

УДК 531.383

К ТЕОРИИ НЕКОНТАКТНОГО ГИРОСКОПА С ШАРОВЫМ НЕСБАЛАНСИРОВАННЫМ РОТОРОМ

МАРТЫНЕНКО Ю. Г., МЕДВЕДЕВ А. В.

Динамика гироскопа в неконтактном подвесе с учетом взаимосвязи движения центра масс и углового движения ротора вокруг центра масс рассматривалась в [1-3], где предполагалось, что равнодействующая силового поля подвеса линейно зависит от смещения геометрического центра ротора. В данной работе определяются уходы гироскопа, возникающие при нелинейной зависимости равнодействующей силового поля подвеса от смещения ротора.

1. Рассмотрим неконтактный гироскоп, ротор которого находится в вакууме и имеет форму шара с центром в точке O_1 . Ротор предварительно раскручен вспомогательной системой и в рабочем режиме вращается по инерции.

Предположим, что основание, на котором установлен гироскоп, неподвижно, ротор абсолютно твердый, поле тяготения отсутствует, а поддерживающие силы действуют по нормали к поверхности ротора (такая ситуация имеет место, например, в электростатическом и криогенном подвесах [4]). При этом поддерживающие силы образуют сходящуюся систему сил и, следовательно, приводятся к равнодействующей F , приложенной в точке O_1 .

Сила F «притягивает» геометрический центр ротора к некоторой неподвижной точке пространства O , которую в дальнейшем будем называть центром неконтактного подвеса. Радиус-вектор, проведенный из точки O в геометрический центр O_1 , обозначим через ρ и запишем выражение для F в виде

$$F = F(\rho, u) \quad (1.1)$$

где u — векторный параметр, характеризующий состояние системы автоматического управления движением ротора. В качестве компонент вектора u можно выбрать отклонения от номинальных значений токов в обмотках электромагнитов магнитного подвеса, потенциалов электродов электростатического подвеса и т. п. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что при $u=0$, $\rho=0$ сила F обращается в нуль. Компоненты вектора u в (1.1) формируются в зависимости от показаний датчиков смещения центра ротора из центра подвеса таким образом, чтобы обеспечить существование асимптотически устойчивого положения равновесия ротора при совпадении его геометрического центра с центром неконтактного подвеса. Для достаточно большого класса приборов динамика системы автоматического управления движением ротора описывается системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Принимая в качестве входного сигнала системы автоматического управления проекции вектора ρ , измеряемые датчиками смещения ротора, запишем уравнения системы автоматического управления в виде

$$u = \Phi(D)\rho \quad (1.2)$$

Здесь $\Phi(D)$ — матрица соответствующей размерности, элементы которой являются дробно-рациональными функциями оператора дифференцирования по времени t , причем корни характеристического уравнения системы линейного приближения, составленной в окрестности положения $\rho=0$, для дифференциальных уравнений движения материальной точки с массой, равной массе ротора под действием силы (1.1), имеют отрицательные действительные части.

Предположим, что компоненты вектора F в (1.1) являются аналитическими функциями ρ_m, u_m (ρ_m, u_m — компоненты векторов ρ и u). Разлагая вектор F в ряд по ρ, u и учитывая, что в силу сделанных допущений постоянная составляющая в этом разложении обращается в нуль, представим (1.1) в виде

$$F = -Q(D)\rho + \mu f(\rho, u); \quad Q(D) = -\partial F / \partial \rho - \partial F / \partial u \Phi(D) \quad (1.3)$$

Здесь $\mu f(\rho, u) = -\partial F / \partial \rho \rho - \partial F / \partial u u + F(\rho, u)$ — аналитическая функция ρ_m, u_m , разложение которой в ряд начинается с членов не ниже второго порядка малости, μ — малый параметр, $\partial F / \partial \rho, \partial F / \partial u$ — матрицы с компонентами $\|\partial F_q / \partial \rho_m\|, \|\partial F_q / \partial u_m\|$.

Предположим, что матрица $Q(D)$ подобна единичной матрице, т. е. будем рассматривать случай равновесного (в малом) неконтактного подвеса. (Уходы, возникающие из-за неравновесности подвеса неконтактного гироскопа, найдены в [3].)

Пусть центр масс ротора не совпадает с его геометрическим центром. Вектор, проведенный из центра масс O_2 в геометрический центр O_1 , назовем дебалансом ротора и обозначим e . Тогда, учитывая (1.3), из теоремы о движении центра масс находим

$$D^2(\rho - e) = -Q(D)\rho + \mu f(\rho, \Phi(D)\rho) \quad (1.4)$$

Для простоты записи масса ротора принята единичной, а в качестве единицы измерения линейных размеров выбран модуль вектора дебаланса, так, что $|e|=1$.

Закон изменения момента количества движения ротора относительно центра масс имеет вид

$$Dk = \varepsilon [e, D^2(\rho - e)] \quad (1.5)$$

Здесь k — вектор момента количества движения ротора относительно центра масс, ε — параметр, равный квадрату отношения модуля вектора дебаланса к радиусу инерции ротора; квадратные скобки означают векторное произведение.

Система уравнений (1.4), (1.5) незамкнута. Ее нужно было бы дополнить кинематическими соотношениями, определяющими вектора e и k через направляющие косинусы трехгранника, связанного с ротором, относительно неподвижной системы отсчета. Здесь эти соотношения не выписываются, так как в рассматриваемых ниже ограничениях они становятся тривиальными.

2. Числовая величина параметра ε для реальных конструкций имеет порядок $10^{-8} - 10^{-10}$, поэтому компоненты вектора ρ в (1.4) являются быстрыми переменными, а компоненты вектора k в (1.5) — медленными. При $\varepsilon=0$ из (1.5) получаем, что $Dk=0$, т. е. в нулевом приближении вектор кинетического момента неподвижен в инерциальном пространстве, а угловое движение ротора представляет собой движение Эйлера — Пуансо. Сделаем дополнительное предположение о том, что начальные условия задачи таковы, что вектор угловой скорости тела совпадает с вектором кинетического момента k и с меньшей осью центрального эллипсоида инерции ротора. (Именно такие начальные условия имеют место после окончания раскрутки гироскопа). Кроме того, предположим, что вектор дебаланса ортогонален меньшей оси центрального эллипсоида инерции ротора. Тогда в указанном частном случае единичный вектор дебаланса e

вращается с угловой скоростью Ω в плоскости, ортогональной вектору кинетического момента гироскопа \mathbf{k} . При этом в неподвижном трехграннике ξ_1, ξ_2, ξ_3 с началом в центре подвеса O :

$$\mathbf{e} = \alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t \quad (2.1)$$

Здесь α, β — взаимно ортогональные единичные вектора $((\alpha, \beta) = 0)$, лежащие в плоскости, перпендикулярной единичному вектору $\gamma = \mathbf{k}/k$, направленному по вектору кинетического момента гироскопа, причем $\gamma = [\alpha, \beta]$. Вектора α, β, γ образуют правый ортогональный трехгранник сопутствующей системы координат ([5], с. 12). Подставляя (2.1) в уравнения (1.4), приходим к квазилинейной системе дифференциальных уравнений

$$D^2 \rho + Q(D) \rho = \mu f(\rho, \Phi(D) \rho) - \Omega^2 (\alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t) \quad (2.2)$$

Как известно ([6], с. 381), система (2.2) при достаточно малых μ имеет единственное асимптотически устойчивое решение с периодом, равным периоду вращения ротора, которое допускает разложение в степенной ряд по малому параметру μ

$$\rho = \rho^{(0)}(t, \alpha, \beta) + \mu \rho^{(1)}(t, \alpha, \beta) + \dots \quad (2.3)$$

Коэффициенты ряда (2.3) определяются из следующей последовательности линейных дифференциальных уравнений, получаемой после подстановки (2.3) в (2.2) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях μ

$$[D^2 + Q(D)] \rho^{(0)} = D^2 \mathbf{e} \quad (2.4)$$

$$[D^2 + Q(D)] \rho^{(1)} = f(\rho^{(0)}, \Phi(D) \rho^{(0)}) \quad (2.5)$$

Предполагая далее применить асимптотический метод осреднения, удержим только «незатухающие составляющие» решений уравнений (2.4), (2.5), так как собственное движение в силу сделанных допущений экспоненциально убывает и не влияет на результат осреднения. Из (2.4) находим

$$\rho^{(0)} = \mathbf{A} \cos \Omega t + \mathbf{B} \sin \Omega t, \quad \mathbf{A} = \alpha V' + \beta V'', \quad \mathbf{B} = -\alpha V'' + \beta V' \\ V' = \operatorname{Re} V(i\Omega), \quad V'' = \operatorname{Im} V(i\Omega), \quad V(D) = D^2 / [D^2 + Q(D)] \quad (2.6)$$

Подставим (2.6) в правую часть уравнения (2.5) и разложим полученную периодическую функцию времени в ряд Фурье

$$f(\rho^{(0)}, \Phi(D) \rho^{(0)}) = f^{(0)} + g \cos \Omega t + h \sin \Omega t + \dots \quad (2.7)$$

$$g = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho^{(0)}, \Phi(D) \rho^{(0)}) \cos \varphi \, d\varphi, \quad h = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho^{(0)}, \Phi(D) \rho^{(0)}) \sin \varphi \, d\varphi$$

Здесь многоточие означает высшие гармоники, в явном нахождении которых нет необходимости, потому что высшие гармоники, так же как и постоянная составляющая $f^{(0)}$, исчезают при построении осредненных уравнений первого приближения для медленных переменных.

Следовательно, первая гармоника разложения решения уравнения (2.5) в ряд Фурье имеет вид

$$\rho^{(1)} = -[(g \cos \Omega t + h \sin \Omega t) V' + (h \cos \Omega t - g \sin \Omega t) V''] / \Omega^2 \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) и (2.6) в (2.3), а затем в правую часть уравнения (1.4), проведем осреднение по периоду обращения ротора. Сохраняя для медленных осредненных проекций вектора кинетического момента гироскопа их прежние обозначения, после соответствующих вычислений получим

$$D\mathbf{k} = -\varepsilon \Omega^2 V'' \gamma + \frac{1}{2} \varepsilon \mu \{ V'([\alpha, g] + [\beta, h]) + V''([\alpha, h] + [g, \beta]) \} \quad (2.9)$$

В данном случае осреднение правых частей уравнений для медленных переменных проводится вдоль частного решения порождающей системы, в то время как процедура метода осреднения требует проведения осреднения вдоль общего решения уравнений (2.2). Тем не менее согласно [7] в силу асимптотической устойчивости решения (2.3) в случае, когда начальные условия для быстрых переменных находятся в области влияния [7] решения (2.3), можно утверждать, что при достаточно малых ϵ на интервале времени порядка $1/\epsilon$ решение системы (2.9) будет сколь угодно близким к решению полной задачи (1.4), (1.5).

3. Применим изложенную методику к конкретному виду неконтактно-го подвеса, в котором нелинейность может быть описана соотношением

$$f_m = \mu \rho_m^{2n+1} + \kappa \rho_m |\rho|^{2n} \quad (m=1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Здесь ρ_m, f_m — проекции векторов ρ, f на ось ξ_m , μ, κ — некоторые постоянные. При $n=1$ (3.1) с точностью до обозначений совпадает с выражением для нелинейности электростатического подвеса, найденной в [8], где выписана явная зависимость коэффициентов μ, κ от размеров электродов, заряда ротора, коэффициента усиления следящей системы шести-электродного электростатического подвеса.

Подставляя (2.6) в (3.1) и разлагая полученную периодическую функцию в ряд Фурье, приходим к интегралам вида

$$I_m + iJ_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (A_m \cos \varphi + B_m \sin \varphi)^{2n+1} \exp(i\varphi) d\varphi, \quad i^2 = -1$$

Полученные интегралы нетрудно вычислить при помощи вычетов ([9], с. 127). Действительно, после замены $z = \exp(i\varphi)$ значение I_m оказывается равным вычету в особой точке $z=0$ голоморфной функции $((A_m + iB_m)/2)^{2n+1} (1 + cz^2)^{2n+1} (1+z^2)z^{-2n-3}$, где $c = (A_m - iB_m)/(A_m + iB_m)$. Подсчитывая указанный вычет, находим

$$I_m = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} 2A_m (A_m^2 + B_m^2)^n, \quad J_m = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} 2B_m (A_m^2 + B_m^2)^n$$

где, как обычно, символом $p!$ обозначено произведение всех целых чисел, не превосходящих p и имеющих ту же четность, что и p . Таким образом, в рассматриваемом случае вектора \mathbf{g} и \mathbf{h} имеют следующие проекции на оси трехгранника ξ :

$$g_m = [\mu_n (1 - \gamma_m^2)^n + \kappa_n] A_m, \quad h_m = g_m B_m / A_m$$

$$\mu_n = 2\mu \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} |V|^{2n}, \quad \kappa_n = \kappa |V|^{2n}, \quad |V|^2 = (V')^2 + (V'')^2$$

Если ввести диагональную матрицу $\Gamma = \text{diag} \{ \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \}$, $\Gamma_m = (1 - \gamma_m^2)^n$, то вектора \mathbf{g} и \mathbf{h} можно записать в виде

$$\mathbf{g} = \mu_n \Gamma \mathbf{A} + \kappa_n \mathbf{A}, \quad \mathbf{h} = \mu_n \Gamma \mathbf{B} + \kappa_n \mathbf{B} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (2.9) и учитывая, что $[\alpha, \mathbf{A}] = [\beta, \mathbf{B}] = \gamma V''$, $[\alpha, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}, \beta] = \gamma V'$, после необходимых вычислений получим уравнения

$$Dk_1 = -\epsilon \Omega^2 V'' \gamma_1 + 2\epsilon \kappa |V|^{2n} V' V'' \gamma_1 +$$

$$+ \epsilon \mu \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} |V|^{2n} \{ [(V')^2 - (V'')^2] (\Gamma_2 - \Gamma_3) \gamma_2 \gamma_3 + 2V' V'' (\Gamma_2 + \Gamma_3) \gamma_1 \} \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (3.3)$$

Символ (1.2.3) означает, что остальные уравнения в (3.3) для Dk_2, Dk_3 получаются циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.

Уравнения (3.3) представляют собой прецессионные уравнения движения рассматриваемого неконтактно-го гироскопа. Они определяют эволюцию вектора кинетического момента относительно неподвижного трех-

гранника ξ . Эволюция состоит из процесса разгона (или торможения), т. е. изменения модуля кинетического момента, а также из поворота вектора кинетического момента, т. е. собственно ухода гироскопа.

В силу ортогональности единичного вектора γ и его производной имеем $(\gamma, D\gamma) = 0$:

$$Dk = D(k, \gamma) = (Dk, \gamma) + (k, D\gamma) = (Dk, \gamma)$$

Следовательно, домножая каждое из уравнений (3.3), соответственно, на $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и складывая, получим уравнение, которое описывает изменение модуля кинетического момента

$$Dk = -\varepsilon \Omega^2 V'' + 2\varepsilon \kappa |V|^{2n} V' V'' + 2\varepsilon \mu \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} |V|^{2n} V' V'' [(1-\gamma_1^2)^{n+1} + (1-\gamma_2^2)^{n+1} + (1-\gamma_3^2)^{n+1}] \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) определяет зависимость разгона (или торможения) несбалансированного ротора неконтактного гироскопа от ориентации вектора кинетического момента в подвесе.

Дифференцируя тождество $k\gamma = k$, получим уравнение для направляющих косинусов вектора кинетического момента

$$kD\gamma = Dk - \gamma Dk \quad (3.5)$$

Принимая во внимание (3.3) и (3.4) и проектируя (3.5) на оси координат, найдем

$$kD\gamma_1 = \varepsilon \mu \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} |V|^{2n} \{ [(V')^2 - (V'')^2] (\Gamma_2 - \Gamma_3) \gamma_2 \gamma_3 - 2V' V'' [(1-\gamma_1^2) \Gamma_1 - \gamma_2^2 \Gamma_2 - \gamma_3^2 \Gamma_3] \gamma_1 \} \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (3.6)$$

Введем комплексную функцию

$$U = \varepsilon \mu \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{|V|^{2n} V^2}{(2n+2)} [(1-\gamma_1^2)^{n+1} + (1-\gamma_2^2)^{n+1} + (1-\gamma_3^2)^{n+1}] \quad (3.7)$$

Тогда уравнение (3.6) можно записать в виде

$$kD\gamma_1 = \gamma_2 \frac{\partial U'}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial U'}{\partial \gamma_2} - \frac{\partial U''}{\partial \gamma_1} + \gamma_1 \left(\gamma_1 \frac{\partial U''}{\partial \gamma_1} + \gamma_2 \frac{\partial U''}{\partial \gamma_2} + \gamma_3 \frac{\partial U''}{\partial \gamma_3} \right) \quad (3.8)$$

$$U' = \text{Re } U, \quad U'' = -\text{Im } U$$

Системе трех скалярных уравнений (3.8) отвечает одно векторное уравнение

$$kD\gamma = [\gamma, \nabla U'] + [\gamma, \nabla U''], \quad \nabla U = \left\| \frac{\partial U}{\partial \gamma_1}, \frac{\partial U}{\partial \gamma_2}, \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} \right\|^T \quad (3.9)$$

Из (3.9) вытекает, что моменты, вызывающие уход гироскопа, можно разделить на две части: потенциальные моменты $[\gamma, \nabla U']$ и неконсервативные моменты $[\gamma, \nabla U'']$, при этом функцию U' в (3.9) естественно назвать силовой функцией консервативных моментов, а U'' — силовой функцией неконсервативных моментов. Такое представление моментов использовалось также в [10], где рассматривался гироскоп с неконтактным осесимметричным подвесом ротора, в котором приложенные к ротору моменты определяются углом между вертикалью и осью прибора.

В случае консервативного неконтактного подвеса $V''=0$, $U''=0$ и в силу (3.4) величина кинетического момента гироскопа оказывается постоянной, а силовая функция (3.7) не будет явно зависеть от времени. При этом уравнения (3.9) примут вид

$$kD\gamma=[\gamma, \nabla U'] \quad (3.10)$$

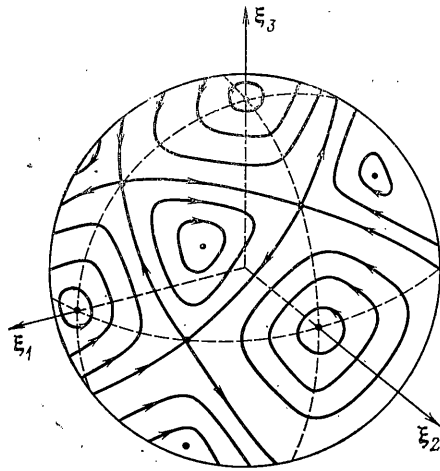
Уравнения (3.10) имеют два первых интеграла

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

$$U'(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \text{const} \quad (3.11)$$

Из (3.11) следует, что указанные траектории представляют собой пересечение единичной сферы и семейства поверхностей $(1-\gamma_1^2)^{n+1} + (1-\gamma_2^2)^{n+1} + (1-\gamma_3^2)^{n+1} = \text{const}$.

В частном случае $n=1$ траектории вектора кинетического момента гироскопа приведены на фиг. 1. Уравнение (3.10) на единичной сфере имеет 26 особых точек, 14 из которых являются устойчивыми особыми точками типа «центр», а двенадцать — неустойчивыми



Фиг. 1

особыми точками типа «седло». Координаты устойчивых точек имеют вид

$$\begin{aligned} (\gamma_1^2=1, \gamma_2=\gamma_3=0), \quad (\gamma_2^2=1, \gamma_1=\gamma_3=0), \\ (\gamma_3^2=1, \gamma_1=\gamma_2=0), \quad (\gamma_1^2=\gamma_2^2=\gamma_3^2=1/3) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Положение неустойчивых точек определяется координатами

$$(\gamma_1=0, \gamma_2^2=\gamma_3^2=1/2), \quad (\gamma_2=0, \gamma_1^2=\gamma_3^2=1/2), \quad (\gamma_3=0, \gamma_1^2=\gamma_2^2=1/2) \quad (3.13)$$

Для определения зависимости направляющих косинусов γ_m от времени запишем первые интегралы (3.1) в виде

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad \gamma_1^4 + \gamma_2^4 + \gamma_3^4 = \lambda$$

Выражая из этих интегралов γ_1 и γ_2 через γ_3 :

$$\gamma_1^2 = 1/2 [1 - \gamma_3^2 \pm \sqrt{2(\lambda - \gamma_3^4) - (1 - \gamma_3^2)^2}]$$

$$\gamma_2^2 = 1/2 [1 - \gamma_3^2 \mp \sqrt{2(\lambda - \gamma_3^4) - (1 - \gamma_3^2)^2}]$$

и подставляя полученные соотношения в третье уравнение (3.10), найдем

$$\frac{d\gamma_3}{d\tau} = \sqrt{\frac{1}{2} [(1 - \gamma_3^2)^2 - (\lambda - \gamma_3^4)] [2(\lambda - \gamma_3^4) - (1 - \gamma_3^2)^2]}, \quad \tau = \frac{3\varepsilon}{8k} \mu (V')^4 t$$

Следовательно, определение зависимости γ_3 от времени τ требует обращения гиперэллиптического интеграла. Отметим, что необходимость исследования уравнений (3.10) с силовой функцией (3.7) при $n=1$ возникает при изучении прецессионного движения гироскопа в шестизлектродном электростатическом подвесе под действием момента, вызванного наличием в форме ротора четвертой гармоники¹, а также в задаче о движении почти упругого тела, близкого к сфере [11].

¹ Маргынченко Ю. Г. Гироскоп в неконтактном подвесе: Автореф. дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. М.: Изд-во МГУ, 1978. 20 с.

Другой предельный случай в исследовании уравнений (3.9) возникает при $V'=V''$, когда силовая функция консервативных моментов U' обращается в нуль и уравнение (3.9) примет вид

$$D\gamma = [\gamma, [\gamma, \nabla U'']],$$

$$U'' = a[(1-\gamma_1^2)^{n+1} + (1-\gamma_2^2)^{n+1} + (1-\gamma_3^2)^{n+1}] \quad (3.14)$$

Для простоты изложения коэффициент a в (3.14) будем считать постоянным. В противном случае необходимо сделать замену времени

$$\tau = \int_0^t a(t_1) dt_1.$$

Умножая уравнение (3.14) скалярно на вектор $[\gamma, \nabla U''] dt$, приходим к соотношению

$$([\gamma, \nabla U''], d\gamma) = \left(\gamma_2 \frac{\partial U''}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial U''}{\partial \gamma_2} \right) d\gamma_1 +$$

$$+ \left(\gamma_3 \frac{\partial U''}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial U''}{\partial \gamma_3} \right) d\gamma_2 + \left(\gamma_1 \frac{\partial U''}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial U''}{\partial \gamma_1} \right) d\gamma_3 = 0 \quad (3.15)$$

Условие (3.15) можно рассматривать как уравнение линейной кинематической связи, представляющей пфаффову форму в трехмерном пространстве. Согласно теореме Фробениуса, для того, чтобы уравнение Пфаффа (3.15) было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы

$$([\gamma, \nabla U''], \text{rot} [\gamma, \nabla U'']) = 0 \quad (3.16)$$

В этом случае существуют гладкие функции $\theta, \psi (\theta \neq 0)$, такие, что $([\gamma, \nabla U''], d\gamma) = \theta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) d\psi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, и интегральные поверхности уравнений (3.14) задаются уравнениями $\psi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \text{const}$, а связь (3.15) будет голономной.

Таким образом, условие (3.16) является необходимым и достаточным условием интегрируемости прецессионных уравнений движения гироскопа в неконтактном подвесе под действием неконсервативных моментов.

Для силовой функции (3.7) при $n=1$ условие (3.16) оказывается выполненным, что позволяет найти первый интеграл уравнений (3.14):

$$\gamma_3^2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) / (\gamma_2^2(\gamma_1^2 - \gamma_3^2)) = \text{const} \quad (3.17)$$

Уравнение поверхности четвертого порядка (3.17), проходящей через точку $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$, имеет вид

$$\gamma_1^{-2} [(\gamma_2^0)^{-2} - (\gamma_3^0)^{-2}] + \gamma_2^{-2} [(\gamma_3^0)^{-2} - (\gamma_1^0)^{-2}] +$$

$$+ \gamma_3^{-2} [(\gamma_1^0)^{-2} - (\gamma_2^0)^{-2}] = 0 \quad (3.18)$$

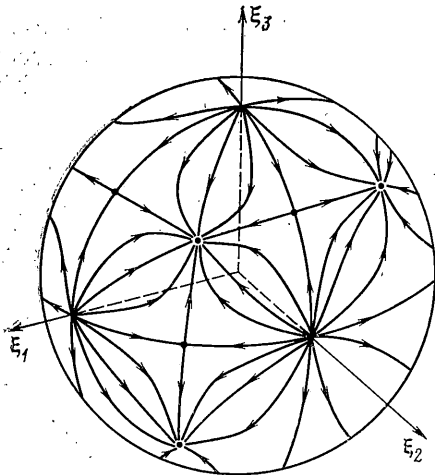
Таким образом, при наличии только неконсервативных моментов траектории единичного вектора оси симметрии гироскопа представляют собой пересечение единичной сферы и семейства поверхностей (3.17) (фиг. 2), а уравнение (3.14) имеют 26 особых точек (3.12), (3.13). Точки (3.13) по-прежнему оказываются седловыми, но сепаратрисы по сравнению с консервативным случаем оказываются повернутыми на 45° . Точки (3.12) в случае неконсервативных моментов становятся вырожденными узлами, устойчивость которых определяется знаком функции a . При $a > 0$ восемь точек $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = 1/3$ из (3.12) будут устойчивыми, а остальные неустойчивыми, а при $a < 0$ особые точки $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = 1/3$ становятся неустойчивыми.

Исследование совместного влияния консервативных и неконсервативных моментов встречает затруднения, связанные с переменностью модуля кинетического момента гироскопа и неавтономностью прецессионных

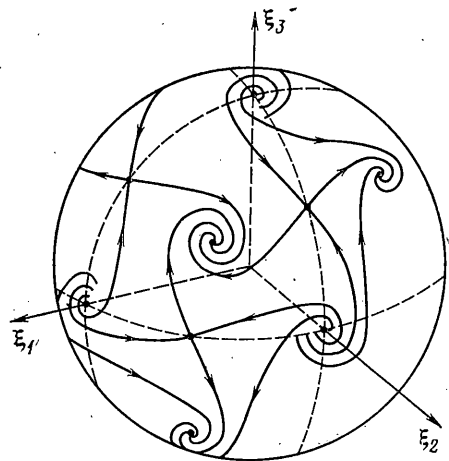
уравнений (3.9). Однако для гироскопов, у которых постоянство величины кинетического момента обеспечивается системой раскрутки, можно считать $k = \text{const}$, а систему дифференциальных уравнений (3.9) — автономной. Тогда при малых неконсервативных моментах центры (3.12) превращаются в фокусы, устойчивость которых определяется знаком коэффициента a у силовой функции неконсервативных моментов. На фиг. 3 построен фазовый портрет системы (3.9) при $k = \text{const}$ и $a > 0$.

При $a < 0$ особые точки, лежащие на осях координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 , становятся устойчивыми, а точки $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = 1/3$ — неустойчивыми фокусами. В предельном случае малых консервативных моментов возникает фазовый портрет, близкий к построенному выше фазовому портрету системы (3.14).

В заключение отметим, что предшествующее рассмотрение проведено в предположении, что ось динамической симметрии ротора совпадает с вектором кинетического момента гироскопа. Для проверки справедливости этого допущения необходимо составить дифференциальное уравнение для угла нутации ϕ между вектором кинетического момента и осью симметрии ротора. Указанное уравнение для угла нутации ϕ , так же как и уравнение (3.4) для модуля кинетического момента k , будет отличаться от соответствующих уравнений работы [2] лишь на члены порядка $\epsilon \mu$ (чле-



Фиг. 2



Фиг. 3

ны порядка ϵ в обоих случаях будут одинаковы). Следовательно, нелинейность силы F (1.1) не оказывает существенного влияния на поведение угла нутации и модуля кинетического момента и характер движения оси симметрии ротора вблизи вектора кинетического момента может быть найден из соответствующего уравнения работы [2], определяющего главный (порядка ϵ) член асимптотического решения рассматриваемой задачи.

4. Проведем некоторые числовые оценки. Рассмотрим неконтактный гироскоп с шаровым бериллиевым ротором, используемый в инерциальной навигационной системе «Микрон» [4]. Масса ротора $M = 10^{-3}$ кг, его радиус $R = 0,5 \cdot 10^{-2}$ м, угловая скорость вращения $\Omega = 90\,000$ об/мин, что соответствует кинетическому моменту $k = 0,942 \cdot 10^{-4}$ (Н·м·с). Величина радиального дебаланса ротора имеет величину $E = 0,5 \cdot 10^{-6}$ м (Для рассматриваемого гироскопа радиальный дебаланс используется для съема информации об угловом положении ротора.)

Жесткость подвеса примем равной $Q_0 = 1,96 \cdot 10^4$ Н/м. В этом случае статическое смещение ротора под действием веса равно дебалансу, а частота $\sqrt{Q_0/M}$ собственных колебаний ротора составляет 705 Гц. Рассмотрим «консервативный» подвес, в котором к геометрическому центру ротора приложена сила

$$F_m = -Q_0 \rho_m + Q_1 \rho_m^3 \quad (4.1)$$

Коэффициент Q_1 в (4.1) зададим так, чтобы при смещениях центра ротора на величину, равную дебалансу E , «нелинейная» часть силы $Q_1 \rho_m^3$ составляла 0,5% от линейной части силы F . Тогда $Q_1 = 3,92 \cdot 10^{14}$ Н/м³, $\mu = 0,005$. В таком подвесе $V' = 0$, $n = 1$ и из уравнения (3.6) получим

$$D\gamma_1 = \frac{3Q_1}{8k} \left(\frac{M\Omega^2}{Q_0 - M\Omega^2} \right)^4 E^2 \gamma_2 \gamma_3 (\gamma_3^2 - \gamma_2^2) \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (4.2)$$

При $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \sin \pi/8 = 0,375$ из (4.2) находим угловую скорость ухода гироскопа $D\gamma_1 = 0,014$ угл. мин/мин.

Для учета демпфирующих свойств подвеса рассмотрим силу

$$F_m = -Q_0(1 + T_1 D) \rho_m + Q_1 \rho_m^3$$

Зададимся коэффициентом $T_1 = 10^{-4}$ с. При указанном выше положении вектора кинетического момента из уравнений (3.6) получим уход $D\gamma_1 = 0,01$ угл. мин/мин, $D\gamma_2 = 0,005$ угл. мин/мин, $D\gamma_3 = 0$.

Для сравнения укажем, что объявленная точность системы «Микрон» составляет 0,01 угл. мин/мин [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилин В. П., Мартыненко Ю. Г., Новожилов И. В. Зависимость времени выбега электростатического гироскопа от дебаланса ротора. — Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 2, с. 20–22.
2. Мартыненко Ю. Г. Движение несбалансированного гироскопа с неконтактным подвесом. — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4, с. 13–19.
3. Брюшков В. Г., Мартыненко Ю. Г. Уходы несбалансированного гироскопа в неравновесном электростатическом подвесе. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6, с. 33–40.
4. Малеев П. И. Новые типы гироскопов. Л.: Судостроение, 1971. 160 с.
5. Ишлинский А. Ю., Борзов В. И., Степаненко Н. П. Лекции по теории гироскопов. М.: Изд-во МГУ, 1983. 245 с.
6. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
7. Алешин Б. В. Предельное поведение решений одной системы дифференциальных уравнений. — Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 2, с. 257–259.
8. Мартыненко Ю. Г. К теории пространственного электростатического ньютонометра. — В кн.: Некоторые вопросы теории навигационных систем. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 141–154.
9. Карган А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 296 с.
10. Денисов Г. Г., Комаров В. Н. Неконсервативные моменты и их влияние на процесс неконтактного гироскопа. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 15–23.
11. Денисов Г. Г., Новиков В. В. О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару. — Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 3, с. 43–50.

Москва, Тамбов

Поступила в редакцию
17.V.1984