

УДК 539.3:534.1

**АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ
И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ,
РАССЧИТЫВАЕМЫХ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ**

БАНИЧУК Н. В., ИВАНОВА С. Ю., ШАРАНЮК А. В.

Рассматривается задача оптимизации составной тонкостенной конструкции, для описания поведения которой используется ее конечно-элементное представление. В качестве переменных проектирования принимаются массовые и жесткостные характеристики элементов конструкции. Минимизируется величина максимального прогиба, которая служит мерой жесткости конструкции. Исследуются вопросы чувствительности максимальных прогибов при заданных динамических воздействиях к вариациям массовых и жесткостных характеристик. Формулируются задачи Коши для сопряженных переменных и выводятся основные соотношения анализа чувствительности. Приводятся результаты численного решения задачи оптимизации параметров тонкостенной пластинчатой конструкции, обтекаемой потоком идеального газа и подверженной динамическим воздействиям.

1. При проектировании конструкции, рассчитываемой на внешние динамические воздействия, интерес представляет исследование влияния массовых, жесткостных и геометрических параметров конструкции на величину ее динамической реакции. В качестве меры динамической реакции можно рассматривать величину максимального перемещения и оценивать жесткость конструкции по величине этого функционала. Положение точки на конструкции и значения моментов времени, для которых достигается максимум перемещения, заранее неизвестны. Это осложняет проведение расчетов, связанных с отысканием оптимальных распределений массовых и жесткостных характеристик. Отметим также, что величина максимального прогиба является «естественной» мерой жесткости конструкции. Из равенства нулю этого функционала, очевидно, следует отсутствие в конструкции перемещений и деформаций, а также обращение в нуль таких интегральных характеристик конструкции, как энергия ее упругих деформаций и податливость. Величина максимального перемещения рассматривалась в качестве оптимизируемого критерия в ряде работ по оптимальному проектированию [1, 2]. Однако ранее соответствующие задачи решались в основном в предположении о статическом нагружении конструкции. Разработка методов решения задач оптимального проектирования конструкций, рассчитываемых на внешние нестационарные воздействия, начата сравнительно недавно [3–6].

В общем случае нестационарного нагружения оценка влияния параметров проектирования на величины функционалов, рассматриваемых при проектировании, сопряжена с необходимостью расчета поведения конструкции на всем отрезке $[0, T]$ ее функционирования. Из-за отсутствия явной зависимости величины динамической реакции от параметров проектирования прямой анализ чувствительности сводится к сложным вычислениям и перебору большого числа вариантов. Более эффективным оказывается подход, основанный на введении сопряженных переменных и соответствующих систем уравнений для их определения. Отметим два способа реализации указанного подхода. Первый [1, 3, 6] заключается в построе-

нии формул анализа чувствительности и необходимых условий оптимальности для системы с распределенными параметрами, отвечающей континуальному описанию конструкции (время и пространственные переменные не дискретизованы). При этом отыскание функций состояния и сопряженных переменных сводится к решению начально-краевых задач для уравнений в частных производных.

Другой способ [1, 4], развиваемый в публикуемой работе, основывается на введении сопряженных переменных и получении формул анализа чувствительности для дискретного по пространственным переменным описания конструкции. Функции состояния и сопряженные переменные в этом случае зависят только от времени, а их определение сводится к решению задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим составную тонкостенную конструкцию, к которой в процессе эксплуатации прикладываются динамические воздействия. Для описания поведения конструкции и определения ее отклика на внешние воздействия воспользуемся конечно-элементной расчетной моделью. Такой переход от исходного континуального представления конструкции к конечномерному оправдан тем, что на практике при расчете проектируемых сложных механических систем и конструкций используются дискретные модели. Пусть после дискретизации конструкция характеризуется вектором обобщенных перемещений $u = u(t)$ (t — время). Поведение конструкции во времени описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Au'' + Bu' + Cu = Q \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$u(0) = a, \quad u'(0) = b \quad (1.2)$$

где a, b — заданные векторы, A, C — матрицы, характеризующие инерционные и жесткостные свойства конструкции, B — диссипативная матрица, $Q = Q(t)$ — вектор-функция внешних воздействий на конструкцию; точка в индексе означает операцию дифференцирования по времени.

Линейность системы дифференциальных уравнений (1.1) является следствием принимаемых предположений о малости деформаций и линейно-упругом поведении материала. Физический смысл вектора обобщенных перемещений, а также структура матриц A, B, C , как и вектор-функция $Q(t)$, зависят в каждом конкретном случае от принятого способа дискретизации (по поводу моделирования конструкций системами вида (1.1) см., например, [7]).

Обозначим через $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ вектор параметров проектирования, в качестве которых выбираются массовые, жесткостные и геометрические характеристики конструкции. Будем считать зависимость элементов матриц A, B и C от параметров проектирования непрерывно дифференцируемыми по h_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Для оценки жесткости наряду с обобщенными перемещениями требуется рассматривать истинные перемещения точек P_j конструкции. Введем матрицу перехода D от обобщенных перемещений к истинным

$$U = Du \quad (1.3)$$

где U — вектор истинных перемещений размерности m — для точки P_j имеет вид (D^j — j -я вектор-строка матрицы перехода D):

$$U^j = (0, 0, \dots, D^j u, \dots, 0) \quad (1.4)$$

Обозначим через J^{jk} квадрат перемещения в точке P_j в момент времени $t = t_k$ ($0 < t_k \leq T$):

$$J^{jk} = (U^j U^k)_{t=t_k} \quad (1.5)$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам суммирование не производится.

Зафиксируем точку P_j и момент времени $t=t_k$ и исследуем зависимость величины J^{jk} от малых вариаций параметров h_i . Для этого проварьируем систему уравнений (1.1), начальные условия (1.2) и выражение (1.5) с учетом (1.3), (1.4). Имеем

$$\delta J^{jk} = 2(D^j \mathbf{u}(t_k)) (D^j \delta \mathbf{u}(t_k)) \quad (1.6)$$

$$A \delta \mathbf{u}'' + B \delta \mathbf{u}' + C \delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial h_i} \mathbf{u}'' + \frac{\partial B}{\partial h_i} \mathbf{u}' + \frac{\partial C}{\partial h_i} \mathbf{u} \right) \delta h_i = 0 \quad (1.7)$$

$$\delta \mathbf{u}(0) = 0, \quad \delta \mathbf{u}'(0) = 0 \quad (1.8)$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию сопряженных переменных $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Домножим левую часть уравнения (1.7) на сопряженную переменную и проинтегрируем произведение от $t=0$ до $t=t_k$. Выполним далее интегрирование по частям и учтем условия (1.8), а затем представим выражение для вариации δJ^{jk} в виде

$$\delta J^{jk} = \int_0^{t_k} \left\{ \delta \mathbf{u} [A^* \mathbf{v}'' - B^* \mathbf{v}' + C^* \mathbf{v}] + \mathbf{v} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial h_i} \mathbf{u}'' + \frac{\partial B}{\partial h_i} \mathbf{u}' + \frac{\partial C}{\partial h_i} \mathbf{u} \right) \delta h_i \right\} dt + (\mathbf{v} A \delta \mathbf{u}')|_{t=t_k} + [(\mathbf{v} B - \mathbf{v}' A + 2(D^j \mathbf{u}) D^j) \delta \mathbf{u}]|_{t=t_k} \quad (1.9)$$

Звездочкой обозначается операция транспонирования. Определим сопряженную переменную $\mathbf{v}(t)$ как решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A^* \mathbf{v}'' - B^* \mathbf{v}' + C^* \mathbf{v} = 0 \quad (1.10)$$

с начальными условиями при $t=t_k$:

$$\mathbf{v}(t_k) = 0, \quad A^* \mathbf{v}'(t_k) = 2(D^j \mathbf{u}(t_k)) D^j \quad (1.11)$$

В задаче Коши (1.10), (1.11) при определении сопряженной переменной интегрирование уравнений проводится в обратном направлении по времени от $t=t_k$ до $t=0$. При фиксированных параметрах h_1, \dots, h_n связь задачи (1.10), (1.11) для \mathbf{v} с задачей Коши (1.1), (1.2), определяющей динамическое поведение конструкции, осуществляется посредством второго условия (1.11).

Определение сопряженной переменной согласно (1.10), (1.11) позволяет исключить из (1.9) выражения, содержащие вариации функций состояния, и получить зависимость δJ^{jk} от δh_i ($i=1, \dots, n$):

$$\delta J^{jk} = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{t_k} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A}{\partial h_i} \mathbf{u}'' + \frac{\partial B}{\partial h_i} \mathbf{u}' + \frac{\partial C}{\partial h_i} \mathbf{u} \right) dt \right\} \delta h_i \quad (1.12)$$

Соотношение (1.12) позволяет получать выражения для улучшающих вариаций параметров проектирования, обеспечивающих монотонное уменьшение рассматриваемой функциональной характеристики. Однако формула (1.12) получена в предположении, что варьируемый функционал определен в заданный момент времени t_k и представляет собой перемещение фиксированной точки. Если максимальный прогиб в конструкции достигается в некоторой точке P_j в момент времени t_k , то соотношение (1.12) позволяет построить улучшающую вариацию для величины максимального прогиба.

2. Рассмотрим задачу оптимизации, заключающуюся в определении значений параметров проектирования h_i ($i=1, 2, \dots, n$), при которых достигается минимум функционала квадрата максимального прогиба

$$J = \max_{j,k} J^{jk} \rightarrow \min_{h_i} \quad (2.1)$$

при условиях $f_l(h) \leq C_l$ ($l=1, 2, \dots, m$), где f_l — заданные функции, C_l — заданные константы. Ограничения свеем к условиям типа равенств при помощи введения вспомогательных величин μ_l^2 :

$$f_l(h) + \mu_l^2 - C_l = 0 \quad (2.2)$$

Задача условной оптимизации (2.1), (2.2) решается итерационным методом. Сначала на заданном отрезке времени $[0, T]$ ищется решение системы уравнений (1.4) при заданных параметрах проектирования h_i . По формуле (1.3) вычисляются истинные перемещения точек конструкции и их квадраты (1.5). Из полученного конечного набора значений J^h выбирается максимальное. Фиксируется номер точки j и момент времени t_n , для которых был достигнут максимум. Затем интегрируется система уравнений для сопряженных переменных (1.10) с начальными условиями (1.11). По формулам для улучшающих вариаций параметров проектирования, полученных методом проектирования градиентов на основе (1.12), (2.2) (см. [8]), вычисляются δh_i . После определения новых значений параметров проектирования h_i осуществляется следующая итерация. Итерации завершаются, если контролируемая невязка в выполнении необходимых условий оптимальности оказывается достаточно малой.

В процессе варьирования максимальный прогиб может достигаться во многих точках конструкции в разные моменты времени. Поэтому приведенные формулы анализа чувствительности должны быть обобщены с учетом возможности появления кратных максимумов функционала жесткости. В этом случае $J = J^{\alpha\beta}$ представляет собой максимальное значение прогибов, достигаемое при заданных значениях параметров проектирования в моменты времени t_β ($\beta=1, 2, \dots, s$) в точках $P^{\alpha\beta}$. Для каждого фиксированного β индекс α , нумерующий точку реализации максимального прогиба, принимает значения $\alpha=1, 2, \dots, r_\beta$. Общее количество точек, в которых в разные моменты времени достигается максимум прогиба, равно $\sum_{\beta=1}^s r_\beta = r$ ($\beta=1, \dots, s$). Заметим, что при сделанных предположениях функционал жесткости оказывается в общем случае недифференцируемым. Поэтому при решении задачи оптимизации для построения улучшающей вариации следует дифференцировать функционал по направлениям [9, 10] и обобщить соотношения, определяющие сопряженные переменные. В рассмотрение вводятся r сопряженных вектор-функций $v^{\alpha\beta}$, и для их отыскания формулируется r задач Коши

$$A^* v^{\alpha\beta} - B^* v^{\alpha\beta} + C^* v^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.3)$$

$$v^{\alpha\beta}(t_\beta) = 0, \quad A^* v^{\alpha\beta}(t_\beta) = 2(D^{\alpha\beta} u(t_\beta)) D^{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

В этом случае для вариации функционала жесткости справедлива формула

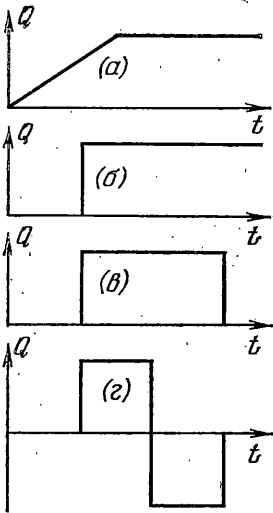
$$\delta J = \sum_{i=1}^a \left\{ \max_{\alpha, \beta} \int_0^{t_\beta} v^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial A}{\partial h_i} u'' + \frac{\partial B}{\partial h_i} u' + \frac{\partial C}{\partial h_i} u \right) dt \right\} \delta h_i \quad (2.5)$$

Наличие «кратных» максимумов функционала прогиба усложняет процедуру решения задачи. Так, после выделения множества точек $P^{\alpha\beta}$, в которых достигается максимум, необходимо решение r задач (2.3), (2.4) для определения сопряженных переменных и выражение для улучшающей вариации строится по формуле

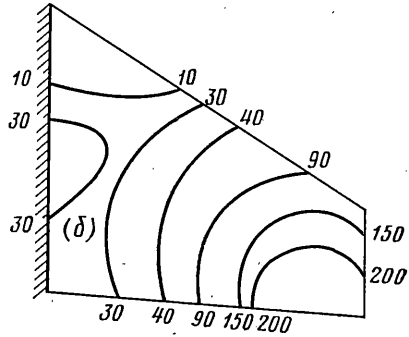
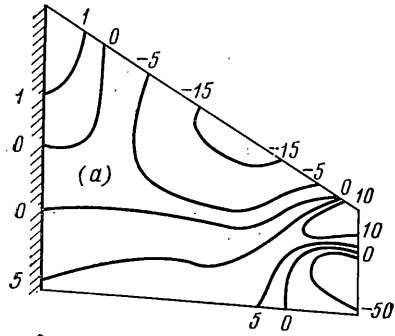
$$\delta J = \sum_{i=1}^a \left\{ \sum_{\alpha, \beta} \lambda^{\alpha\beta} \left[\int_0^{t_\beta} v^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial A}{\partial h_i} u'' + \frac{\partial B}{\partial h_i} u' + \frac{\partial C}{\partial h_i} u \right) dt \right] \right\} \delta h_i \quad (2.6)$$

где $\lambda^{\alpha\beta}$ — вещественные числа, удовлетворяющие условиям

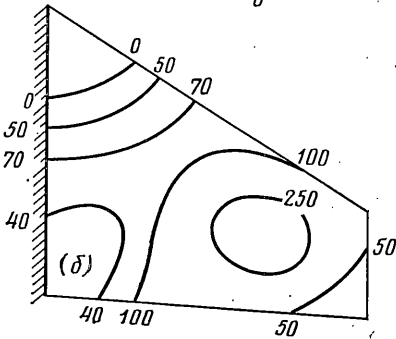
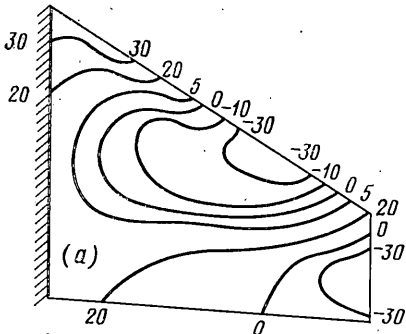
$$\lambda^{\alpha\beta} \geq 0, \quad \sum_{\alpha, \beta} \lambda^{\alpha\beta} = 1 \quad (2.7)$$



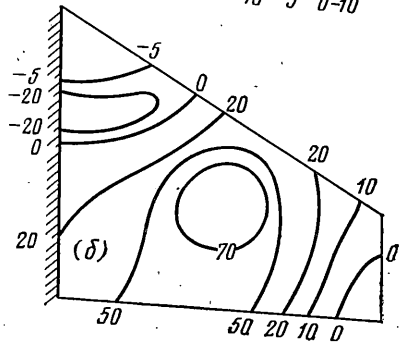
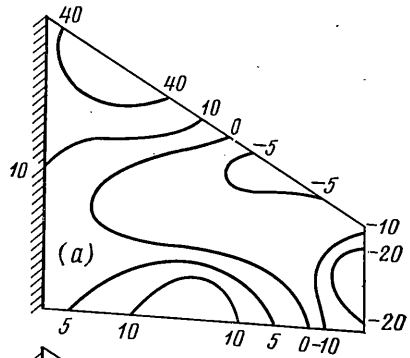
Фиг. 1



Фиг. 2

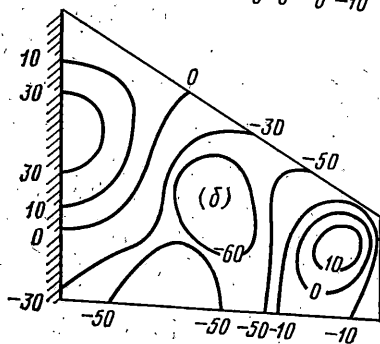
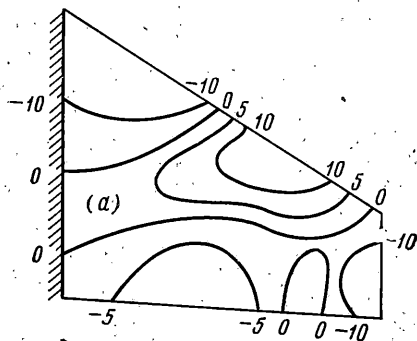


Фиг. 3

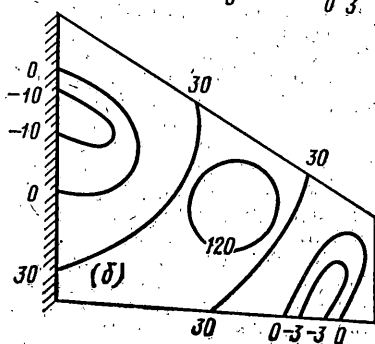
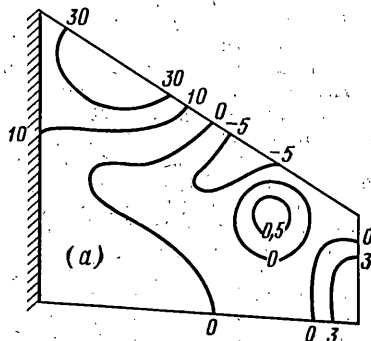


Фиг. 4

Следует иметь в виду, что максимум квадрата прогиба конструкции может достигаться на целом отрезке времени $[t_1, t_2]$ ($0 < t_1 < t_2 \leq T$). Для вычисления вариации функционала в этом случае необходимо решать сопряженную задачу (1.10), зависящую от $t_p \in [t_1, t_2]$ как от непрерывно изме-



Фиг. 5



Фиг. 6

няющегося параметра, и определить сопряженную функцию как функцию двух переменных $v=v(t, t_p)$. В выражении для вариации функционала (2.5) максимум должен браться по t_p [9]. Однако при проведении расчетов с дискретизацией временной переменной используются формулы (2.6), (2.7).

В качестве примера приведем решение задачи оптимизации жесткости тонкостенной пластинчатой конструкции, обтекаемой потоком идеального газа и подверженной динамическим воздействиям типа порыва. Трапециевидная пластинка разбита на конечные элементы кусочно-постоянной толщины. На пластинке расположены сосредоточенные массы. Пластинка жестко закреплена на одной из сторон. После дискретизации поведение конструкции в потоке газа описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A u'' + (B + B_a) u' + (C + C_a) u = Q, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0 \quad (2.8)$$

где A — матрица инерции, B_a , C_a — аэродинамические матрицы, B — матрица демпфирования, C — матрица жесткости конструкции. Для ускорения вычислений преобразуем систему (2.8) к каноническому виду. Для этого рассмотрим задачу о свободных колебаниях $(C - \omega^2 A)w = 0$, где ω — частота колебаний, w — собственный вектор. При помощи замены переменных $u = Wu'$ (где W — матрица собственных векторов) система (2.8) приводится к виду

$$A' u''' + B' u'' + C' u' = Q' \quad (2.9)$$

$$A' = W^* A W, \quad B' = W^* (B + B_a) W, \quad C' = W^* (C + C_a) W$$

Входящие в (2.9) матрицы A' и $W^* C W$ являются диагональными. Параметрами проектирования выбраны массы элементов конструкции, на которые наложены следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^n h_i = M, \quad a_i \leq h_i \leq b_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.10)$$

Первое из условий (2.10) означает неизменность полной массы конструкции, второе — ограничения на допустимые значения параметров проектирования.

Расчеты проводились для четырех случаев динамического нагружения пластинки. Изменение нагрузок со временем для них показано на фиг. 1, а — г. На фиг. 2—6 при помощи изолиний представлены распределения безразмерных градиентов для двух типов переменных проектирования — сосредоточенных масс (а) и толщины пластинки (б). Фиг. 2—4 соответствуют первым трем вариантам нагружения (фиг. 1, а — г). Распределения градиентов оптимизируемого функционала для сосредоточенных масс при данных нагрузках качественно похожи. Характерной особенностью этих распределений является наличие довольно большой области отрицательных значений градиентов в средней части пластинки и в нижнем правом углу. На фиг. 4, а области отрицательных градиентов сливаются в одну, т. е. в трех рассмотренных случаях минимизация прогиба конструкции достигается за счет уменьшения величин сосредоточенных масс в центре и в нижнем правом углу пластинки. В левом верхнем углу в процессе оптимизации происходит увеличение масс. Если в качестве переменных проектирования выбраны толщины пластинки, то область отрицательных значений градиентов функционала, отсутствовавшая на фиг. 2, б, появляется в левом верхнем углу при втором варианте нагружения (фиг. 3, б) и заметно увеличивается на фиг. 4, б. Область максимальных положительных градиентов смещается, соответственно, из нижнего правого угла (фиг. 2, б) в центральную часть пластинки (фиг. 3, 4, б).

Фиг. 5, 6 относятся к последнему случаю знакопеременной нагрузки (фиг. 1, г). При таком нагружении максимальное перемещение достигается в двух различных точках конструкции в различные моменты времени. Каждому максимуму соответствуют свои распределения градиентов, показанные, соответственно, на фиг. 5, а, б и 6, а, б. Необходимо заметить, что эти распределения качественно совершенно различны и на фиг. 5, 6 имеется соответствие между областями с отрицательными и положительными значениями градиентов.

Характерным обстоятельством, выявленным при проведении расчетов, во всех рассмотренных случаях является увеличение собственных частот свободных колебаний при снижении максимальных динамических прогибов пластинок.

Отметим, что предложенная методика оптимизации позволяет уменьшать функционал качества конструкции. Так, в приведенном примере при выполнении 20—30 итераций функционал качества уменьшался приблизительно на 60—70%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование. М.: Мир, 1983. 479 с.
2. Баничук Н. В. Современные проблемы оптимизации конструкций. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 2, с. 110—124.
3. Arora J. S., Haug E. J. Discussion in Optimum Structural Design and Dynamic Constraints. — J. Structural Div., Proc. ASCE, 1977, v. 103, No. 10, p. 2071—2074.
4. Гринев В. Б., Васильченко В. Ф. Оптимизация балок при неперiodическом нагружении. — В кн.: Динамика и прочность машин. Харьков: Выща школа, 1979, вып. 29, с. 25—30.
5. Yatawaka H. Optimum structural designs for dynamic. — In: New Directions in Optimum Structural Design (eds Atrek E., Gallagher R. H., Ragsdell K. M., Zienkiewicz O. C.). N. Y.: Wiley, 1984, p. 249—268.
6. Баничук Н. В., Иванова С. Ю. Об оптимальном проектировании конструкций при динамических нагрузках. — В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький; Горьк. ун-т, 1984, вып. 26, с. 88—96.
7. Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем./Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
8. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
9. Гирсанов И. В. Лекции по математической теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1970. 118 с.
10. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.X.1984