МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1985

УДК 531.37

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРОВ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ПАНОВ А. П.

Рассмотрены операторы конечного вращения твердого тела и соответствующие им кинематические дифференциальные уравнения вращения. При помощи операторных кинематических уравнений и их частных нормированных решений получены обобщенные кинематические дифференциальные уравнения для вещественных собственных векторов операторов вращения (векторов вращения). Приведены векторные кинематические уравнения, содержащие как абсолютную, так и относительную производные произвольного вектора вращения. Показано, что абсолютная и относительная производные любого вектора вращения связаны оператором вращения, для которого вектор вращения является собственным.

На основе обобщенных векторных кинематических уравнений получены в качестве примеров уравнения для известных векторов вращения, а также для новых векторов, модули которых пропорциональны, соответственно, котангенсу половинного угла вращения, тангенсу и котангенсу четверти угла вращения. Отмечены достоинства новых векторов вращения и соответствующих им кинематических уравнений.

1. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{u}$ заданы два правых ортонормированных координатных базиса $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ с общим началом O. Базис $\mathbf{I}$ считаем неподвижным, а базис $\mathbf{J}$ — подвижным и связанным с некоторым твердым телом. Полагаем, что тело имеет одну неподвижную точку, совпадающую с началом базисов. Считаем, что в некоторый начальный момент времени t_0 одноименные орты базисов $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ совпадают и из этого начального положения базис $\mathbf{J}$ совершает вместе с телом некоторое произвольное сферическое движение вокруг точки O. В каждый последующий момент времени $t>t_0$ положение базиса $\mathbf{J}$ относительно базиса $\mathbf{I}$ будем характеризовать в соответствии с теоремой Эйлера [1, 2] результирующим конечным вращением базиса $\mathbf{J}$ вокруг некоторой оси, проходящей через точку O, на угол φ, удовлетворяющий условию $0<\varphi<\pi$. Поскольку такое вращение задает рассогласование базисов $\mathbf{J}$ и $\mathbf{I}$, то назовем его рассогласующим вращением, а обратное вращение — согласующим. Предполагаем, что как рассогласующее, так и согласующее вращения выполняются вокруг одной и той же оси, задаваемой единичным вектором — ортом $\mathbf{n}\in\mathbf{u}$, а направления вращений определяются знаком угла вращения φ. Для рассогласующего вращения угол φ берем положительным, а для согласующего — отрицательным. При этом за положительное направление вращения принимаем направление вращения против хода часовой стрелки, как это обычно принято для правых координатных базисов.

Операцию рассогласующего вращения базиса $\mathbf{J}$ представим непрерывным во времени линейным ортогональным преобразованием [3—5]:

$$\mathbf{s}=\mathbf{R}\mathbf{r}_* \tag{1.1}$$

где $\mathbf{s}\in\mathbf{u}$ — вектор, связанный с твердым телом, т. е. неподвижный относительно базиса $\mathbf{J}$, $\mathbf{r}_*\in\mathbf{u}$ — постоянный вектор, неподвижный относительно базиса $\mathbf{I}$, $\mathbf{R}$ — оператор рассогласующего вращения базиса $\mathbf{J}$, действующий в пространстве $\mathbf{u}$ и связанный с оператором $\mathbf{S}$ обратного (согласующего) вращения условием ортогональности $\mathbf{RS}=\mathbf{SR}=\mathbf{E}$ или $\mathbf{R}=\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ (здесь

$\mathbf{E}$, $\mathbf{S}^{-1}$, $\mathbf{S}^{T}$ — соответственно, единичный, обратный и транспонированный операторы). Ортогональное преобразование вида (1.1), содержащее оператор вращения, будем называть преобразованием вращения. С помощью преобразования вращения (1.1) получим операторные кинематические дифференциальные уравнения вращения.

Продифференцируем преобразование (1.1) по времени и, учитывая, что вектор $\mathbf{r}_*$ неподвижен относительно базиса $\mathbf{I}$, запишем выражение

$$\mathbf{s}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{R}^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{r}_* \tag{1.2}$$

где точкой обозначены абсолютные производные по времени. Так как вектор $\mathbf{s}$ связан с телом, то его производная $\mathbf{s}^{\boldsymbol{\cdot}}$ может быть представлена векторным произведением $\mathbf{s}^{\boldsymbol{\cdot}}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{s}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения базиса $\mathbf{J}$ относительно базиса $\mathbf{I}$, или линейным преобразованием

$$\mathbf{s}^{\boldsymbol{\cdot}}=\boldsymbol{\Omega}\mathbf{s} \tag{1.3}$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}$ — кососимметрический оператор векторного умножения [5], для которого вектор $\boldsymbol{\omega}$ является вещественным собственным вектором, удовлетворяющим характеристическому уравнению $\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}=\mu_\omega\boldsymbol{\omega}$ при $\mu_\omega=0$.

Заметим, что кососимметрические операторы типа $\boldsymbol{\Omega}$, действуя в пространстве $\mathbf{u}$, образуют свое линейное трехмерное пространство $\mathbf{V}$, которое при введении дополнительной операции коммутирования (билинейной, кососимметрической и удовлетворяющей тождеству Якоби) является алгеброй Ли, изоморфной [6] алгебре Ли векторов типа $\boldsymbol{\omega}$ трехмерного пространства $\mathbf{u}$, снабженного операцией векторного умножения. Изоморфизм этих алгебр позволяет осуществлять взаимно однозначный переход от векторных соотношений к операторным и обратно.

Далее о кососимметрических операторах типа $\boldsymbol{\Omega}\in\mathbf{V}$ будем говорить, что они соответствуют (изоморфно) векторам типа $\boldsymbol{\omega}\in\mathbf{u}$ и наоборот.

С учетом (1.1) и (1.3) получаем из (1.2) искомые операторные кинематические уравнения в виде

$$\mathbf{R}^{\boldsymbol{\cdot}}=\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R} \tag{1.4}$$

или

$$\mathbf{S}^{\boldsymbol{\cdot}}=-\mathbf{S}\boldsymbol{\Omega} \tag{1.5}$$

Из этих уравнений следуют также уравнения, разрешенные относительно оператора $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\Omega}=\mathbf{R}^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{S}=-\mathbf{R}\mathbf{S}^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{1.6}$$

Операторным уравнениям (1.4)—(1.6) в базисе $\mathbf{I}$ отвечают матричные кинематические уравнения (уравнения Пуассона) такого же вида [4].

2. Рассмотрим векторы $\mathbf{x}\in\mathbf{u}$ $(\mathbf{x}\neq0)$, удовлетворяющие линейным преобразованиям

$$\mathbf{x}=\mathbf{R}\mathbf{x}=\mathbf{S}\mathbf{x} \tag{2.1}$$

Такие векторы являются вещественными собственными векторами операторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ и соответствуют вещественному числу этих операторов — числу $\mu_x=1$ [2, 3], определяемому из характеристических уравнений $\det(\mathbf{R}-\mu_x\mathbf{E})=0$ или $\det(\mathbf{S}-\mu_x\mathbf{E})=0$. Ранг операторов $\mathbf{R}-\mu_x\mathbf{E}$ и $\mathbf{S}-\mu_x\mathbf{E}$ равен двум и, следовательно, каждое из уравнений (2.1) имеет бесконечное множество решений, отличающихся только произвольными скалярными множителями.

Преобразования (2.1) показывают, что все векторы $\mathbf{x}$ лежат на одной прямой, являющейся осью рассогласующего или согласующего результирующих конечных вращений тела, и отличаются друг от друга только по модулю. Далее условимся понимать под $\mathbf{x}$ некоторый произвольный собственный вектор операторов вращения $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ и называть его для краткости вектором вращения.

При помощи введенного в п.1 орта $\mathbf{n}$ зададим вектор $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x}=x\mathbf{n}$, где x — модуль вектора $\mathbf{x}$, являющийся в общем случае произвольной скалярной функцией времени. Этому векторному соотношению соответствует в пространстве **V** операторное соотношение

$$\mathbf{X}=x\mathbf{N} \tag{2.2}$$

где **N** — кососимметрический оператор векторного умножения, отвечающий орту **n**.

Найдем соотношения, устанавливающие соответствие между операторами вращения **R**, **S** и оператором **X**.

Рассмотрим случай рассогласующего вращения тела вокруг неподвижной оси, задаваемой некоторым ортом $\mathbf{n}_*\in\mathbf{u}$. Такое вращение будем характеризовать вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{n}_*$ и соответствующим этому вектору кососимметрическим оператором $\mathbf{\Omega}=\omega\mathbf{N}_*$, где $\mathbf{N}_*$ — постоянный кососимметрический оператор, соответствующий орту $\mathbf{n}_*$.

Пусть операторы **R** и **Ω** определены на временном интервале (t_0, t) и пусть $\mathbf{R}(t_0)=\mathbf{E}$. Тогда частное нормированное решение уравнения (1.4) может быть найдено методом последовательных приближений [3, 7] и записано в форме

$$\mathbf{R}=\mathbf{E}+\sin\varphi\mathbf{N}_*+(1-\cos\varphi)\mathbf{N}_*^2 \tag{2.3}$$

где

$$\varphi=\int_{t_0}^{t}\omega\,dt \tag{2.4}$$

— угол результирующего вращения тела на интервале (t_0, t).

При получении решения (2.3) использовались свойства целых степеней кососимметрического оператора N:

$$\mathbf{N}^{2q+1}=(-1)^q\mathbf{N},\quad \mathbf{N}^{2(q+1)}=(-1)^q\mathbf{N}^2\quad (q=1, 2, 3,\ldots) \tag{2.5}$$

которые следуют в соответствии с теоремой Гамильтона — Кэли [3] из характеристического уравнения $\det(\mathbf{N}-\mu_n\mathbf{E})=\mu_n^3+\mu_n=0$, где μ_n — собственные числа оператора **N**.

С учетом соотношения (2.2) решение (2.3) перепишем в виде

$$\mathbf{R}=\mathbf{E}+\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{X}^2 \tag{2.6}$$

$$\alpha=\frac{1}{x}\sin\varphi,\qquad \beta=\frac{1}{x^2}(1-\cos\varphi)$$

Частное решение уравнения (1.5) получаем транспонированием решения (2.6):

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}-\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{X}^2 \tag{2.7}$$

Так как выражения (2.6), (2.7) определяют операторы результирующих конечных вращений, то эти выражения остаются справедливыми, очевидно, также и в том случае, если тело совершает произвольное сферическое движение с переменным по модулю и направлению вектором $\boldsymbol{\omega}$. Но следует учесть, что в этом случае равенство (2.4) теряет силу, а отношение $\mathbf{X}/x$ в (2.6), (2.7) определяет оператор **N**, соответствующий переменному по направлению орту **n**. При этом оператору **X** соответствует некоторый вектор **x**, движение которого относительно базиса **I** характеризуется абсолютной производной $\dot{\mathbf{x}}$, а движение относительно базиса **J** — относительной или локальной производной $\mathbf{x}^*$. Связь между этими производными задается известным [1] соотношением $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{x}^*+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}$ или

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{x}^*+\mathbf{\Omega}\mathbf{x} \tag{2.8}$$

В то же время векторы вращения, являясь собственными векторами операторов **R**, **S**, обладают одним замечательным свойством, которое устанавливает следующая теорема.

Теорема. Абсолютная и относительная производные любого вектора вращения связаны оператором вращения, для которого вектор вращения является собственным.

Для доказательства продифференцируем, например, первое преобразование в (2.1) по времени и, воспользовавшись уравнением (1.4), приходим к соотношению

$$\mathbf{x}^{\circ}=\mathbf{R}\mathbf{x}^{\cdot}+\mathbf{\Omega}\mathbf{x} \tag{2.9}$$

Сравнивая соотношения (2.8) и (2.9), получаем операторную связь между производными вектора $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}^{*}=\mathbf{R}\mathbf{x}^{\cdot} \tag{2.10}$$

что и требовалось доказать.

3. Получим кинематические уравнения и соотношения, устанавливающие связь между производными $\mathbf{x}^{\cdot}$, $\mathbf{x}^{*}$ и вектором $\boldsymbol{\omega}$ при условии, что модуль вектора $\mathbf{x}$ является произвольной функцией угла φ, т. е. $x=x(\varphi)$.

Получим из решений (2.6), (2.7) соотношение $2\alpha\mathbf{X}=\mathbf{R}-\mathbf{S}$. Продифференцировав это соотношение по времени и воспользовавшись уравнениями (1.4), (1.5) и их решениями (2.6), (2.7), получим уравнение

$$\mathbf{X}^{\cdot}+\frac{1}{\alpha}\alpha^{\cdot}\mathbf{X}=\frac{1}{\alpha}\mathbf{\Omega}-\frac{1}{2}[\mathbf{X},\mathbf{\Omega}]+\frac{\beta}{2\alpha}(\mathbf{X}^2\mathbf{\Omega}+\mathbf{\Omega}\mathbf{X}^2) \tag{3.1}$$

где $[\mathbf{X},\mathbf{\Omega}]=\mathbf{X}\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}\mathbf{X}$ — коммутатор операторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{\Omega}$.

Заметим, что двойному векторному произведению $\mathbf{x}\times(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega})=\mathbf{X}^2\boldsymbol{\omega}=-x^2\boldsymbol{\omega}+(x\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{x}$ соответствует двойной коммутатор $[\mathbf{X},[\mathbf{X},\mathbf{\Omega}]]=-x^2\mathbf{\Omega}+(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{X}$, где $(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\omega})$ — скалярное произведение. Из этого коммутатора с помощью тождества $\mathbf{X}\mathbf{\Omega}\mathbf{X}=-(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{X}$ получим операторное выражение

$$\mathbf{X}^2\mathbf{\Omega}+\mathbf{\Omega}\mathbf{X}^2=-2x^2\mathbf{\Omega}-[\mathbf{X},[\mathbf{X},\mathbf{\Omega}]],\quad x^2=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) \tag{3.2}$$

Тогда, используя (3.2), преобразуем уравнение (3.1) к виду

$$\mathbf{X}^{\cdot}+\frac{\alpha^{\cdot}}{\alpha}\mathbf{X}=\frac{1}{\alpha}\cos\varphi\mathbf{\Omega}-\frac{1}{2}[\mathbf{X},\mathbf{\Omega}]-\frac{\beta}{2\alpha}[\mathbf{X},[\mathbf{X},\mathbf{\Omega}]]$$

Этому уравнению однозначно соответствует векторное уравнение

$$\mathbf{x}^{\cdot}+\frac{\alpha^{\cdot}}{\alpha}\mathbf{x}=\frac{1}{\alpha}\cos\varphi\boldsymbol{\omega}-\frac{1}{2}\mathbf{X}\boldsymbol{\omega}-\frac{\beta}{2\alpha}\mathbf{X}^2\boldsymbol{\omega} \tag{3.3}$$

($\mathbf{x}^{\cdot}$ — абсолютная производная вектора $\mathbf{x}$). Производная $\alpha^{\cdot}$ может быть представлена выражением

$$\alpha^{\cdot}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x'}\cos\varphi-\alpha\right)(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^{\cdot}) \tag{3.4}$$

если учесть, что $x^{\cdot}=x'\varphi^{\cdot}=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^{\cdot})/x$, где $x'=dx/d\varphi$. Далее с помощью двойного векторного произведения $\mathbf{X}^2\mathbf{x}^{\cdot}=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^{\cdot})\mathbf{x}-x^2\mathbf{x}^{\cdot}$ приведем (3.4) к виду

$$\frac{1}{\alpha}\alpha^{\cdot}\mathbf{x}=\frac{1}{\alpha x'x^2}(\cos\varphi-\alpha x')(\mathbf{X}^2+x^2\mathbf{E})\mathbf{x}^{\cdot} \tag{3.5}$$

Подставив выражение (3.5) в (3.3), получаем после преобразований уравнение вида

$$\mathbf{Q}\mathbf{x}^{\cdot}=\mathbf{P}\boldsymbol{\omega} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{Q}=\frac{1}{\alpha x'}\left(\cos\varphi\mathbf{E}+\frac{1}{x^2}(\cos\varphi-\alpha x')\mathbf{X}^2\right)$$

$$\mathbf{P}=\frac{1}{\alpha}\cos\varphi\mathbf{E}-\frac{1}{2}\mathbf{X}-\frac{1}{2\alpha}\beta\mathbf{X}^2 \tag{3.7}$$

Оператор $\mathbf{Q}$ симметрический и имеет определитель $\det \mathbf{Q}=(x/x')\operatorname{ctg}\varphi$. Следовательно, при $\varphi\neq\pi$ и $x\neq 0$ существует обратный оператор $\mathbf{Q}^{-1}$ и из (3.6) может быть получено уравнение, разрешенное относительно $\mathbf{x}^{\cdot}$:

$$\mathbf{x}^{\cdot}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\boldsymbol{\omega} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{Q}^{-1}=\frac{x'\alpha}{\cos\varphi}\left(\mathbf{E}+\frac{\cos\varphi-x'\alpha}{x'\alpha x^2}\mathbf{X}^2\right) \tag{3.9}$$

После перемножения операторов (3.9), (3.7) получаем из (3.8) одно из искомых кинематических уравнений в виде линейного преобразования

$$\mathbf{x}^{\cdot}=\mathbf{G}\boldsymbol{\omega} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{G}=x'\mathbf{E}-\frac{1}{2}\mathbf{X}+\delta\mathbf{X}^2,\qquad \delta=\frac{1}{x^2}\left(x'-\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) \tag{3.11}$$

Наряду с уравнением (3.10) может быть получено уравнение, разрешенное относительно независимой переменной — вектора $\boldsymbol{\omega}$, т. е. уравнение

$$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{F}\mathbf{x}^{\cdot} \tag{3.12}$$

Обращая оператор (3.11), получаем

$$\mathbf{F}=\mathbf{G}^{-1}=\frac{1}{x'}\mathbf{E}+\beta\mathbf{X}+\gamma\mathbf{X}^2,\qquad \gamma=\frac{1}{x'x^2}(1-x'\alpha)$$

Из этого выражения следует, что уравнения типа (3.12) существуют только для тех векторов $\mathbf{x}\neq 0$, у которых $x'\neq 0$.

В приведенных векторных кинематических уравнениях фигурирует абсолютная производная $\mathbf{x}^{\cdot}$ вектора $\mathbf{x}$. Из этих уравнений можно с помощью линейного преобразования (2.10) получить кинематические уравнения, содержащие относительную производную $\mathbf{x}^*$. Пользуясь свойствами степеней оператора $\mathbf{X}$, аналогичными свойствам (2.5), можно показать, что операторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ являются для операторов, соответственно, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ операторами транспонирования, т. е. справедливы тождества

$$\mathbf{RG}=\mathbf{GR}=\mathbf{G}^T,\qquad \mathbf{SF}=\mathbf{FS}=\mathbf{F}^T \tag{3.13}$$

Заметим, что из тождеств (3.13) следуют разложения операторов вращения $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ в виде произведений $\mathbf{R}=\mathbf{G}^T\mathbf{F}=\mathbf{F}\mathbf{G}^T$, $\mathbf{S}=\mathbf{F}^T\mathbf{G}=\mathbf{G}\mathbf{F}^T$. Частными случаями этих разложений являются разложения Кэли [3] для $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$, получаемые при $x=\operatorname{tg}\varphi/2$.

Подставив уравнение (3.10) в (2.10), получаем с учетом (3.13) уравнение, разрешенное относительно производной $\mathbf{x}^*$:

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{G}^T\boldsymbol{\omega},\qquad \mathbf{G}^T=x'\mathbf{E}+{}^1/_2\mathbf{X}+\delta\mathbf{X}^2 \tag{3.14}$$

а подставив в уравнение (3.12) преобразование $\mathbf{x}^{\cdot}=\mathbf{S}\mathbf{x}^*$, получаем с учетом (3.13) обращенное уравнение (3.14):

$$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{F}^T\mathbf{x}^* \tag{3.15}$$
$$\mathbf{F}^T=(\mathbf{G}^{-1})^T=(\mathbf{G}^T)^{-1}=E/x'-\beta\mathbf{X}+\gamma\mathbf{X}^2$$

Уравнения (3.10), (3.12), (3.14), (3.15) допускают следующие векторные формы записи:

$$\mathbf{x}^{\cdot(*)}=x'\boldsymbol{\omega}(\mp)\frac{1}{2}\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega}+\delta\mathbf{x}\times(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega}) \tag{3.16}$$

$$\mathbf{x}^{\cdot(*)}=\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\,\omega(\mp)\frac{1}{2}\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega}+\delta(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{x} \tag{3.17}$$

$$\mathbf{x}^{\cdot(*)}=\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\,\omega(\mp)\frac{1}{2}\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega}+\delta\{\mathbf{xx}\}\boldsymbol{\omega} \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{x'}\mathbf{x}^{\cdot(*)}(\pm)\beta\mathbf{x}\times\mathbf{x}^{\cdot(*)}+\gamma\mathbf{x}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{x}^{\cdot(*)}) \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\alpha\mathbf{x}^{\cdot(*)}(\pm)\beta\mathbf{x}\times\mathbf{x}^{\cdot(*)}+\gamma(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^{\cdot(*)})\mathbf{x} \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\alpha\mathbf{x}^{\cdot(*)}\pm\beta\mathbf{x}\times\mathbf{x}^{\cdot(*)}+\gamma\{\mathbf{x}\mathbf{x}\}\mathbf{x}^{\cdot(*)} \tag{3.21}$$

где $(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\omega})$, $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^{\cdot})$, $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^{*})$ — скалярные произведения, $\{\mathbf{x}\mathbf{x}\}$ — диадное произведение; знаки в скобках у векторных произведений соответствуют уравнениям с относительной производной $\mathbf{x}^{*}$.

Умножив любое из векторных кинематических уравнений (3.16)—(3.21) скалярно на вектор $\mathbf{x}$, дополним эти уравнения скалярным кинематическим уравнением для модуля x

$$x^{\cdot}=x'(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\omega})/x \tag{3.22}$$

4. При получении векторных кинематических уравнений предполагалось, что модуль вектора $\mathbf{x}$ является произвольной функцией угла φ. В связи с этим уравнения (3.16)—(3.22) можно рассматривать как обобщенные кинематические уравнения вращения, охватывающие все множество возможных кинематических дифференциальных уравнений для векторов вращения. Выбор функции $x=x(\varphi)$ определяет конкретный вид векторных кинематических уравнений. При заданной функции $x=x(\varphi)$ задача построения на основе любого обобщенного уравнения соответствующего конкретного кинематического дифференциального уравнения сводится к получению скалярного дифференциального уравнения вида $x'=f(x)$ и представлению тригонометрических функций $\operatorname{ctg}\varphi/2$ или $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, входящих в правые части обобщенных уравнений, через функцию $x=x(\varphi)$. Случай задания $x=\mathrm{const}$ следует рассматривать как особый, поскольку тогда $x'=0$ и уравнений вида (3.19)—(3.21), (3.22) не существует.

В качестве примеров приведем кинематические дифференциальные уравнения, получаемые из обобщенных уравнений (3.17), (3.22) для векторов вращения с модулями $x=n=1$, $x=\varphi$, $x=\vartheta=k_\vartheta\operatorname{tg}\varphi/2$, $x=\varkappa=k_\varkappa\operatorname{ctg}\varphi/2$, $x=\tau=k_\tau\operatorname{tg}\varphi/4$, $x=\rho=k_\rho\operatorname{ctg}\varphi/4$ ($k_\nu(\nu=\vartheta,\ \varkappa,\ \tau,\ \rho)$ — произвольное вещественное положительное число):

1. $\mathbf{x}=\mathbf{n}$, $n=1$, $n'=0$

$$\mathbf{n}^{\cdot(*)}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{\omega}(\mp)\frac{1}{2}\mathbf{n}\times\boldsymbol{\omega}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{n} \tag{4.1}$$

2. $\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}=\varphi\mathbf{n}$, $\varphi'=1$

$$\boldsymbol{\varphi}^{\cdot(*)}=\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{\omega}(\mp)\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{\varphi^2}\left(1-\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\varphi} \tag{4.2}$$

$$\varphi^{\cdot}=\varphi^{-1}(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\omega})=(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}) \tag{4.3}$$

3. $\mathbf{x}=\boldsymbol{\vartheta}=\vartheta\mathbf{n}$, $\quad \vartheta'=\dfrac{1}{2}\left(k_\vartheta+\dfrac{1}{k_\vartheta}\vartheta^2\right)$, $\quad \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{k_\vartheta}{\vartheta}$

$$\boldsymbol{\vartheta}^{\cdot(*)}=\frac{k_\vartheta}{2}\boldsymbol{\omega}(\mp)\frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2k_\vartheta}(\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\vartheta} \tag{4.4}$$

$$\vartheta^{\cdot}=\frac{1}{2}\left(\frac{k_\vartheta}{\vartheta}+\frac{\vartheta}{k_\vartheta}\right)(\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{\omega})=\frac{1}{2}\left(k_\vartheta+\frac{1}{k_\vartheta}\vartheta^2\right)(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}) \tag{4.5}$$

4. $\mathbf{x}=\boldsymbol{\varkappa}=\varkappa\mathbf{n}$, $\quad \varkappa'=-\dfrac{1}{2}\left(k_\varkappa+\dfrac{1}{k_\varkappa}\varkappa^2\right)$, $\quad \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{\varkappa}{k_\varkappa}$

$$\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot(*)}=\frac{1}{2k_\varkappa}\varkappa^2\boldsymbol{\omega}(\mp)\frac{1}{2}\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\omega}-\left(\frac{k_\varkappa}{2\varkappa^2}+\frac{1}{k_\varkappa}\right)(\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\varkappa} \tag{4.6}$$

$$\varkappa^{\cdot}=-\frac{1}{2}\left(\frac{k_\varkappa}{\varkappa}+\frac{\varkappa}{k_\varkappa}\right)(\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{\omega})=-\frac{1}{2}\left(k_\varkappa+\frac{1}{k_\varkappa}\varkappa^2\right)(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}) \tag{4.7}$$

5. $\mathbf{x}=\boldsymbol{\tau}=\tau\mathbf{n}, \quad \tau'=\frac{1}{4}\left(k_\tau+\frac{1}{k_\tau}\tau^2\right); \quad \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{k_\tau}{\tau}-\frac{\tau}{k_\tau}\right)$

$$\boldsymbol{\tau}^{\cdot(*)}=\frac{1}{4}\left(k_\tau-\frac{\tau^2}{k_\tau}\right)\boldsymbol{\omega}(\mp)\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2k_\tau}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\tau} \tag{4.8}$$

$$\tau^{\cdot}=\frac{1}{4}\left(\frac{k_\tau}{\tau}+\frac{\tau}{k_\tau}\right)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\omega})=\frac{1}{4}\left(k_\tau+\frac{1}{k_\tau}\tau^2\right)(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}) \tag{4.9}$$

6. $\mathbf{x}=\boldsymbol{\rho}=\rho\mathbf{n}, \quad \rho'=-\frac{1}{4}\left(k_\rho+\frac{\rho^2}{k_\rho}\right), \quad \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{k_\rho}{\rho}-\frac{\rho}{k_\rho}\right)$

$$\boldsymbol{\rho}^{\cdot(*)}=-\frac{1}{4}\left(k_\rho-\frac{\rho^2}{k_\rho}\right)\boldsymbol{\omega}(\mp)\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\omega}-\frac{1}{2k_\rho}(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\rho} \tag{4.10}$$

$$\rho^{\cdot}=-\frac{1}{4}\left(\frac{k_\rho}{\rho}+\frac{\rho}{k_\rho}\right)(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega})=-\frac{1}{4}\left(k_\rho+\frac{\rho^2}{k_\rho}\right)(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}) \tag{4.11}$$

Уравнения (4.1)—(4.4) представляют собой кинематические уравнения для известных векторов вращения. Вывод этих уравнений различными способами дан, например, в работах: [4] (уравнения (4.1), (4.2) с производными $\mathbf{n}^*$, φ^* и уравнение (4.3)); [8] (уравнение (4.2) с производной φ^*); [1] (уравнение (4.4) при $k_\vartheta=2$ с производной $\boldsymbol{\vartheta}^{\cdot}$).

Кинематические уравнения (4.6), (4.7) для вектора вращения $\boldsymbol{\varkappa}$ представляют интерес в сочетании с уравнениями (4.4), (4.5). Если использовать, например, для численного интегрирования уравнение (4.4) при изменении угла φ в диапазонах $0\leqslant\varphi\leqslant90°$ и $270°\leqslant\varphi\leqslant360°$, а уравнение (4.6) — в диапазонах $90°\leqslant\varphi\leqslant180°$ и $180°\leqslant\varphi\leqslant270°$, то будет обеспечена возможность однозначного определения с помощью векторов $\boldsymbol{\vartheta}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ ориентации твердого тела при его полном обороте. При этом не только устраняется вырождение (обращение в бесконечность) модулей ϑ при $\varphi=180°$ и $\varkappa$ при $\varphi=0$, но и могут быть обеспечены за счет выбора чисел k_ϑ, $k_\varkappa$ условия $\vartheta\leqslant1$, $\varkappa\leqslant1$. Выполнение этих условий необходимо, например, в некоторых случаях численного интегрирования кинематических уравнений в цифровых вычислительных машинах [4, 8]. Кроме того, уравнения (4.4), (4.6) и уравнения (4.5), (4.7) имеют первый интеграл $(\boldsymbol{\vartheta}\cdot\boldsymbol{\varkappa})=k_\vartheta k_\varkappa=\text{const}$.

Новые векторы вращения $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\rho}$ имеют, в свою очередь, преимущества перед векторами $\boldsymbol{\vartheta}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ за счет вдвое больших диапазонов изменения угла φ, обеспечивающих выполнение условий $\tau\leqslant1$, $\rho\leqslant1$ (соответственно, $0\leqslant\varphi\leqslant180°$ и $180°\leqslant\varphi\leqslant360°$). С точностью до обозначений и знаков кинематические уравнения (4.8)—(4.11) для векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\rho}$ совпадают. Первый интеграл этих уравнений имеет вид $(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\rho})=k_\tau k_\rho=\text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
4. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
5. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
6. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972. 336 с.
7. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1963. 546 с.
8. *Bortz J. E.* A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation.— IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst., 1971, v. AES-7, No. 1, p. 61—66.

Киев

Поступила в редакцию
26.VII.1984