МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1985

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

БРАТУСЬ А. С.

Рассматриваются установившиеся вынужденные гармонические колебания упругих тел переменной толщины. Ставится задача конструкционного демпфирования колебаний за счет перераспределения жесткостей (толщин) упругих тел заданного объема (веса). Решение строится в виде асимптотического разложения. Показано, что в ряде случаев оптимальное распределение толщин упругих тел близко по своей форме к распределениям, при которых одно из собственных значений конструкции достигает своего минимума или максимума.

На примере прямоугольных свободно опертых пластин проведен анализ оптимальных форм распределений толщин при различных значениях частоты вынужденных колебаний.

1. Постановка задачи. Во многих случаях (стержни, пластины, цилиндрические оболочки) вынужденные установившиеся гармонические колебания упругих тел переменной толщины описываются уравнением состояния вида

$$(A(h)-\omega^2 h)z(x)=p(x) \tag{1.1}$$

Здесь ω — частота гармонических колебаний, $z(x)$ — функция, определяющая распределение амплитуд вынужденных колебаний (в случае оболочки $z(x)$ — вектор-функция), $p(x)$ — распределение амплитуд вынужденных сил, действующих по гармоническому закону, $A(h)$ — линейный однородный дифференциальный оператор с коэффициентами, зависящими от функции $h(x)$, имеющей смысл толщины упругой конструкции.

Так, например, для пластин переменной толщины

$$A(h)=\frac{E}{12(1-\mu^2)\rho}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}h^3(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}h^3(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\mu\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)+2(1-\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}h^3(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\right] \tag{1.2}$$

где μ, E, ρ — коэффициент Пуассона, модуль Юнга и плотность материала соответственно.

Оператор $A(h)$ определен на функциях $z(x)$ в области D с кусочно гладкой границей Γ. Функция $z(x)$ удовлетворяет граничным условиям (B_j — линейные однородные дифференциальные операторы):

$$(B_j z(x))_\Gamma=0 \quad (j=1,\,2,\ldots,\,k) \tag{1.3}$$

Рассматривается класс самосопряженных задач (1.1), (1.3) в области D, т. е. для функций $z_i(x)$ $(i=1,\,2)$, удовлетворяющих условиям (1.3), выполняется равенство $(A(h)z_1,\,z_2)=(z_1,\,A(h)z_2)$. Здесь и далее круглые скобки означают скалярное произведение в $L_2(D)$:

$$(z_1,z_2)=\int z_1(x)z_2(x)\,dx,\qquad dx=dx_1\,dx_2$$

Предполагается, что оператор $A(h)$ положительно определен, т. е. существует такая постоянная $\gamma>0$, что выполняется неравенство $(A(h)z, z)\geqslant \geqslant\gamma\|z\|^2$, $\|z\|^2=(z, z)$. Отметим, что сделанные предположения выполняются для многих задач механики упругих тел. В случае конечного числа степеней свободы уравнение (1.1) имеет вид $(A(h)-\omega^2B(h))u=p$, где $A(h)$ и $B(h)$ — положительно-определенные симметрические матрицы с элементами, зависящими от переменной $h=(h_1, h_2,\dots, h_n)$, u, p — векторы.

Будем рассматривать лишь слабые решения краевой задачи (1.1), (1.3), принадлежащие соответствующему энергетическому пространству, порожденному оператором $A(h)$ [1].

Возможные распределения толщин конструкций удовлетворяют ограничениям (V, a, b и C — заданные постоянные):

$$\int\limits_D h(x)\,dx\leqslant V,\quad 0<a\leqslant h(x)\leqslant b,\quad \int\limits_D(\nabla h)^2dx\leqslant C^2 \tag{1.4}$$

Первые два ограничения означают, что объем (вес) конструкции зафиксирован и допустимые распределения толщин ограничены сверху и снизу. Третье условие задает ограничение на рост производных допустимых распределений толщин. Оно гарантирует существование решения вариационной задачи, которая будет рассмотрена ниже [2]. С точки зрения механики отсутствие последнего условия означало бы произвольность градиентов толщин, что в свою очередь ставит под сомнение правомерность гипотезы о прямолинейном нормальном элементе, лежащем в основе теории деформации пластин и оболочек.

Поставим задачу оптимального проектирования. Для заданной частоты ω вынужденных гармонических колебаний найти такое распределение толщин конструкции, удовлетворяющее условиям (1.4), при котором максимальное значение величины потенциальной энергии деформации конструкции достигало бы минимального значения, т. е.

$$U(h)=\frac{1}{2}\int\limits_D(A(h)z(x))z(x)\,dx\to\min \tag{1.5}$$

Функционал (1.5) характеризует интегральную меру жесткости упругого тела. Одновременно поставим задачу минимизации по всем допустимым распределениям толщин максимальной величины кинетической энергии

$$T(h)=\frac{\omega^2}{2}\int\limits_D h(x)z^2(x)\,dx\to\min \tag{1.6}$$

которую можно рассматривать как задачу конструкционного демпфирования гармонических колебаний конструкций заданного объема при помощи перераспределения жесткостей (толщин). Если задачам оптимального управления демпфированием колебаний за счет выбора управлений, изменяющихся во времени, посвящено большое число работ (см., например, [3, 4]), то в указанной постановке имеется сравнительно малое число исследований [5, 6].

Отметим, что задачи (1.5), (1.6) допускают двойственную постановку: минимизация объема (веса) конструкции при ограничениях на величины функционалов (1.5) или (1.6) и двух последних ограничений (1.4). Так как решение прямой задачи позволяет получить решение двойственной [7], то остановимся лишь на исходных прямых задачах (1.5) и (1.6).

2. Вычисление вариаций функционалов. Рассмотрим собственные функции и отвечающие им собственные значения краевой задачи (1.3) на допустимых распределениях толщин $h(x)$, удовлетворяющих условиям (1.4):

$$A(h)=z_j(x)=\lambda_j h(x)z_j(x) \tag{2.1}$$

В силу сделанных предположений система функций $z_j(x)$ полна в энергетическом пространстве, порожденном оператором A, и может быть выбрана ортогональной в следующем смысле [1] (δ_{ij} — символ Кронекера):

$$\int\limits_D h(x)z_j(x)z_i(x)\,dx=\delta_{ij} \tag{2.2}$$

Собственные числа $\lambda_j>0$ ($j=1, 2, \ldots$) и образуют монотонно возрастающую последовательность.

Дадим приращение функции $h(x)$ в виде $\varepsilon\delta h(x)$, где ε — достаточно малое число. Из-за ограничений (1.4) функция $\delta h(x)$ не является произвольной при допустимом h. Найдем вариацию $\delta z(x)$ функции $z(x)$, являющейся решением задачи (1.1), (1.3).

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$A_1(h, \delta h)=d(A(h+\varepsilon\delta h)/d\varepsilon)\,|_{\varepsilon=0}$$

Функция $\delta z(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1), записанному в вариациях с однородными краевыми условиями (1.3):

$$(A(h)-\omega^2 h)\delta z=-(A_1(h, \delta h)-\omega^2\delta h)z(x)$$

Будем искать δz в виде ряда по собственным функциям задачи (2.1), удовлетворяющих условию (1.3): $\delta z=c_1z_1(x)+c_2z_2(x)+\ldots$ ($c_i=\mathrm{const}$). Подставляя δz в полученное уравнение и скалярно умножая его последовательно на собственные функции $z_i(x)$ ($i=1,2,\ldots$), получим выражение для коэффициентов $c_i=-l_i((A_1(h, \delta h)z, z_i)-\omega^2(\delta hz, z_i))$, $l_i=(\lambda_i-\omega^2)^{-1}$. С другой стороны, функция $z(x)$ представляется в виде ряда по собственным функциям вида

$$z(x)=\sum_{j=1}^{\infty} l_jp_jz_j(x), \qquad p_j=(p(x), z_j(x)) \tag{2.3}$$

Так как оператор $A_1(h, \delta h)$ самосопряженный, то можно записать

$$(A_1(h, \delta h)z_j, z_i)=\int\limits_D g_h(z_i, z_j)\,\delta h\,dx$$

Последнее равенство служит определением формы $g_h(z_i, z_j)$. Отметим, что форма $g_h(z_i, z_j)$ симметричная, т. е. $g_h(z_i, z_j)=g_h(z_j, z_i)$.

Например, в случае пластины имеем

$$g_h(z_i, z_j)=\frac{Eh^2}{4(1-\mu^2)\rho}\left[\frac{\partial^2 z_i}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 z_j}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 z_j}{\partial x_2^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 z_i}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 z_j}{\partial x_2^2}+\mu\frac{\partial^2 z_j}{\partial x_1^2}\right)+2(1-\mu)\frac{\partial^2 z_i}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 z_j}{\partial x_1\partial x_2}\right] \tag{2.4}$$

Учтем вид коэффициентов c_i и равенство (2.3); получим, что приращение функции $z(x)$ при варьировании распределений толщин может быть записано в виде линейного функционала от $\delta h(x)$:

$$\delta z(x)=-\sum_{i,j=1}^{\infty} l_il_jp_ip_jz_i(x)\int\limits_D (g_h(z_i, z_j)-\omega^2z_iz_j)\,\delta h\,dx$$

Используем последнее представление δz. Получим формулу для вариации функционала (1.5) (коэффициенты p_i определены в (2.3), $l_i=(\lambda_i-\omega^2)^{-1}$):

$$\delta U(h,\delta h)=\int\limits_D (A(h)z)\,\delta z\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_D (A_1(h,\delta h)z)\,z dx=$$

$$=-\sum_{i,j=1}^{\infty} l_i^2 l_j p_i p_j \int\limits_D \left(\frac{1}{2}(\lambda_i+\omega^2)\,g_h(z_i,z_j)-\lambda_i\omega^2 z_i z_j\right)\delta h\,dx \qquad (2.5)$$

Аналогичная формула имеет место для функционала (1.6):

$$\delta T(h,\delta h)=\omega^2\int\limits_D hz\,\delta z\,dx+\frac{\omega^2}{2}\int\limits_D z^2\delta h\,dx=$$

$$=-\omega^2\sum_{i,j=1}^{\infty} l_i^2 l_j p_i p_j \int\limits_D \left(g_h(z_i,z_j)-\frac{1}{2}(\lambda_i+\omega^2)\,z_i z_j\right)\delta h\,dx$$

Структура формул (2.5), (2.6) сохраняется и в дискретном случае, когда A — матрица с элементами, зависящими от независимых переменных (жесткостей элементов). При этом скалярное произведение в $L_2(D)$ переходит в скалярное произведение векторов.

3. Асимптотический анализ. Формулы (2.5) и (2.6) позволяют выделить главную часть вариации функционалов (1.5) и (1.6) при различных значениях частоты ω вынужденных колебаний.

Положим $\theta_j^2=\lambda_j/\omega^2$ и введем величину $\alpha_i^2=|\theta_i^2-1|$. Пусть частота ω вынужденных колебаний такова, что для некоторого i выполняется неравенство $|\lambda_i-\omega^2|\ll\omega^2$. Тогда для данного номера i величину α_i^2 можно считать малым параметром.

Умножим формулу (2.6) на α_i^6 и выделим главную часть вариации функционалов (1.5) и (1.6), обозначив ее через $\delta U_1(h,\delta h)$ и $\delta T_1(h,\delta h)$ соответственно и пренебрегая членами порядка α_i^2. Имеем

$$\delta U_1(h,\delta h)=\delta T_1(h,\delta h)=\mp\omega^{-4}p_i^2\int\limits_D (g_h(z_i,z_j)-\lambda_i z_i^2)\,\delta h\,dx \qquad (3.1)$$

Здесь знак минус соответствует случаю $1-\theta_i^2>0$, а знак плюс — случаю $1-\theta_i^2<0$.

Покажем, что формула (3.1) отличается от формулы, задающей вариацию i-го собственного значения задачи (2.1), лишь числовым множителем. Запишем уравнение (2.1) в вариациях

$$(A(h)-\lambda_i h)\,\delta z_i=-(A_1(h,\delta h)-\lambda_i\delta h)\,z_i+\delta\lambda_i h z_i$$

Представим δz_i в виде ряда $\sum d_k z_k(x)$ $(k=1,2,\ldots)$ с коэффициентами d_k. Для определения коэффициентов d_k подставим ряд для δz_i в последнее выражение и умножим его последовательно и скалярно на собственные функции $z_1, z_2,\ldots$ В силу альтернативы Фредгольма [8] все коэффициенты d_k, кроме $k=i$, определяются однозначно. При $k=i$ условие разрешимости дает формулу для вариации i-го собственного значения

$$\delta\lambda_i=\int\limits_D (g_h(z_i,z_j)-\lambda_i z_i^2)\,\delta h\,dx$$

которая совпадает с интегралом, стоящим в (3.1).

Покажем, что если $\alpha_i\to 0$, то решение задачи минимизации функционала (1.5) или (1.6) при ограничениях-неравенствах (1.4) стремится к решению задачи на экстремум i-го собственного значения задачи (2.1) при тех же ограничениях (1.4). Отметим, что решение последней задачи во многих случаях хорошо изучено [2, 9, 10—12]. Пусть, например, $\omega^2<\lambda_i$, т. е. $\theta_i^2>1$. Необходимое условие максимума i-го собственного значения при условиях (1.4) имеет вид

$$\delta\lambda_i(h, \delta h)\leqslant 0, \quad \delta h\in Q_h \tag{3.2}$$

Здесь через Q_h обозначено множество всех допустимых вариаций при $h=h(x)$, т. е. множество таких функций $\delta h(x)$, при которых функция $h+\delta h$ удовлетворяет ограничениям (1.4).

Из (3.1) следует равенство $\delta U(h, \delta h)=\delta U_1(h, \delta h)+\alpha_i^2 W(h, \delta h)$, где $W(h, \delta h)$ — ограниченный функционал при $\alpha_i\to 0$. Так как $\delta U_1(h, \delta h)=-k\delta\lambda_i(h, \delta h)$, $k=\omega^4 p_i^{-2}$, учитывая (3.2), получим $\delta U(h,\delta h)\geqslant\alpha_i^2 W(h,\delta h)$, $\delta h\in Q_h$. В силу произвольности малой величины α_i отсюда следует, что выполняется необходимое условие минимума для функционала $U(h)$ на множестве (1.4) $\delta U(h, \delta h)\geqslant 0$, $\delta h\in Q_h$. Что и требовалось доказать.

Пусть максимальное значение функционала $\lambda_i(h)$ достигается при некотором допустимом $h(x)$. Тогда при указанных значениях частоты ω, для которых $1-\theta_i^2>0$, распределение толщин $h(x)$ будет доставлять функционалу (1.5) значение, близкое к минимальному при $\alpha_i\to 0$. Если частота ω такова, что $1-\theta_i^2<0$, то минимальное значение функционала $\lambda_i(h)$ на допустимом множестве (1.4) доставляет функционалу (1.5) значение, близкое к минимальному, когда $\alpha_i\to 0$.

Следовательно, если частота вынужденных гармонических колебаний близка к одной из собственных частот свободных колебаний конструкции $\omega_i=\lambda_i^{1/2}$, оставаясь меньшей, чем величина ω_i, то оптимальное, в указанном смысле, распределение толщин конструкции стремится к распределению, при котором частота свободных колебаний ω_i достигает максимального значения. Если же $\omega>\omega_i$, оставаясь близкой к ω_i, то оптимальное распределение толщин, доставляющее минимум функционалу (1.5), стремится к распределению, при котором частота свободных колебаний ω_i достигает своего минимума.

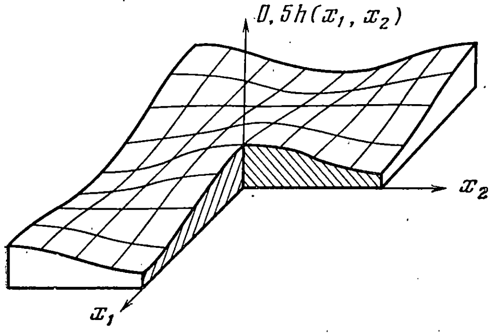
Последнее означает, что оптимальное распределение жесткостей конструкции при вынужденных гармонических колебаниях в значительной степени определяется величиной частоты вынужденных колебаний. В частности, не существует оптимального распределения жесткостей для интервалов частот вынужденных колебаний, содержащих хотя бы одну собственную частоту конструкции.

Точно такой же вывод можно сделать и в случае функционала (1.6), проводя анализ формулы (2.6). Для этого случая аналогичный результат на основании качественных рассуждений получен ранее в [13].

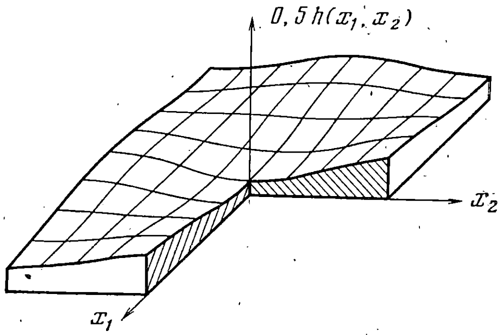
Если частота вынужденных колебаний находится в интервале между двумя последовательными частотами свободных колебаний $\omega^2=\lambda_i+\beta(\lambda_{i+1}-\lambda_i)$, $0<\beta<1$, то, учитывая, что собственные значения уравнения (2.1) монотонно возрастают, можно полагать, что $|\lambda_j-\omega^2|\gg 1$ при $j<i$ и $j>i+1$, и пренебречь в формуле (2.6) членами l_j при указанных j. Главная часть вариации функционала (1.5) будет содержать три члена, из которых можно выделить группу, дающую выражение $q\delta\lambda_i-\delta\lambda_{i+1}$ с постоянной $q=\beta p_{i+1}^2 p_i^{-2}(1-\beta)^{-2}$. Поэтому минимум функционала (1.5) достигается на распределениях толщин, близких тем, при которых функционал $\lambda_{i+1}-q\lambda_i$ становится максимальным, т. е. когда взвешенная разность между двумя последовательными значениями частот собственных колебаний, между которыми находится частота вынужденных колебаний, достигает максимума.

4. Пример. Рассмотрим свободно опертую прямоугольную пластинку $0\leqslant x_1\leqslant c$, $0\leqslant x_2\leqslant d$ переменной толщины, удовлетворяющей условиям (1.4). Уравнение состояния вынужденных установившихся гармонических колебаний имеет вид (1.1), где оператор A задан формулой (1.2), а форма g_h — равенством (2.4).

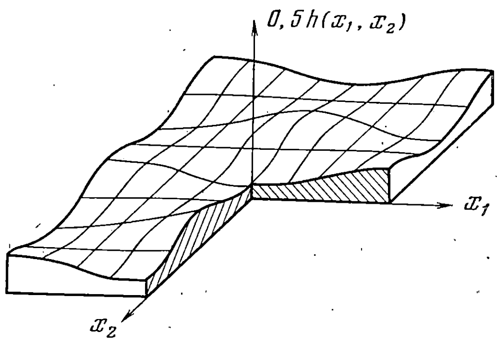
Для отыскания оптимальных форм пластин применим метод, основанный на предположениях относительной малости толщины варьированного слоя [11, 12]. Для этого представим функцию $h(x)$ в виде $h(x)=h_0+H(x)$, где $h_0=\mathrm{const}$, $a<h_0<b$. Не умаляя общности, полагаем $h_0=1$, что всегда можно добиться, если ввести новую безразмерную функцию $h'(x)=h_0^{-1}h(x)$. Второе ограничение в (1.4) примет вид



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

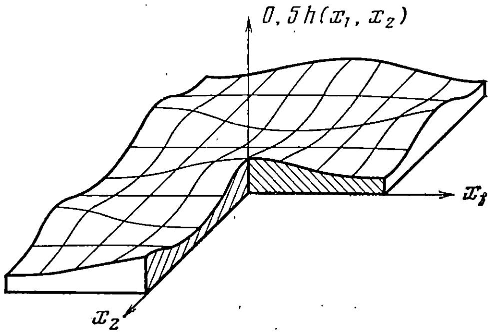
$ah_0^{-1}-1\leqslant H(x)h_0^{-1}\leqslant bh_0^{-1}-1$. Предположим, что $(b-a)2h_0^{-1}=\varepsilon<1$, тогда $|H(x)h_0^{-1}|\leqslant\leqslant\varepsilon$ и можно обозначить $H(x)h_0^{-1}=\varepsilon h_1(x)$, где функция $h_1(x)$ удовлетворяет ограничению $|h_1(x)|\leqslant 1$. В итоге $h'(x)=1+\varepsilon h_1(x)$, $0<\varepsilon<1$.

Уравнение (1.1) и (2.1) запишем в новых безразмерных переменных $x_1'=x_1(cd)^{-1/2}$, $x_2'=x_2(cd)^{-1/2}$, $p'(x)=\gamma p(x)$, $\lambda'=\gamma\lambda$, $\omega'=\omega\gamma^{1/2}$, $\gamma=12\rho(1-\mu^2)E^{-1}h_0^{-2}cd$. Первое ограничение в (1.4) на суммарный объем (вес) пластины перейдет в условие

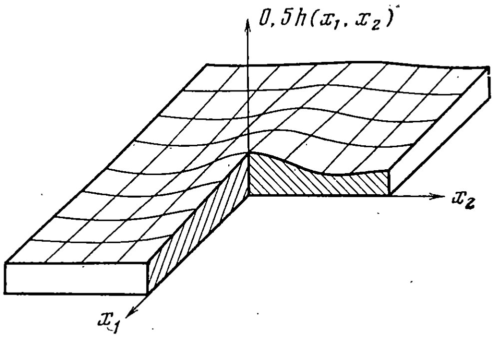
$$\int_0^{k^{-1}}\int_0^{k} h_1(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 \leqslant 0, \qquad k=c^{1/2}d^{-1/2}$$

Третье ограничение (1.4) на рост производных допустимых распределений толщин сохранит свой вид с заменой постоянной на $C'=Ch_0\varepsilon$. Далее штрихи у новых переменных будем опускать.

Положим в полученных в п. 2 формулах для вариации функционалов (1.5) и (1.6) $h(x)=1$, $\delta h=h_1(x)$, $z_{mn}(x)=\sin(mk\pi x_1)\sin(nk^{-1}\pi x_2)$. В итоге имеем вариаци-



Фиг. 4



Фиг. 5

онную задачу, которая, как показано в [11], допускает аналитическое решение. Полученные таким образом решения отличаются от оптимальных на величины порядка ε^2 по оптимальному функционалу.

Пусть распределение амплитуд вынуждающих сил, действующих по гармоническому закону на квадратную свободно опертую пластину, задано законом $p(x_1, x_2)=1$, если $1/2\leqslant x_1\leqslant 1$ и $p(x_1, x_2)=0$, если $0\leqslant x_1<1/2$, $0\leqslant x_2\leqslant 1$. Имеем $p_{11}=(p, z_{11})=-2/\pi^2$, $p_{21}=(p, z_{21})=-2/\pi^2$, $p_{12}=(p, z_{12})=0$. Первое (наименьшее) собственное значение $\lambda_{11}=4\pi^4$, следующее $\lambda_{21}=25\pi^4$.

На фиг. 1–5 представлены оптимальные распределения толщин квадратной свободно опертой пластины при различных значениях частоты вынужденных гармонических колебаний, изменяющихся от $0{,}8\,\lambda_{11}$ до $1{,}2\,\lambda_{21}$.

Фиг. 1 соответствует случаю $\omega^2=0{,}8\,\lambda_{11}$. Полученное распределение толщин качественно совпадает с распределением, соответствующим максимальному значению первой частоты собственных колебаний [9]. Подобный закон распределений толщин наблюдается в задаче оптимизации жесткости (минимизации максимального прогиба) и в задаче оптимизации прочности [14].

Таким образом, в этом случае форма пластины близка к форме пластины, имеющей максимальную жесткость (прочность).

Фиг. 2 соответствует случаю $\omega^2=1{,}2\,\lambda_{11}$. В этом случае форма пластины полярна по отношению к предыдущему случаю. Выпуклости фиг. 1 сменяются вогнутостями (впадинами) на фиг. 2 и наоборот. Отсюда следует, что в этом случае форма пластины соответствует случаю минимальной жесткости (прочности). Последнее иллюстрирует вывод п. 3 о зависимости форм распределения пластин от того, с какой стороны частота вынужденных колебаний подходит к собственной частоте свободных колебаний.

На фиг. 3 показаны оптимальные распределения толщин для случая $\omega^2=0{,}9\,\lambda_{21}$, а на фиг. 4 – распределение $\omega^2=1{,}2\,\lambda_{21}$. Так же как и в предыдущем случае, формы распределений толщин оказываются полярными.

На фиг. 5 дано оптимальное распределение толщин для случая $\omega^2=0{,}5\,\lambda_{21}=12{,}5\,\pi^4$, т. е. случай, когда частота вынужденных колебаний находится на приблизительно равном расстоянии от первой и второй частоты собственных колебаний. Сравнивая фиг. 2 и 3, можно заключить, что распределение толщин, представленное на фиг. 5, содержит как элементы фиг. 2, соответствующей минимуму первой собственной частоты, так и элементы фиг. 3, соответствующей максимуму второй собственной частоты. При этом первоначальная величина расстояния между первой и второй частотами свободных колебаний, равная $21\,\pi^4$, увеличивается при $h_0=1$ и $\varepsilon=0{,}2$ на величину $4{,}4\,\pi^4$, что составляет 20,9% первоначального значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
2. *Литвинов В. Г.* Задача оптимального управления собственной частотой пластины переменной толщины.– Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1979, т. 19, № 4, с. 866–877.
3. *Комков В.* Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975. 158 с.
4. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
5. *Feng T. T., Arora J. S., Haug E. J.* Optimal design under dynamic loads.– Internat. J. Numer. Meth. Engng., 1977, v. 11, No. 1, p. 39–52.
6. *Хог Э., Арора Я.* Прикладное оптимальное проектирование. М.: Мир, 1983. 479 с.
7. *Seyranian A. P.* Homogeneous functionals and structural optimization problems.– Internat. J. Solids Struct., 1979, v. 15, No. 10, p. 749–759.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
9. *Троицкий В. А., Хвацев А. А.* Оптимизация собственной частоты прямоугольной пластины с опертыми краями.– В кн.: Прикладная математика. Тула: Изд-е Тульск. политехн. ин-та, 1977, с. 71–78.
10. *Троицкий В. А., Петухов Л. В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
11. *Братусь А. С., Картвелишвили В. М.* Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций.– Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 6, с. 119–139.
12. *Братусь А. С.* Проектирование круговых цилиндрических оболочек минимального веса с фиксированными частотами свободных колебаний.– ПММ, 1983, т. 47, вып. 5, с. 805–814.
13. *Волкова И. М., Зевин А. А.* Об оптимизации упругих систем по амплитудам вынужденных колебаний.– В кн.: Прочность и надежность элементов конструкций. Киев: Наук. думка, 1982, с. 32–38.
14. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XI.1983