  фазового пространства на многообразие  $\varphi=0, \dot{\varphi}=0$  (синтез оптимального быстродействия при переводе стержня в нижнее положение равновесия);

перевод системы из состояния  $\varphi=0, \dot{\varphi}=0, x=0, \dot{x}=0$  в положение  $\varphi=\Pi, \dot{\varphi}=0, x=0, \dot{x}=0$ .

Программное управление из решения второй задачи можно использовать как начальное приближение для оптимизации быстродействия численными методами.

2. Первая задача в силу инвариантности уравнений (1.1) и краевых условий относительно сдвига по  $x$ ,  $x^*$  рассматриваются лишь на фазовом цилиндре ( $\varphi \times \dot{\varphi}$ ):

$$\ddot{\varphi} = -\sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{1+\varepsilon} [u + d/dt(\varepsilon \dot{\varphi} \cos \varphi)]$$

Согласно принципу максимума Понтрягина, ввиду линейности гамильтониана относительно управляющей переменной и линейности ограничения  $|u| \leq a$ ,  $a = \text{const}$  в задачах быстрогодействия оптимальные управления кусочно-постоянные. Особые управления здесь невозможны. Поэтому будем строить оптимальные траектории путем «склейки» участков фазовых кривых с постоянным управлением  $u = \pm a$ . На этих участках существует первый интеграл

$$E = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - u \sin \varphi - \cos \varphi + \varepsilon (\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi - \cos \varphi) \quad (2.1)$$

Энергией  $E_1$  этой системы назовем интеграл (2.1) при  $u=0$ .

В качестве необходимого отступления построим локально оптимальное управление, обеспечивающее в каждый момент времени максимальную скорость изменения  $E_1$ . Пусть  $E_1(t_0) < E_1(t_k)$ . Тогда для всех  $\varphi(t_0)$ ,  $\dot{\varphi}(t_0)$  ограниченное управление, удовлетворяющее  $\max(dE_1/dt)$ , получим в виде  $u = a \text{sign}(\dot{\varphi} \cos \varphi)$ . Соответствующие ему фазовые кривые условимся называть траекториями оптимального демпфирования энергии.

Можно показать, что существует хотя бы одна, оптимально демпфирующая энергию, среди траекторий оптимального быстрогодействия лагранжевой системы вида

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{u}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad |\mathbf{u}| \leq a \quad (2.2)$$

при всех возможных начальных условиях и движениях в области управляемости. Здесь  $\mathbf{q} = \|q_1 \dots q_n\|^T$  — вектор состояния,  $\mathbf{u} = \|u_1 \dots u_n\|^T$  — вектор управления,  $\mathbf{a} = \|a_1 \dots a_n\|^T$  — заданные ограничения,  $\mathbf{R}(\mathbf{q})$  — вектор-функция ( $n \times 1$ ),  $\mathbf{q}(t_k) = \text{const}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t_k) = 0$ . Под энергией  $E_1$  подразумевается более общий интеграл Якоби — Пенлеве.

Для доказательства достаточно, используя общую структуру лагранжиана, убедиться, что гамильтониан  $H = \lambda_1^T \dot{\mathbf{q}} + \lambda_2^T \mathbf{q}^*$  линеен относительно управления, т. е. быстрогодействия реализуются лишь при  $u_i = \pm a_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). При этом гамильтоновой системе удовлетворяет сопряженный вектор  $\lambda_1 = \partial E / \partial \dot{\mathbf{q}}$ ,  $\lambda_2 = \partial E / \partial \mathbf{q}^*$ , где  $E = E_1 - R^T(\mathbf{q}) \mathbf{u}$  — первый интеграл системы (2.2) на участках постоянства управления. Вдоль этих траекторий быстрогодействия скорость уменьшения энергии системы максимальна, а гамильтониан равен нулю:  $H_0 = 0$  (через  $H_0$  обозначены постоянные значения гамильтониана вдоль оптимальных по быстроддействию траекторий).

3. Получим при  $\varepsilon = 0$  решение первой задачи. Оно близко к искомому и далее поясняется. В случае  $\varepsilon = 0$  система (1.1) принимает вид

$$\ddot{\varphi} = -\sin \varphi + u \cos \varphi \quad (3.1)$$

и на участках постоянства управления представляет собой однопараметрическое (по  $\gamma$ ) семейство консервативных систем с одной степенью свободы

$$\ddot{\varphi} = -\beta^2 \sin(\varphi + \gamma), \quad \gamma = \arcsin(-u/\beta^2), \quad \beta^2 = \sqrt{a^2 + 1} \quad (3.2)$$

Оптимизируем по быстроддействию гашение колебаний стержня в нижнем положении равновесия. На участках постоянства управления  $u = \pm a$  гамильтонова система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \varphi_2, & \dot{\varphi}_2 &= -\beta^2 \sin(\varphi_1 + \gamma) \\ \dot{\lambda}_1 &= \lambda_2 \beta^2 \cos(\varphi_1 + \gamma), & \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $\lambda = \|\lambda_1, \lambda_2\|^T$  — сопряженный вектор,  $H = \lambda_1 \varphi_2 - \beta^2 \lambda_2 \sin(\varphi_1 + \gamma)$  — гамильтониан. Согласно принципу максимума Понтрягина, оптимальное быстроддействие реализуется при  $u = a \text{sign}(\lambda_2 \cos \varphi)$ . Используя первый интеграл  $E = \frac{1}{2} \varphi_2^2 - \beta^2 \cos(\varphi_1 + \gamma)$ , можно разрешить систему (3.3). Пусть

$E_2(\varphi_1, \varphi_2) = E(\varphi_1 - \gamma, \varphi_2) - \beta^2$ . Тогда решение системы (3.3) будет в режиме колебаний ( $0 \geq E_2 \geq -2\beta^2$ ):

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -2k_1 k_1' \beta \operatorname{sn} v / \operatorname{dn} v \\ \lambda_2 &= c_1 \frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v} - \frac{H_0}{2k_1 k_1' \beta^2} \left[ \operatorname{cn} v + z(v) \frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v} + \left( \frac{B}{K} - k_1'^2 \right) v \frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v} \right] \\ k_1 &= \sqrt{1 + E_2 / (2\beta^2)}, \quad k_1^2 + k_1'^2 = 1 \\ B &= \int_0^{\kappa} \operatorname{dn}^2 v \, dv, \quad z(v) = \int_0^v \left( \operatorname{dn}^2 v - \frac{B}{K} \right) dv, \quad v = \beta t + \psi_1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$ ,  $z(v)$  — эллиптические функции Якоби,  $k_1$  — модуль эллиптических функций,  $\psi_1$  — произвольная фазовая постоянная,  $K$  и  $B$  — полные эллиптические интегралы, соответственно, первого и второго рода,  $T_1 = 4K(k_1)$  — период колебаний,  $\varphi_0 = 2 \arcsin k_1$  — их амплитуда,  $c_1$  — постоянная интегрирования.

Решение в режиме вращений ( $E_2 > 0$ ):

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \pm 2\beta k_2' / (k_2 \operatorname{dn} v), \quad k_2'^2 + k_2^2 = 1 \\ \lambda_2 &= \pm \left\{ \frac{c_2}{\operatorname{dn} v} - \frac{H_0 k_2^2}{2\beta^2 k_2'} \left[ \frac{z(v)}{\operatorname{dn} v} + \frac{B}{K} \frac{v}{\operatorname{dn} v} \right] \right\} \\ k_2 &= \sqrt{2\beta^2 / (E_2 + 2\beta^2)}, \quad v = (\beta t + \psi_2) / k_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь  $k_2$  — модуль эллиптических функций,  $\psi_2$  — произвольная фазовая постоянная,  $T_2 = 2k_2 K(k_2)$  — период вращений,  $c_2$  — постоянная интегрирования.

Отметим, что можно проинтегрировать гамильтонову систему для любого объекта (2.2) с одной степенью свободы. Первый интеграл при постоянном управлении имеет вид

$$E = \frac{1}{2} g(y_1) y_2^2 + b(y_1) + ur(y_1) \quad (3.6)$$

Здесь  $y_1 = q$ ,  $y_2 = \dot{q}$ , а  $b(y_1)$ ,  $g(y_1)$ ,  $r(y_1)$  — некоторые функции, причем  $g(y_1) > 0$ . Оптимальное быстроедействие реализуется при  $u = a \operatorname{sign} [\lambda_2 \partial r / \partial y_1]$ . Получив  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  из (3.6) и подставляя затем  $\lambda_1 = (H_0 - \lambda_2 y_2) / y_2$  в уравнение для  $\lambda_2$ , получим в результате интегрирования

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= y_2 g(y_1) [c - I(t)], \quad I(t) = \int \frac{H_0 dt}{g(y_1(t)) y_2^2(t)} \\ \lim_{y_2 \rightarrow 0} y_2 I(t) &= -H_0 / [g(y_1) y_2^*] \neq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $c$  — постоянная интегрирования; точки покоя и траектории оптимального демпфирования энергии ( $H_0 = 0$ ) исключаются. В случае  $H_0 = 0$  справедливо  $\operatorname{sign}(c y_2) = \operatorname{sign} \lambda_2$ . Учитывая изложенное, можно записать решение первой задачи для произвольного  $\varepsilon \ll 1$  в виде

$$\lambda_2 = \varphi_2(t) [1 + \varepsilon \sin^2 \varphi_1(t)] \left\{ c - \int \frac{H_0 dt}{\varphi_2^2(t) [1 + \varepsilon \sin^2 \varphi_1(t)]} \right\}$$

Функции  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  определяются из (2.1).

Используя это решение, можно на фазовом цилиндре склеить в обратном времени все оптимальные по быстродействию траектории из кусков с постоянными значениями  $u = a \operatorname{sign}(\lambda_2 \cos \varphi_1)$ . При этом  $\varphi_1(t_k) = 0$ ,  $\varphi_2(t_k) = 0$ ,  $\lambda_2(t_k) = -1$  (для траекторий  $H_0 \neq 0$ , а иначе  $\lambda_2(t_k) = 0$ ). В силу однородности гамильтониана относительно  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  значение  $\lambda_1(t_k)$  выбирается как параметр. Сложность заключается в аналитической записи решения

4. Далее, используя решение (3.4)–(3.5), построим синтез оптимальных быстродействий на цилиндре  $(\varphi_1 \times \varphi_2)$  при  $\epsilon = 0$ .

В качестве необходимого отступления рассмотрим частный случай лагранжевой системы с первым интегралом (3.6), когда

$$g(y_1) = 1, \quad [-\partial b / \partial y_1 + u \partial r / \partial y_1] = f(y_1 + \gamma), \quad \gamma(-u) = -\gamma(u) \quad (4.1)$$

Если при  $y_1 \in (-\alpha, \alpha)$  (внутри области управляемости) для функций  $f(y_1)$  и  $\partial r / \partial y_1$  существует  $0 \geq f'(y_1) > -\infty$ ,  $f(-y_1) = -f(y_1)$ ,  $\partial r / \partial y_1 \neq 0$ , то в этой области линия переключения ( $\lambda_2 = 0$ ) в задаче синтеза быстродействия пересекает ось  $y_1$  только в точках  $(\pm 2n\gamma, 0)$ , где  $n \in N$ .

Докажем это утверждение. В силу первого неравенства и нечетности функции  $f(y_1)$  имеем  $F(y_1) = -\int_0^{y_1} f(y_1) dy_1$ ,  $F(-y_1) = -F(y_1)$ ,  $d^2F / dy_1^2|_{y_1=0} > 0$ . Кривая  $1/2 y_2^2 + F(y_1) = E$  симметрична на фазовой плоскости относительно осей  $y_1, y_2$ . Она замкнута и ограничена ввиду непрерывности и гладкости  $f(y_1)$  при  $y_1 \in (-\alpha, \alpha)$ . Следовательно, движение системы периодическое с периодом  $2T(E)$ . Отсюда  $y(t+T) = -y(t)$ ,  $y = \|y_1, y_2\|^T$ . Рассмотрим оптимальную траекторию в обратном времени при  $y(t_k) = \|0, 0\|^T$ . Не уменьшая общности, в силу симметрии (4.1) возьмем  $u(t_k - 0) = +a$ . Движение до переключения происходит по кривой  $1/2 y_2^2 + F(y_1 - \gamma) = E$ . В новых переменных  $(y_1 - \gamma, y_2)$  ввиду постоянства гамильтониана вдоль оптимальной траектории

$$H(t_k - T) = \lambda_1(t_k - T) y_2(t_k - T) + \lambda_2(t_k - T) f(y_1(t_k - T)) = H(t_k) \quad (4.2)$$

Так как  $y_2(t_k) = 0$ ,  $y_1(t_k) = -\gamma$ , то в силу нечетности функции  $f(y_1)$  получим

$$\lambda_2(t_k - T) = -\lambda_2(t_k) \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что существует  $t_1 \in [t_k, t_k - T]$ , такое, что  $\lambda_2(t_1) = 0$ . При этом если  $t_1 = t_k$  или  $t_1 = t_k - T$ , то  $H_0 = 0$  и траектория оптимально демпфирует энергию (для нее  $\lambda_2 = c y_2$ ). Ввиду симметрии системы ( $y_1 \rightarrow -y_1, y_2 \rightarrow -y_2, u \rightarrow -u$ ) таких траекторий ( $H_0 = 0$ ), две, они пересекают ось  $y_1$  в рассматриваемой области в точках  $(\pm 2n\gamma, 0)$ ,  $n \in N$ . Таким образом, линия переключения ( $\lambda_2 = 0$ ) состоит из непрерывных дуг, соединяющих точки  $(2i\gamma, 0)$  и  $(2(i+1)\gamma, 0)$ , причем каждая из дуг полностью лежит по одну сторону от оси  $y_1$ , ибо в противном случае имели  $\lambda_2 = 0$  и  $y_2 = 0$  для траекторий, не удовлетворяющих условию  $H_0 = 0$ , что невозможно. Утверждение доказано.

В рассматриваемой области  $y_1 \in (-\alpha, \alpha)$  линия переключения  $\lambda_2 = 0$  лежит полностью в I и III четвертях фазовой плоскости, так как нули функций  $y_2(t)$  и  $\lambda_2(t)$  чередуются. Это следует из (4.2) и (4.3): если  $y_2(t_2) = 0$ , то существует  $t_3 \in [t_2, t_2 - T]$ , где  $\lambda_2(t_3) = 0$ .

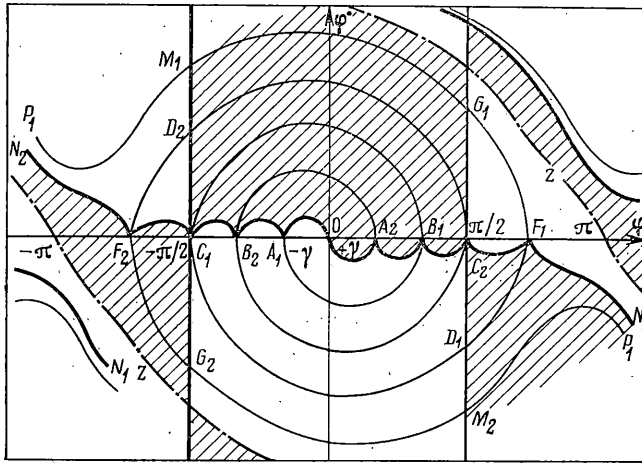
Можно убедиться, что система (3.2) удовлетворяет условиям утверждения в области  $\varphi_1 \in (-\Pi/2, \Pi/2)$ . При движении из точки  $(0, 0)$  в обратном времени на дуге  $1/2 \varphi_2^2 - \beta^2 \cos(\varphi_1 - \gamma) = E$  при  $\varphi_2 < 0$  имеется точка переключения  $\lambda_2 = 0$  в силу (4.3). Если  $H_0 = 0$ , то эта точка  $-(2\gamma, 0)$ . Ввиду симметрии имеются две траектории быстродействия, оптимально демпфирующие энергию. Они пересекают ось  $\varphi_1$  в точках  $(\pm 2n\gamma, 0)$ ,  $n \in N$ , разграничивая дуги переключения в этой области. В силу однородности системы (3.3) относительно  $\lambda_1, \lambda_2$  для семейства всех оптимальных траекторий в обратном времени  $t_k' = 0$  (штрих означает обратное течение времени) всегда можно получить, например,  $\lambda_2'(0) = -1$  (кроме траекторий  $H_0 = 0$ , для них  $\lambda_2'(0) = 0$ ). Каждой точке первого переключения  $\lambda_2' = 0$  соответствует свой параметр  $\psi_1$ , такой, что

$$c_1 = \frac{H_0}{2k_1 k_1' \beta^2} \left[ \frac{\operatorname{cn} \psi_1 \operatorname{dn} \psi_1}{\operatorname{sn} \psi_1} + z(\psi_1) + \left( \frac{B}{K} - k_1'^2 \right) \psi_1 \right] - \frac{\operatorname{dn} \psi_1}{\operatorname{sn} \psi_1}$$

Вдоль всех траекторий быстрогодействия выполняется неравенство

$$H = -\lambda_1' \varphi_2' + \beta^2 \lambda_2' \sin(\varphi_1' + \gamma) = -\lambda_2'(0) a \geq 0$$

Пусть  $\lambda_2(v_1') = 0$  для первой точки переключения,  $\lambda_2(v_2') = 0$  — для второй. Тогда  $\lambda_2'(v_3') > 0$ , если  $v_1' < v_3' < v_2'$ . При этом  $\lambda_2'(v_1' + 2K) = [H_0 K / (k_1 k_1' \beta^2)] (B/K - k_1'^2) \operatorname{sn} v_1' / \operatorname{dn} v_1' \geq 0$ , т. е.  $v_2' - v_1' \geq 2K$ , причем равенство имеет место лишь для отображений  $0 \rightarrow A_i$  (фиг. 2). Если бы для всех точек выполнялось  $v_2' - v_1' = 2K$ , получилась бы дуга линии переключения  $B_2 A_1$ , симметричная дуге  $O A_2$  относительно центра  $(-\gamma, 0)$ . На самом же деле для каждого такого отображения  $\varphi_2'(v_2') < -\varphi_2'(v_1')$ , кроме точек  $O$  и  $A_2$ . Аналогично получаем все дуги переключения в области  $\varphi_1 \in (-\Pi/2, \Pi/2)$  последовательными отображениями относительно центров  $(\pm\gamma, 0)$ .



Фиг. 2

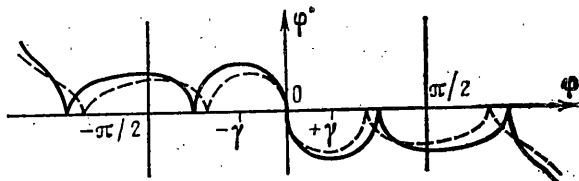
При этом все дуги выпуклы и не имеют общих точек с осью  $\varphi_1$ , кроме  $(\pm 2n\gamma, 0)$ ,  $n \in N$ . Отметим, что в строгом смысле [1] объект в области  $\varphi_1 \in (-\Pi/2, \Pi/2)$  не является осциллирующим, хотя и имеет топологически эквивалентную картину синтеза.

Построим оптимальные траектории в области  $\varphi_1 \in (\Pi/2, 3\Pi/2)$ . Для каждой кривой в обратном времени в точках  $\varphi_1 = \pm\Pi/2$  происходит переключение, при этом система из режима колебаний может перейти в режим вращений. В области вращений, используя решения (3.5), можно показать, что линия переключения  $F_i N_i$  (фиг. 2) асимптотически стремится к линии  $M_i P_i$ , вдоль которой  $H_0 = 0$ . Очевидно, что пересечься они не могут, так как для первой  $\lambda_2 = 0$ , а для второй  $\lambda_2 = c\varphi_2$ , но  $\varphi_2 \neq 0$ .

Неединственность решения поставленной задачи оптимизации, вызванную заданием угла  $\varphi_1$  лишь с точностью до  $2k\Pi$ ,  $k \in N$ , можно преодолеть искусственным введением линии разделения  $z$ -непрерывного множества точек (включая  $(\Pi, 0)$ ), минимальное время движения от которых до двух центров  $(0, 0)$  и  $(2\Pi, 0)$  одинаково. Кривая разделения симметрична относительно точки  $(\Pi, 0)$ , на фиг. 2 она изображена штрихпунктирной линией.

В результате поставленная задача оптимального быстрогодействия решена в форме регулярного [1] синтеза на фазовом цилиндре  $(\Phi \times \Phi')$ . Здесь двумерное пространство  $G$  — лентообразная область на цилиндре с границей  $z$ . Траектории  $H_0 = 0$  состоят из одномерных клеток первого рода  $(P_i M_i, M_i G_i, G_i F_i, F_i D_i, \dots)$  и дуг  $O A_i$ . Внутри двумерных клеток первого рода синтезирующая функция принимает постоянные значения, причем  $u = -a$  в заштрихованных областях. На фиг. 2 изображен случай  $\gamma = \Pi/12$ .

В силу (2.1) параметры фазовых кривых  $H_0=0$  (траекторий быстрого действия, вдоль которых скорость изменения энергии системы в каждый момент времени максимальна) для систем  $\varepsilon \ll 1$  и  $\varepsilon=0$  отличаются на величину  $\sim \varepsilon$  (при  $t \sim 1/\varepsilon$ ), ибо они обе выходят из точки  $(0, 0)$  и состоят из участков кривых близких энергий. Эти траектории ( $H_0=0$ ) определяют качественный вид линий переключения, так как в области колебаний они разделяют выпуклые дуги линий  $\lambda_2=0$ , пересекаясь с ними в точках оси  $\varphi$ , а в области вращений линия переключения асимптотически стремится к траектории  $H_0=0$ . Поэтому картины синтеза на фазовой плоскости для систем  $\varepsilon \ll 1$  и  $\varepsilon=0$  в указанном диапазоне времени качественно



Фиг. 3

отличаться не будут. На фиг. 3 пунктиром изображена линия переключения для  $\varepsilon=0,03$ ,  $\gamma=\pi/6$ .

5. Решение второй задачи проведем в два этапа. Вначале рассмотрим трехмерный вектор  $\|\varphi, \dot{\varphi}, x\|^T$ . Основная трудность при построении программного управления, переводящего систему из  $\|0, 0, 0\|^T$  в положение  $\|\pi, 0, 0\|^T$ , заключается в невозможности решения краевой задачи для системы (1.1) методами обратных задач динамики [2] из-за обращения в нуль множителя  $\cos \varphi$  при управлении. Для преодоления этого используем решение предыдущей задачи. Запишем (1.1) в виде

$$\varphi'' = -\sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{1+\varepsilon} \left[ u + \frac{d}{dt} (\varepsilon \dot{\varphi} \cos \varphi) \right], \quad \dot{w} = u$$

$$w = (1+\varepsilon)x - \varepsilon \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad w(\varphi=0, \dot{\varphi}=0) = 0$$

При помощи синтезирующей функции (фиг. 2) можно перевести систему из  $\|\pi, 0, 0\|^T$  в положение  $\|0, 0, p\|^T$  ( $p$  не фиксировано). Далее построим управление, переводящее систему из  $\|0, 0, p\|^T$  в  $\|0, 0, 0\|^T$ . При этом  $w(t_k)=0$ ,  $w(t_0)=(1+\varepsilon)p$ . Из множества управлений, удовлетворяющих  $w(t_0) \rightarrow w(t_k)$ , выбираем такое, для которого  $\Delta w = 2(t_- - t_+) \text{sign}(\Delta w)$ , где  $\Delta w + 2kT = w(t_k)$ ,  $k \in N$ ,  $|\Delta w| \leq T$ ,  $2T$  — период колебаний стержня при  $u = +a$  с начальной точкой  $\varphi=0$ ,  $\dot{\varphi}=0$ . Здесь  $2(t_+ + t_-)$  — время движения по участкам замкнутых кривых при постоянном управлении  $u = +a$  и  $u = -a$ , за которое система выходит из начальной точки  $\varphi=0$ ,  $\dot{\varphi}=0$  и возвращается в нее же. Ввиду симметрии системы ( $t \rightarrow -t$ ,  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ,  $w \rightarrow -w$ ) построенное управление  $u'(t)$ , переводящее  $\|\pi, 0, 0\|^T$  в  $\|0, 0, 0\|^T$ , обратно во времени искомому:  $u(t) = u'(t_* - t)$ , где  $t_*$  — время движения.

В качестве примера было вычислено управление  $u(t)$  для случая  $a=0,4142$  ( $\gamma = \pi/8$ ),  $\varepsilon=0,01$ . Здесь  $T=2,9$  с. В результате при  $u(+0)=0,4142$  получены следующие точки переключения:  $t=1,8; 4,1; 5,9; 8,3; 11,7; 14,6; 16,6; 17,8$ .

Используя это промежуточное решение, программное управление во второй задаче можно составить из двух участков  $u_1(t)$ :

$$\|0, 0, x_0, 0\|^T \rightarrow \|0, 0, 0, 0\|^T, \quad u_2(t) : \|0, 0, 0, 0\|^T \rightarrow \|\pi, 0, x_0, 0\|^T$$

в силу цикличности координаты  $x$ . Программное управление  $u_1(t)$  дано в [3]. Здесь произвольную постоянную  $x_0$  можно взять из численного решения первого этапа второй задачи.

Построенное в результате программное управление переводит систему из нижнего положения равновесия в неустойчивое верхнее с гашением скорости в конце движения и без смещения по горизонтали относительно начального состояния. Это решение может быть использовано в качестве начального приближения для численных методов оптимизации.

Автор благодарит И. Ф. Борецкого за постановку задачи и полезное обсуждение результатов работы и Б. Н. Соколова за ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 407 с.
2. *Галиуллин А. С.* Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981. 143 с.
3. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.

Казань

Поступила в редакцию  
22.XII.1983