

УДК 534.1

ОСОБЕННОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОВЕДЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ НА ГИДРООПОРАХ

КЛЮШНИКОВ В. Д., САХАРОВ А. Н.

Применяемые в технических устройствах гидро- и аэростатические опоры обнаруживают свойство неустойчивости стационарных режимов работы при некоторых значениях параметров системы. В [1-3] экспериментально и теоретически исследованы критические режимы для аэростатических опор с жесткими и эластичными стенками. Было установлено, что существенную роль в возникновении неустойчивости играет сжимаемость рабочей жидкости (газа).

В публикуемой работе рассматривается иная возможность возникновения опасных режимов работы конструкций на гидроопорах на примере вертикальной качки, моделируемой как колебания тела массы M на некотором упруговязком основании.

1. Принципиальная схема гидроопоры с компенсатором приведена на фиг. 1, где H — высота слоя жидкой подушки, b , h — длина и толщина зазора, R — радиус гидроопоры, p — давление в компенсаторе и в слое жидкой подушки, Mg — вес конструкции, опирающейся на гидроопору.

Предполагается, что опора осесимметрична, стенки жесткие, рабочая жидкость — ньютоновская несжимаемая с плотностью ρ ; для всех режимов работы выполнено условие $R \gg b$, $b \gg h$.

Первое неравенство позволяет несколько упростить задачу: перейти от осесимметричной задачи течения жидкости в зазоре к плоской. Второе — позволяет рассматривать такое течение как пуазейлево. Обозначим через u_1^0 , u_2^0 , p^0 компоненты вектора скорости в направлениях x_1 , x_2 и давление в стационарном режиме. Тогда имеем [4] (μ — коэффициент динамической вязкости):

$$p = p^0 (1 - x_1/b), \quad u_1^0 = p^0 [(h^0/2)^2 - x_2^2] / \mu b, \quad u_2^0 = 0 \quad (1.1)$$

Расход жидкости Q^0 через зазор C дается формулой

$$Q^0 = 2\pi(R-b) \int_{-1/2h^0}^{1/2h^0} u_1^0 dx_2 \quad (1.2)$$

Грузоподъемность опоры G , определяемая давлением в слое подушки, в случае пуазейлева потока (1.1) связана с параметрами опоры следующими соотношениями:

$$Mg = G^0 = \pi p^0 R(R-b) \quad (1.3)$$

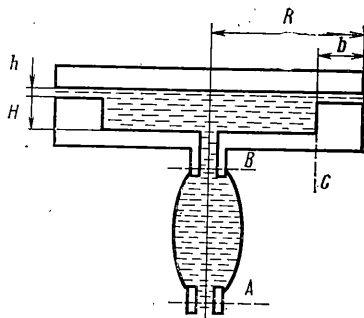
или с учетом (1.2):

$$G^0 = 3\mu b R Q^0 (h^0)^{-3} \quad (1.4)$$

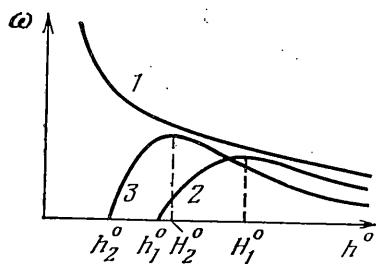
2. Рассмотрим малое возмущение стационарного режима. Для вывода уравнения возмущенного движения используем уравнение баланса расхода жидкости в слое подушки:

$$dV/dt = Q_B - Q_C, \quad V = \pi(R-b)^2(H+y(t)) \quad (2.1)$$

$$Q_B = Q^0 + \delta Q_B, \quad Q_C = Q^0 + \delta Q_C$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $y(t)$ — величина вертикального смещения в возмущенном движении; Q_B, Q_C — соответствующие расходы через сечения B и C .

Обозначим через u_1, u_2 возмущения скорости потока в направлении осей x_1 и x_2 , а через p — возмущение давления. Полагая u_1 и u_2 пренебрежимо малыми по сравнению с характерной скоростью исходного потока, на основании известного приема линеаризации уравнений Навье — Стокса для течения в канале получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} u_{1,1} + u_{2,2} &= 0, & p_{,2} &= 0 \\ \partial u_1 / \partial t + u_{1,1} u_1^0 + u_{2,2} u_2^0 + p_{,1} / \rho - \mu u_{1,22} / \rho &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

при краевых условиях

$$p|_{x_1=0} = p(t), \quad p|_{x_1=b} = 0 \quad (2.3)$$

$$u_1|_{x_2=\pm 1/2 h^0} = 0, \quad u_2|_{x_2=\pm 1/2 h^0} = \mp 1/2 y'(t) \quad (2.4)$$

Тожественно удовлетворяя уравнению несжимаемости и кинематическим краевым условиям (2.4), ищем решение в виде

$$u_1(x_1, x_2, t) = f(x_1, t) u_1^0(x_2)$$

$$u_2(x_1, x_2, t) = - \frac{\partial f}{\partial x_1} \int_{-1/2 h^0}^{1/2 h^0} u_1(z) dz + \frac{y'(t)}{2}$$

Функцию $f(x_1, t)$ можно определить через плоский расход следующим образом:

$$f(x_1, t) = \frac{q(x_1, t)}{q^0}, \quad q^0 = \int_{-1/2 h^0}^{1/2 h^0} u_1^0(z) dz, \quad q = \int_{-1/2 h^0}^{1/2 h^0} u_1(x_1, z, t) dz$$

Можно видеть, что

$$q(x_1, t) = q_c - y'(t) x_1 \quad (2.5)$$

В этих условиях интегрирование первого уравнения из (2.2) по сечению дает ($\nu = \mu / \rho$ — коэффициент кинематической вязкости):

$$\partial q(x_1, t) / \partial t + 12/5 q^0 / h^0 \partial q(x_1, t) / \partial x_1 + h^0 / \rho p_{,1} + 12 \nu q(x_1, t) / (h^0)^2 = 0 \quad (2.6)$$

Интегрируя уравнение (2.6) по x_1 , с учетом (2.5) и динамических краевых условий (2.3) получаем следующее выражение связи возмущений расхода $q_c = q(0, t)$ и давления p :

$$\begin{aligned} \rho \cdot + \frac{12 \nu}{(h^0)^2} q_c - \frac{b}{2} y'' - \left(\frac{12 q^0}{5 h^0} + \frac{6 \nu b}{(h^0)^2} \right) y' - \frac{h^0}{b \rho} p &= 0 \\ q_c &= \delta Q_c / [2 \pi (R - b)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для определения величины δQ_B предполагаем компенсатор упругим с жесткостью k_0 :

$$\delta Q_B - \delta Q_A = -\dot{p}/k_0 \quad (2.8)$$

Величину возмущения расхода жидкости δQ_A в сечении A , создаваемой нагнетателем, определяем полагая мощность нагнетателя постоянной. Тогда $\delta Q_A = -Q^0 p/p^0$. Отсюда будем иметь

$$\delta Q_B = -Q^0 p/p^0 - \dot{p}/k_0 \quad (2.9)$$

Используя соотношения (2.7), (2.8), (2.11) и уравнение баланса расхода (2.1), получим

$$\frac{p''}{k_0} + \left[\frac{Q^0}{p^0} + \frac{12\nu}{(h^0)^2 k_0} \right] \dot{p} + \left[\frac{12\nu Q^0}{(h^0)^2 p^0} + \frac{h^0}{b\rho} \right] p + \frac{R}{2} y'' + \frac{6\nu R}{(h^0)^2} y' = 0 \quad (2.10)$$

Для изменения грузоподъемности опоры в возмущенном движении с учетом (1.3) имеем

$$G = \pi R(R-b)p = G^0 p/p^0 \quad (2.11)$$

В этом случае из уравнения (2.10) получаем реологическое уравнение опоры

$$\frac{p^0}{k_0 G^0} G'' + \left(Q^0 + \frac{12\nu p^0}{(h^0)^2 k_0} \right) \frac{G'}{G^0} + \left(\frac{12\nu Q^0}{(h^0)^2} + \frac{h^0 p^0}{b\rho} \right) \frac{G}{G^0} + \frac{R}{2} y'' + \frac{6\nu R}{(h^0)^2} y' = 0 \quad (2.12)$$

Для малых движений груза $G = My''$ и уравнение (2.14) после однократного интегрирования приводится к виду

$$\frac{p^0}{gk} y''' + \frac{p^0}{g} \left(\frac{\varepsilon\tau}{6\rho} + \frac{12}{k\tau} \right) y'' + \left(\frac{3p^0\varepsilon}{g\rho} + \frac{R}{2} \right) y' + \left(\frac{2}{5} \frac{p^0\tau}{\rho b} + \frac{6R}{\tau} \right) y = 0 \quad (2.13)$$

$$\tau = (h^0)^2 \nu, \quad \varepsilon = \frac{h^0}{b}, \quad k = \pi k_0 (R-b)$$

3. Исследуем решение дифференциального уравнения (2.13), ограничиваясь рядом предельных случаев.

Если вязкость рабочей жидкости исчезающе мала ($\tau \rightarrow \infty$), то уравнение (2.13) переходит в уравнение колебаний гармонического осциллятора $y'' + {}^{12/5}g/h^0 y = 0$ с частотой $\omega_0(h^0) = ({}^{12/5}g/h^0)^{1/2}$.

Рассмотрим другой предельный случай, когда жесткость компенсатора достаточно велика. Тогда уравнение движения при условии $k \rightarrow \infty$ запишется в виде

$$\frac{p^0\varepsilon\tau}{6g} y'' + \left(\frac{3p^0\varepsilon}{g\rho} + \frac{R}{2} \right) y' + \left(\frac{2}{5} \frac{p^0\tau}{\rho b} + \frac{6R}{\tau} \right) y = 0 \quad (3.1)$$

Характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_{1,2} = - \left(18 + \frac{3\eta}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\tau} \pm i \sqrt[4]{\frac{12}{5} \frac{g}{h^0} - \frac{9}{\tau^2} \Phi \left(\frac{\eta}{\varepsilon} \right)} \quad (3.2)$$

$$\eta = Rg\rho/p^0, \quad \Phi(\eta/\varepsilon) = {}^{1/4}\eta^2/\varepsilon^2 - \eta/\varepsilon + 9$$

Действительно, часть корней λ_1, λ_2 отрицательна; решения уравнения (3.1) затухают. Определим границы аperiodического и колебательного режимов. Из (3.2) следует выражение для частоты колебаний

$$\omega^2 = \omega_0^2(h^0) [1 - {}^{15/4}\Phi(\eta/\varepsilon) h^0/(\tau g)] \quad (3.3)$$

Рассмотрим случай, когда $\eta/\varepsilon \ll 1$, тогда зависимость (3.3) представима в виде

$$\omega^2 = {}^{12/5}g/h^0 - 81\nu^2/(h^0)^4 \quad (3.4)$$

Очевидно, что формула (3.4) имеет смысл лишь для $h^0 \geq h_1^0$, где $h_1^0 = (135/4v^2/g)^{1/2}$. Частота $\omega(h^0)$, определенная в (3.4), достигает максимального значения в точке $H_1^0 = (135v^2/g)^{1/2}$ и равна

$$\omega_{\max} = \sqrt[3]{1/4} \omega_0(H_1^0) \quad (3.5)$$

Таким образом, при $h^0 < H_1^0$ имеет место монотонное приближение возмущенного движения к невозмущенному, а при $h^0 > H_1^0$ — колебательный затухающий режим с максимальной частотой, определяемой формулой (3.5).

В случае, когда $\eta/\varepsilon \gg 1$, зависимость (3.3) имеет вид

$$\omega^2 = 12/5 g/h^0 - 9/4 \eta^2 b^2 v^2 / (h^0)^6 \quad (3.6)$$

Правая часть соотношения (3.6) неотрицательна, если $h^0 \geq H_2^0$, где

$$H_2^0 = (15/16 b^2 v^2 \eta^2 / g)^{1/5} \quad (3.7)$$

Частота $\omega(h^0)$ достигает максимума в точке $H_2^0 = (45/8 b^2 \eta^2 v^2 / g)^{1/5}$, и равна $\omega_{\max} = (5/8)^{1/2} \omega_0(H_2^0)$.

В формулу (3.7), определяющую границу раздела, входит параметр η , обратно пропорциональный величине рабочего давления p^0 . Поэтому при малых значениях рабочего давления колебательный режим начинается при толщинах зазора, меньших h_1^0 . Графики для функции $\omega(h^0)$ приведены на фиг. 2, где кривые 1, 2, 3 соответствуют случаям $\tau \rightarrow \infty$, $\eta/\varepsilon \ll 1$, $\eta/\varepsilon \gg 1$.

Возвращаясь к исследованию уравнения (2.13), определим границы устойчивости решения по критерию Раussa — Гурвица. Для устойчивости решения уравнения (2.13) должно выполняться неравенство

$$\varepsilon \left(\frac{p^0 \varepsilon \tau}{g\rho} + \frac{36p^0}{kg\tau} + \frac{R\tau}{12} \right) - \frac{2}{5} \frac{p^0 \tau}{kb} > 0 \quad (3.8)$$

Из неравенства (3.8) следует критическое условие

$$k_* (h^0) = \frac{p^0 [2^{2/5} \tau / b - 36\varepsilon / (g\tau)]}{\tau \varepsilon [p^0 \varepsilon / (g\rho) + R/12]} \quad (3.9)$$

Неустойчивости соответствуют значения $k < k_*$. Условие (3.9) может быть удовлетворено только при $h^0 > (90v^2/g)^{1/2} = h_*^0$. Если $k_* < 0$, что отвечает условию $h^0 < h_*^0$, то решение будет устойчивым.

Таким образом, в зависимости от параметров гидропоры возможны следующие характерные режимы: неустойчивые, устойчивые с монотонным приближением к стационарному процессу и устойчивые колебательные. Хотя последние режимы и являются затухающими, они могут оказаться опасными в отношении резонансных явлений, если удерживаемое гидропорой тело (конструкция) имеет собственные частоты, близкие к определенным формулой (3.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов Л. А., Пановко Я. Г. Колебания аппарата на воздушной подушке как твердого тела на обобщенном упруговязком основании. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4, с. 69–77.
2. Маслов Л. А., Пановко Я. Г. Устойчивость аппарата на воздушной подушке при наличии ресивера. — Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 5, с. 57–62.
3. Сибгатуллин Н. Р., Слезкин Н. А., Сорокин Э. А. Об устойчивости аэростатической опоры с эластичным ограждением. — ПММ, 1978, вып. 5, с. 874–882.
4. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.

Москва

Поступила в редакцию
7. II. 1984