МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1985

УДК 531.36

О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОКОЛО ТРИВИАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ НА СТРУНЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

КУЛИКОВ В. П., САМСОНОВ В. А.

Устойчивость вращений твердого тела на струне исследовалась в [1]. Устойчивость движений волчка с полостью, целиком заполненной жидкостью, в [2]. Для тела на струне этот вопрос исследовался в [3, 4].

Наличие у жидкости свободной поверхности при частичном заполнении полости в теле жидкостью усложняет задачу. Способы учета свободной границы в применении к задаче о движении волчка с жидкостью разрабатывались в [5—7].

В публикуемой работе исследуются малые колебания около тривиального вращения осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне, с полостью, содержащей жидкость. Как и в [5—7], свободная поверхность жидкости в режиме вращения принимается цилиндрической, что можно считать вполне справедливым при достаточно большой величине угловой скорости вращения тела. Спектр собственных частот малых колебаний механической системы описывается при дополнительном предположении о малости массы жидкости. В случае полного заполнения полости задача сводится к разработанной в [4]. В другом предельном случае, когда длина струны равна нулю, имеем волчок, рассмотренный в [6, 7].

1. Тяжелое осесимметричное тело (A, A, C — моменты инерции тела относительно главных центральных осей инерции) с полостью в виде цилиндра (высота $2c$, диаметр основания $2a$), ось которого совпадает с осью симметрии тела, закреплено на нерастяжимой струне длины l в точке O оси симметрии тела ($l_1=|OG|$ — расстояние до центра масс тела, $h=|OH|$ — до центра полости). Другой конец струны закреплен в точке O_1 и равномерно вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ (0, 0, Ω — проекции угловой скорости на оси неподвижной декартовой системы координат $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, $\mathbf{g}=(0,\ 0,\ g)$ — ускорение свободного падения). Полость в теле частично заполнена несжимаемой идеальной жидкостью.

В тривиальном решении струна растянута вдоль оси $O_1\zeta_1$, которая будет осью симметрии тела. Тело и жидкость совершают вращение вокруг $O_1\zeta_1$ как единое твердое целое, свободная поверхность жидкости — цилиндр радиуса b и осью $O_1\zeta_1$.

Запишем линеаризованные уравнения возмущенного движения твердого тела около тривиального вращения на струне [3]:

$$\begin{gathered}
ml^2\lambda^{\cdot\cdot}+mll_1\alpha^{\cdot\cdot}=-mgl\lambda+l(F_x^\circ\sin\varphi+F_y^\circ\cos\varphi-F_z^\circ\alpha)+lF_2^\circ\lambda\\
ml^2\mu^{\cdot\cdot}+mll_1\beta^{\cdot\cdot}=-mgl\mu+l(-F_x^\circ\cos\varphi+F_y^\circ\sin\varphi-F_z^\circ\beta)+lF_z^\circ\mu \qquad (1.1)\\
(A+ml_1^2)\alpha^{\cdot\cdot}+mll_1\lambda^{\cdot\cdot}+C\varphi^{\cdot}\alpha^{\cdot}=-mgl_1\alpha+M_x^\circ\cos\varphi-M_y^\circ\sin\varphi\\
(A+ml_1^2)\beta^{\cdot\cdot}+mll_1\mu^{\cdot\cdot}-C\varphi^{\cdot}\beta^{\cdot}=-mgl_1\beta+M_x^\circ\sin\varphi-M_y^\circ\cos\varphi\\
C\varphi^{\cdot\cdot}=0
\end{gathered}$$

Система записана в переменных, стандартных для задачи о движении тела на струне. Здесь $OX^\circ Y^\circ Z^\circ$ — система координат жестко связанная с телом так, что OZ° — ось симметрии тела, α, β, φ — углы Эйлера — Крылова, определяющие положение тела по отношению к осям системы координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$, которые, соответственно, параллельны осям введенной выше системы $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, λ — угол между $O\zeta_0$ и проекцией струны на плоскость $O\eta_0\zeta_0$, μ — угол между указанной проекцией и струной, $F_x{}^\circ$, $F_y{}^\circ$, $F_z{}^\circ$, $M_x{}^\circ$, $M_y{}^\circ$ — проекции на оси жестко связанной с телом системы координат сил и моментов, действующих на тело со стороны жидкости, находящейся в полости. Они могут быть вычислены, если известно движение жидкости.

2. Уравнения движения и граничные условия для жидкости удобнее записать в системе координат $OXYZ$, которая получается из $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ вращением вокруг оси $O\zeta_0 \equiv OZ$ на угол Ωt.

Уравнение движения жидкости в подвижной системе координат $d\mathbf{V}/dt = -\rho^{-1}\,\mathrm{grad}\,p - \mathbf{W}_e - 2(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V})$. Здесь $\mathbf{V}=(u, v, w)$ — вектор относительной скорости движения частиц жидкости, ρ — удельная плотность жидкости, W_e — переносное ускорение частиц жидкости $\mathbf{W}_e = \mathbf{W}_0 + d\mathbf{\Omega}/dt\times\mathbf{r} + \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}=(x, y, z)$, $\mathbf{W}_0$ — вектор абсолютного ускорения начала системы координат O. С точностью до малых высшего порядка имеем

$$W_x{}^\circ = (\partial^2\xi/\partial t^2 - 2\Omega\partial\eta/\partial t - \Omega^2\xi)\,l$$
$$W_y{}^\circ = (\partial^2\eta/\partial t^2 + 2\Omega\partial\xi/\partial t - \Omega^2\eta)\,l, \qquad W_z{}^\circ = 0$$

Здесь ξ, η, ζ — направляющие косинусы струны по отношению к осям $OXYZ$ (с точностью до малых $\zeta=1$).

Представим уравнения движения жидкости в виде

$$\partial u/\partial t - 2\Omega v = -\partial P/\partial x, \qquad \partial v/\partial t + 2\Omega u = -\partial P/\partial y$$
$$\partial w/\partial t = -\partial P/\partial z, \qquad P = p/\rho - \Omega^2(x^2+y^2)/2 + gz + W_x{}^\circ x + W_y{}^\circ y \tag{2.1}$$

Условие несжимаемости дает

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0 \tag{2.2}$$

Граничные условия на границе, определяемой уравнением $F(x, y, z, t)=0$, получим из $\partial F/\partial t + u\partial F/\partial x + v\partial F/\partial y + w\partial F/\partial z = 0$.

Запишем граничные условия, отбрасывая малые высших порядков

$$z_0 = z + Lx + My, \qquad F(x, y, z, t) = z + Lx + My - h \mp c = 0$$
$$w + \partial L/\partial t x + \partial M/\partial t y = 0 \ \text{при}\ z = h \pm c \tag{2.3}$$

$$a^2 + z_0{}^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad F(x, y, z, t) = a^2 +$$
$$+ (z + Lx + My)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$
$$ux + vy = (\partial L/\partial t x + \partial M/\partial t y)\,z \ \text{при}\ x^2 + y^2 = a^2 \tag{2.4}$$

$$p = p_0 \equiv \mathrm{const}, \qquad F(x, y, z, t) = p(x, y, z, t) - p_0 = 0$$
$$\partial P/\partial t + xu\Omega^2 + yv\Omega^2 - gw =$$
$$= \partial W_x{}^\circ/\partial t x + \partial W_y{}^\circ/\partial t y \ \text{при}\ x^2 + y^2 = b^2 \tag{2.5}$$

$$(b+\delta)^2 + z_0{}^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad p = p_0$$
$$b\delta\Omega^2 = -P - \Omega^2 z(Lx + My) + W_x{}^\circ x + W_y{}^\circ y \ \text{при}\ x^2 + y^2 = b^2$$

Здесь δ — отклонение формы свободной поверхности от цилиндрической, L, M, N — направляющие косинусы оси симметрии тела по отношению к осям $OXYZ$, $N=1$ с точностью до малых высшего порядка.

Исходя из предположения, что все функции времени можно представить в виде $f(x, y, z, t) = f_s(x, y, z)\exp st$, $s = \mathrm{const}$, преобразуем (2.1) — (2.2) к системе уравнений

$$(s^2 + 4\Omega^2)\,u_s = -\partial P_s/\partial x s - \partial P_s/\partial y 2\Omega$$
$$(s^2 + 4\Omega^2)\,v_s = \partial P_s/\partial x 2\Omega - \partial P_s/\partial y s$$
$$(s^2 + 4\Omega^2)\,w_s = -\partial P_s/\partial z$$
$$s^2(\partial^2 P_s/\partial x^2 + \partial^2 P_s/\partial y^2) + (s^2 + 4\Omega^2)\,\partial^2 P_s/\partial z^2 = 0$$

а граничные условия (2.3)—(2.5) — к виду

$$w_s+sL_sx+sM_sy=0, \quad z=h\pm c$$

$$s(L_sx+M_sy)z-u_sx-v_sy=0, \quad x^2+y^2=a^2$$

$$sP_s+\Omega^2(u_sx+v_sy)-gw_s-(\xi_s(s^3-2\Omega^2s)-$$
$$-2\Omega s^2\eta_s)x-(\eta_s(s^3-2\Omega^2s)+2\Omega s^2\xi_s)y=0, \quad x^2+y^2=b^2$$

После перехода к $Q_s=P_s-s^2(L_sx+M_sy)z$ и к цилиндрическим координатам r, ψ, $z: x=\cos\psi r$, $y=\sin\psi r$ получаем задачу для определения Q_s:

$$\partial^2Q_s/\partial r^2+r^{-2}\partial^2Q_s/\partial\psi^2+r^{-1}\partial Q_s/\partial r=$$
$$\varkappa^2\partial^2Q_s/\partial z^2, \quad \varkappa^2=-s^{-2}(s^2+4\Omega^2) \tag{2.6}$$

$$\partial Q_s/\partial z=0, \quad z=h\pm c, \quad sa\partial Q_s/\partial r+2\Omega\partial Q_s/\partial\psi=$$
$$=-2sza(s^2+2\Omega^2)(L_s\sin\psi-M_s\cos\psi), \quad r=a \tag{2.7}$$

$$sb\Omega^2\partial Q_s/\partial r+2\Omega^3\partial Q_s/\partial\psi+sg\partial Q_s/\partial z-$$
$$-s(s^2+4\Omega^2)Q_s=s^3(s^2+3\Omega^2)zb(L_s\cos\psi+$$
$$+M_s\sin\psi)+2\Omega^3s^2bz(L_s\sin\psi-M_s\cos\psi)-$$
$$-bls(s^2+4\Omega^2)[(s^2-\Omega^2)(\xi_s\cos\psi+\eta_s\sin\psi)+$$
$$+2s\Omega(\xi_s\sin\psi-\eta_s\cos\psi)], \quad r=b$$

Представим решение задачи в виде ряда Фурье

$$Q_s=\sum_k C_k(A_k(r)\cos\psi+B_k(r)\sin\psi)\cos k(z-h+c)$$

$$C_0=h, \quad C_k=-2(ck^2)^{-1}, \quad k=\pi(2c)(2j+1) \quad (j=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$
$$A_k+iB_k=(L_s+iM_s)T(\varkappa kr), \quad T(\varkappa kr)=X_kI_1(\varkappa kr)+Z_kY_1(\varkappa kr)$$
$$A_0+iB_0=(L_s+iM_s)(X_0r+Z_0/r)+(\xi_s+i\eta_s)(X_{01}r+Z_{01}/r)$$

Здесь I_1, Y_1 — функции Бесселя первого и второго рода, X_0, Z_0, X_{01}, Z_{01}, X_k, Z_k — величины, не зависящие от r, определяемые из граничных условий (2.7).

По формулам

$$F_x=\iint_\sigma p\cos X\nu\, d\sigma, \quad F_y=\iint_\sigma p\cos Y\nu\, d\sigma, \quad F_z=\iint_\sigma p\cos Z\nu\, d\sigma$$

$$M_x=\iint_\sigma p(y\cos Z\nu-z\cos Y\nu)\,d\sigma, \quad M_y=\iint_\sigma p(z\cos X\nu-x\cos Z\nu)\,d\sigma$$

в которых ν — нормаль к поверхности полости σ, вычисляются силы и моменты

$$F_z^s=-m_0g, \quad F_x^s+iF_y^s=\Lambda_0(h(L_s+iM_s)+l(\xi_s+i\eta_s))$$

$$M_x^s+iM_y^s=-i\Lambda_0h(h(L_s+iM_s)+l(\xi_s+i\eta_s))-i(m_0gh+\pi\rho c(a^4-b^4)(s^2+\Omega^2)-$$
$$-{}^2/_3\pi\rho c^3(s+i\Omega)\Lambda_1(a^2(3s-2\Omega)+b^2s^3)-2\pi\rho ac\Lambda_1\sum_{j=0}^{\infty}C_k^2T(\varkappa ka)- \tag{2.8}$$
$$-\pi\rho bcs(s+i\Omega)\Lambda_1\sum_{j=0}^{\infty}C_k^2T(\varkappa kb))(L_s+iM_s)$$

$$m_0=2\pi\rho c(a^2-b^2), \quad \Lambda_1=(s+i\Omega)/(s+2i\Omega)$$

$$\Lambda_0=2\pi\rho ca^2(a^2-b^2)(s+i\Omega)^2(s^2+\Omega^2-2is\Omega)\times$$
$$\times(b^2(s+i\Omega)^2+a^2(s^2+\Omega^2-2i\Omega s))^{-1}$$

Проекции сил и моментов на оси $OXYZ$ с точностью до малых высшего порядка совпадают с проекциями на оси $OX^\circ Y^\circ Z^\circ$.

При малых углах можно считать

$$\lambda=\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi,\quad \mu=-\xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi$$
$$\alpha=L\sin\varphi+M\cos\varphi,\quad \beta=-L\cos\varphi+M\sin\varphi \tag{2.9}$$

что позволяет, учитывая (2.19), записать систему (1.1) в виде

$$[ml^2(s+i\Omega)^2+(m+m_0)gl](\xi_s+i\eta_s)+$$
$$+(s+i\Omega)^2ml_1l(L_s+iM_s)=l(F_x{}^s+iF_y{}^s)$$
$$[(A+ml_1{}^2)(s+i\Omega)^2-iC\Omega(s+i\Omega)+mgl_1](L_s+iM_s)+$$
$$+(s+i\Omega)^2ml_1l(\xi_s+i\eta_s)=-i(M_x{}^s+iM_y{}^s) \tag{2.10}$$

Здесь $F_x{}^s+iF_y{}^s$, $M_x{}^s+iM_y{}^s$ определены выражениями (2.8).

3. Для определения системы собственных значений задачи из (2.10) получим трансцендентное уравнение, которое запишем используя безразмерные величины (m_0 — масса жидкости):

$$A'=(A+ml_1{}^2+m_0h^2)/(ml_1{}^2),\quad C'=C/(ml_1{}^2)$$
$$K=1+m'h_1,\quad C_2-A_2=\pi\rho c(a^4-b^4)/(2ml_1{}^2)$$
$$m'=m_0/m,\quad \theta_0=g/(l\Omega^2)$$
$$\theta_1=Kg/(l_1\Omega^2),\quad h_1=h/l_1,\quad a_1=a/l_1$$
$$b_1=b/l_1,\quad E=\pi\rho c^3/m,\quad \tau=1-is/\Omega$$

Имеем

$$(A'+C_2-A_2)\tau^2-(C'+2C_2-2A_2)\tau-\theta_1-$$
$$-\frac{[\tau^2K+m'h_1b_1{}^2\tau^4/(a_1{}^2(\tau^2-4\tau+2)+b_1{}^2\tau^2)]^2}{(1+m')(\tau^2-\theta_0)+m'b_1{}^2\tau^4/(a_1{}^2(\tau^2-4\tau+2)+b_1{}^2\tau^2)}= \tag{3.1}$$
$$={}^2/_3E\tau^2(a_1{}^2(3\tau-5)-b_1{}^2(\tau-1)^3)/(\tau+1)-$$
$$-64E\pi^{-4}\Omega^{-2}l_1{}^{-1}\tau(\tau+1)^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{-4}(2a_1T(\varkappa ka)-\tau(\tau-1)T(\varkappa kb))$$

Сложность уравнения (3.1) не позволяет провести прямое исследование множества его решений, но уравнение упрощается при дополнительном предположении о малости параметра m', $E\ll1$.

Правая часть (3.1), которую обозначим $R(\tau)$, содержит систему полюсов $\{\tau_0\in R\}$. В окрестности τ_0 имеем $R(\tau)=m'd(\tau_0)/(\tau-\tau_0)+o(1)$. Левую часть уравнения (3.1) обозначим $\Phi(\tau)$. Если

$$\Phi(\tau_0)\gg m'd(\tau_0)=D(\tau_0) \tag{3.2}$$

то корень уравнения (3.1) $\tau=\tau_0+D/\Phi(\tau_0)$ действителен, так как действительно τ_0.

Если (3.2) не выполняется, то, представляя $\Phi(\tau)$ в виде

$$\Phi'(\tau_1)(\tau-\tau_1)+o(1)=\Phi'(\tau_1)(\tau-\tau_1+o(1))=D(\tau_0)/(\tau-\tau_0)$$
$$\Phi(\tau_1)=0,\quad \Phi'(\tau)=d\Phi(\tau)/d\tau$$

имеем корни (3.1) $\tau=(\tau_1+\tau_0)/2\pm\sqrt{(\tau_1-\tau_0)^2/4+D(\tau_0)/\Phi'(\tau_1)}$.

Корни будут действительными, если $(\tau_1-\tau_0)^2\geqslant-4D/\Phi'$. При

$$(\tau_1-\tau_0)^2<-4D(\tau_0)/\Phi'(\tau_1) \tag{3.3}$$

корни имеют ненулевую мнимую часть, а так как эти корни комплексно-сопряженные, то среди собственных значений задачи будет значение с положительной действительной частью и, следовательно, возмущенное движение системы не будет оставаться малым.

В спектр собственных значений войдут также корни уравнения $\Phi(\tau)=$ $=0$, не близкие к $\{\tau_0\}$.

4. Рассмотрим некоторые предельные переходы. В отсутствие жидкости ($a=b$, $m_0=0$) (3.1) соответствует уравнению для собственных значений движения тела, закрепленного на струне выше центра масс [1].

Если полость целиком заполнена жидкостью ($b=0$), то (3.1) переходит в соответствующее уравнение из [4, § 13].

Если длина струны равна нулю, получим волчок, исследованный в [6, 7]. Уравнение (3.1) и условие (3.3) при $l=0$ совпадают с выражениями (5.5), (5.12) из [6].

Неравенство (3.3) дает возможность строить алгоритм определения областей неустойчивости тривиального движения системы. Некоторые зависимости областей неустойчивости от параметров задачи можно указать рассматривая предельный переход $\Omega\to\infty$ $(\theta_1,\ \theta_0\to 0)$. Уравнение $\Phi(\tau)=0$ имеет четыре корня

$$\tau_1{}^0\approx C/A,\qquad \tau_{23}{}^0\approx\pm\sqrt{\theta_0},\qquad \tau_4{}^0\approx-\theta_1/C' \tag{4.1}$$

Для $\tau_1{}^0$ имеем $\Phi'(\tau_1{}^0)>0$, а $D(\tau_0)$ может быть меньше нуля. Согласно расчетам [6], для $0\leqslant\tau_0\leqslant 0{,}2$ выполняется $D(\tau_0)<0$, например в случае $b^2=0{,}2a^2$, $c/[(2j+1)a]\in(1{,}214;\ 0{,}947)\cup((0{,}509;\ 0{,}387)\cup\ldots$ Следовательно, если $\tau_1{}^0\to\tau_0$ при $\theta_1\to 0$, начиная с некоторой Ω^0 для любой $\Omega>\Omega^0$ выполнено (3.3) и уравнение (3.1) будет иметь пару комплексно-сопряженных корней.

Анализ зависимости $T(\varkappa kr)$ от τ показывает, что $\tau=1$ при любом k является точкой накопления полюсов. Если при $\theta_1\to 0$ корень $\tau_1{}^0\to 1$, то для любого Ω^0 и любого k можно указать интервал $(\Omega_k{}^0,\ \Omega_k{}^1)$, $\Omega^0<\Omega_k{}^0<\Omega_k{}^1$ потери устойчивости тривиального вращения системы, связанный с возбуждением k моды колебаний жидкости в полости.

Если $\tau_1{}^0$ не стремится к единице или полюсу функции $T(\varkappa k_0 r)$ $(0<k_0<$ $<k)$, то для любого k можно указать Ω_k, такое, что в области $\Omega>\Omega_k$ не будет интервалов потери устойчивости, связанных с модой не старше k.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозова Е. П.* Об устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на струне.– ПММ, 1956, т. 20, вып. 5, с. 621–626.
2. *Соболев С. Л.* О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью.– ПМТФ, 1960, № 3, с. 20–55.
3. *Ишлинский А. Ю., Темченко М. Е.* Об устойчивости вращения на струне твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью.– ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 30–41.
4. *Горбачук М. Л., Слепцова Г. П., Темченко М. Е.* Об устойчивости движения подвешенного на струне твердого тела с жидким наполнением.– Укр. матем. ж., 1968, т. 20, № 5, с. 586–602.
5. *Нариманов Г. С.* О движении симметричного гироскопа, плоскость которого заполнена жидкостью.– ПММ, 1957, т. 21, вып. 5, с. 696–700.
6. *Stewartson K.* On the stability of a spinning top containing liquid.– J. Fluid Mech., 1959, v. 5, pt 4, p. 577–592.
7. *Костандян Б. А.* Об устойчивости вращательных движений волчка с полостью, неполностью наполненной жидкостью.– ПМТФ, 1960, № 3, с. 56–64.

Москва

Поступила в редакцию
15.II.1984