

УДК 539.3:534.1

СОСТАВНЫЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ МАССЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ

ЕРМОЛАЕВ Н. В., МАЛКОВ В. П., ТАРАСОВ В. Л.

Задачам оптимизации конструкций с учетом собственных частот посвящено много работ. Подробно исследованы задачи для стержней и пластин [1-4]. Менее исследованы задачи для оболочек [5, 6]. В публикуемой работе отыскивается закон распределения толщины вдоль меридиана составной оболочки вращения из условия минимума массы при ограничении на минимальную собственную частоту. Предложен численный подход, основанный на сведении вариационной задачи к задаче нелинейного программирования, для решения которой применяется модифицированный метод проекции градиента.

При определении частот и форм колебаний используется численное интегрирование уравнений линейной теории оболочек с ортогональной прогонкой С. К. Годунова.

1. Рассмотрим осесимметричную конструкцию, состоящую из p последовательно соединенных оболочек вращения. Пусть упругий, изотропный материал i -й оболочки характеризуется модулем упругости $E^{(i)}$, коэффициентом Пуассона $\nu^{(i)}$, плотностью $\rho^{(i)}$, а геометрия ее срединной поверхности — параметрами Ламе $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}$, кривизнами $k_1^{(i)}, k_2^{(i)}$. С каждой оболочкой свяжем свою локальную систему координат.

Если $h^{(i)}(s^{(i)})$ — толщина i -й оболочки как функция меридиональной координаты $s^{(i)}$, то общая масса всей конструкции запишется ($s_0^{(i)}, s_L^{(i)}$ — пределы изменения $s^{(i)}$):

$$M = 2\pi \sum_{i=1}^p \rho^{(i)} \int_{s_0^{(i)}}^{s_L^{(i)}} A_1^{(i)} A_2^{(i)} h^{(i)} ds^{(i)} \quad (1.1)$$

Пусть $\omega(h, m)$ — собственная частота первого тона колебаний оболочки при m волнах в окружном направлении.

Поставим задачу: найти закон распределения толщины $h_*^{(i)}(s^{(i)})$ ($i = \overline{1, p}$), удовлетворяющий условиям

$$\min_m \omega(h, m) \geq \omega_0, \quad h_1^{(i)} \leq h^{(i)} \leq h_2^{(i)} \quad (i = \overline{1, p}) \quad (1.2)$$

при котором масса конструкции M имеет минимальное значение, где ω_0 — заданная частота, $h_1^{(i)}, h_2^{(i)}$ — пределы изменения толщины.

Для численного решения поставленной задачи введем на каждом отрезке $[s_0^{(i)}, s_L^{(i)}]$ $N^{(i)}$ равноотстоящих узлов. Общее число узлов будет $N = \sum N^{(i)} - p + 1$ ($i=1, 2, \dots, p$). Вместо функций $h^{(i)}$ ($i=\overline{1, p}$) будем отыскивать вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ значений толщин в узлах. Приняв распределение толщины между узлами, например, линейным, получим, что масса оболочки будет линейной функцией узловых толщин $C(\mathbf{x}) = \sum c_k x_k$ ($k=1, 2, \dots, N$). Коэффициенты c_k зависят от формы меридиана и от расстояния между узлами.

Как показано в [7, 8], явное ограничение на собственную частоту (1.2) можно заменить системой неявных ограничений на величины частотных определителей

$$g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (i=\overline{1, N_g}) \quad (1.3)$$

Причем частотные определители вычисляются при заданном значении собственной частоты ω_0 , а число N_g волновых чисел должно выбираться таким образом, чтобы выполнение (1.3) гарантировало выполнение (1.2).

В результате дискретизации приходим к задаче нелинейного программирования

$$\min \{C(\mathbf{x}) \mid x_j^- \leq x_j \leq x_j^+ (j=\overline{1, N}), \quad g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (i=\overline{1, N_g})\} \quad (1.4)$$

2. Состояние i -й оболочки вращения при свободных несимметричных колебаниях описывается системой восьми однородных линейных дифференциальных уравнений [9]:

$$d\mathbf{z}^{(i)}/ds^{(i)} = A\mathbf{z}^{(i)}, \quad s^{(i)} \in [s_0^{(i)}, s_L^{(i)}] \quad (i=\overline{1, p}) \quad (2.1)$$

Здесь $z_1^{(i)} = S + 2k_2 H$ — сдвигающее усилие, $z_2^{(i)} = M_{11}$ — изгибающий момент, $z_3^{(i)} = T_{11}$ — продольное усилие, $z_4^{(i)} = Q_{11} + mH/A_2^{(i)}$ — обобщенное поперечное усилие, $z_5^{(i)} = v$ — перемещение в окружном направлении, $z_6^{(i)} = \theta_1$ — угол поворота нормали к срединной поверхности, $z_7^{(i)} = u$ — перемещение в меридиональном направлении, $z_8^{(i)} = w$ — нормальное к срединной поверхности перемещение. Компоненты матрицы A зависят от формы меридиана, толщины оболочки, от собственной частоты, числа волн в окружном направлении m и характеристик материала.

Система (2.1) записана в проекциях на оси локальной системы координат i -й оболочки. При переходе через стык i -й и $(i+1)$ -й оболочки вектор \mathbf{z} преобразуется по формуле

$$\mathbf{z}^{(i+1)} = P^{(i)} \mathbf{z}^{(i)} \quad (i=\overline{1, p-1}) \quad (2.2)$$

$$P^{(i)} = \begin{Bmatrix} \lambda^{(i)} & 0 \\ 0 & \lambda^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad \lambda^{(i)} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta^{(i)} & -\sin \beta^{(i)} \\ 0 & 0 & \sin \beta^{(i)} & \cos \beta^{(i)} \end{Bmatrix}$$

где $\beta^{(i)}$ — угол между касательными к меридианам i -й и $(i+1)$ -й оболочки в месте стыка.

Система (2.1), условия перехода (2.2) и граничные условия

$$F_1 \mathbf{z}^{(1)}(s_0^{(1)}) = 0, \quad F_2 \mathbf{z}^{(p)}(s_L^{(p)}) = 0 \quad (2.3)$$

определяют задачу на собственные значения для нахождения собственных частот и форм колебаний. В (2.3) F_1, F_2 — матрицы коэффициентов граничных условий на торцах оболочки.

Для конкретных m, \mathbf{x}, ω численным интегрированием с ортонормированием [10] строится общее решение системы (2.1). Подстановка общего

решения в граничные условия (2.3) позволяет вычислить левую часть частотного уравнения

$$G(m, x, \omega) = 0 \quad (2.4)$$

При нахождении собственных частот из уравнения (2.4) вычисляется частотный определитель $G(m, x, \omega)$ для некоторых значений ω , находится интервал, содержащий частоту, далее частота уточняется методом секущих. Значение минимальной собственной частоты определяется как наименьший из наименьших корней уравнений (2.4) для заданных значений $m=0, 1, 2, \dots$

3. Для решения задачи (1.4) используется метод проекции градиента. Обычно проектирующая матрица в точке x^k строится по формуле

$$P_k = I - Q_k^T (Q_k Q_k^T)^{-1} Q_k, \quad Q_k = \|e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_r}, \nabla g_{i_1}, \nabla g_{i_2}, \dots, \nabla g_{i_l}\|^T \quad (3.1)$$

где I — единичная матрица размерами $N \times N$, Q_k — матрица размерами $(r+l) \times N$, строками которой являются градиенты активных в x^k ограничений, r и l — число активных геометрических и нелинейных ограничений.

Учитывая, что геометрические ограничения — гиперплоскости, параллельные координатным гиперплоскостям, а векторы e_{j_s} ($s=1, r$) взаимно ортогональны, преобразуем P_k к виду, более удобному для организации вычислительной процедуры.

Представим матрицу Q_k в виде

$$Q_k = \left\| \begin{array}{c} E_k \\ G_k \end{array} \right\| \quad (3.2)$$

$$E_k = \|e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_r}\|^T, \quad G_k = \|\nabla g_{i_1}, \nabla g_{i_2}, \dots, \nabla g_{i_l}\|^T$$

Подставив (3.2) в (3.1), получим после преобразования

$$P_k = L_k - L_k G_k^T (G_k L_k G_k^T)^{-1} G_k L_k, \quad L_k = I - E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} E_k \quad (3.3)$$

Так как векторы e_{j_s} ортогональны, то $E_k E_k^T = I_r$ — единичная матрица размера $r \times r$. Тогда $E = E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} E_k = E_k^T E_k$. Следовательно, $E^T = E$ и $E^2 = E_k^T E_k E_k^T E_k = E_k^T E_k$. Отсюда видно, что E является самосопряженным оператором, а также оператором проектирования на подпространство, натянутое на векторы e_{j_s} . Значит, $L_k = I - E$ — оператор проектирования на пересечение активных геометрических ограничений.

С учетом (3.3) проекцию градиента целевой функции ∇C на пересечение активных ограничений можно находить по формуле

$$t^k = [I - G_k^* G_k^{*T} (G_k^* G_k^{*T})^{-1} G_k^*] (-\nabla C^*) \quad (3.4)$$

$$G_k^* = G_k L_k, \quad \nabla C^* = L_k \nabla C$$

Применение (3.4) означает, что градиенты нелинейных ограничений и градиент целевой функции проектируются сначала на пересечение активных геометрических ограничений, что сводится к занулению соответствующих компонент векторов. При этом не надо вычислять соответствующие частные производные и появляется возможность снизить порядок проектирующей матрицы.

При выборе величины шага в касательном направлении активные нелинейные ограничения аппроксимируются полиномом второй степени. Величина шага определяется из условия, что отклонение от активного ограничения составит заданную величину δ_k . Восстановление нарушенных после шага по касательной ограничений осуществляется в направлении $\xi^k = \nabla C^*(x^k) + t^k$. При посадке на границу допустимой области применяется метод Ньютона.

Точка x_{*h} является точкой локального минимума $C(x)$, если (11):

$$P_h(x_{*h}) \nabla C(x_{*h}) = 0 \quad (3.5)$$

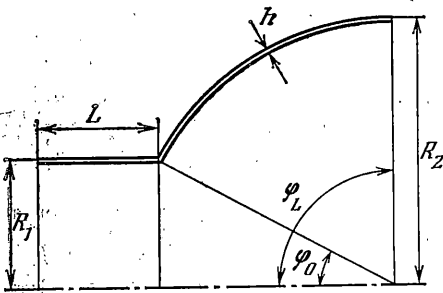
$$\alpha_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, r, \dots, r+l), \quad \alpha = (Q_h Q_h^T)^{-1} Q_h \nabla C(x_{*h}) \quad (3.6)$$

Используя (3.2), преобразуем (3.6) к виду

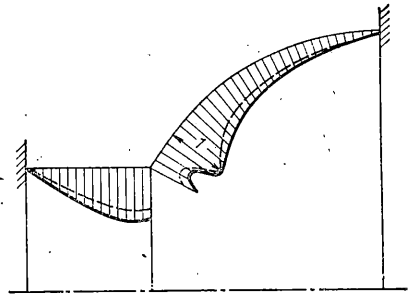
$$\alpha_i = (G_h^* G_h^{*T})^{-1} G_h \nabla C^*, \quad \alpha_r = E_h (\nabla C - G_h^T \alpha_i) \quad (3.7)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \alpha_i \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)^T, \quad \alpha_r = (\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_{r+l})^T$$

Применение формул (3.7) упрощает вычисление коэффициентов α_i .



Фиг. 1



Фиг. 2

Если найдена точка x_{*h} , в которой (3.5) выполнено с заданной точностью, т. е.

$$|P_h(x_{*h}) \nabla C(x_{*h})| / |\nabla C(x_{*h})| \leq \mathcal{E}_2 \quad (3.8)$$

по среди коэффициентов α_i есть отрицательные, то набор активных ограничений сокращается. Из него исключается ограничение с наименьшим α_i , далее уточняются значения оставшихся коэффициентов. Процесс исключения повторяется до тех пор, пока все оставшиеся коэффициенты не будут положительными.

При решении задачи (1.4) используется прием постепенного увеличения размерности пространства проектирования: решив задачу при числе узлов $N=N_0$, вводим дополнительные узлы между старыми. При этом за начальное приближение в задаче с увеличенной размерностью берем оптимальное решение задачи с меньшей размерностью.

Для проверки на многоэкстремальность используется прием спуска из различных начальных точек [7].

4. Рассмотрим оптимизацию составной оболочки (фиг. 1).

Для конструкции с $R_1=62 \cdot 10^{-2}$ м, $R_2=129 \cdot 10^{-2}$ м, $a=62 \cdot 10^{-2}$ м, $\varphi_0=27^\circ 30'$, $\varphi_1=90^\circ$, $E=2 \cdot 10^2$ ГПа, $\nu=0,3$, $\rho=7,96 \cdot 10^3$ кг/м³, $h=1,5 \cdot 10^{-2}$ м = const и граничными условиями на торцах $z_5=z_6=z_7=z_8=0$, что соответствует жесткому защемлению, определим закон оптимального распределения толщин, чтобы масса конструкции была минимальной и сохранилось значение минимальной собственной частоты.

Значения собственных частот первого тона колебаний исходной конструкции (в Гц) приведены ниже

m	0	1	2	3	4	5
ω	5442,0	4769,7	3349,9	3997,1	4912,9	5379,0

Минимальная собственная частота оболочки достигается при $m=2$ и равна 3349,9 Гц.

Поставим задачу оптимизации при следующих условиях: $\omega_0=3349,9$ Гц, $x_j^- = 0,5 \cdot 10^{-2}$ м = const, $x_j^+ = 3,0 \cdot 10^{-2}$ м = const. При оптимизации были приняты следующие параметры: $\delta_0=2 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon=2 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_1=2 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_2=0,03$, где ε — заданная точность удовлетворения нелинейным ограничениям, ε_1 — точность удовлетворения активным нелинейным ограничениям, δ_0 — начальное значение параметра отклонения от активных нелинейных ограничений [8]. При оптимизации было взято $N_g=6$, т. е. явное ограничение на частоту заменялось ограничениями на частотные определители.

вычисляемые при $m=0, 1, 2, 3, 4, 5$. Размерность задачи увеличивалась по закону $N=3, 5, 9, 17$. Ниже проводится сравнение масс M/M_0 оптимальных оболочек для последовательности N (M_0 — масса исходной конструкции)

N	1	3	5	9	17
M/M_0	1	0,348	0,344	0,344	0,344

Оптимальному распределению материала в конструкции при $N=17$ соответствует вектор $x_*=(0,826 \cdot 10^{-2}; 0,745 \cdot 10^{-2}; 0,643 \cdot 10^{-2}; 0,581 \cdot 10^{-2}; 0,5 \cdot 10^{-2}; 0,5 \cdot 10^{-2}; \dots; 0,5 \cdot 10^{-2})^T$, где x_1 — толщина левого торца цилиндрической оболочки, x_{17} — толщина правого торца сферической оболочки, т. е. у оптимальной оболочки толщина имеет минимальное значение всюду, кроме небольшого участка у левого торца цилиндрической оболочки. Значения собственных частот оптимальной конструкции для первого тона колебаний приведены ниже

m	0	1	2	3	4	5
ω	5214,9	4816,7	3349,9	3490,9	4030,2	4199,9

Форма первого тона колебаний с образованием двух волн в окружном направлении, которой соответствует минимальная собственная частота, приведена на фиг. 2 сплошной линией. Для сравнения на этой же фигуре штрихами отмечена форма колебаний исходной конструкции.

Численные исследования выполнены на основе программы, написанной на алгоритмическом языке ФОРТРАН для ЭВМ БЭСМ-6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В. Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
2. Гринев В. Б., Филиппов А. П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. Киев: Наук. думка, 1975. 294 с.
3. Троцкий В. А., Петухов Л. В. Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
4. Ольгофф Н. Оптимальное проектирование конструкций. М.: Мир, 1981. 276 с.
5. Тетерс Г. А., Рикардс Р. Б., Нарусберг В. Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. Рига: Зинатне, 1978. 240 с.
6. Беликов Г. И., Тарасов А. А. Оптимизация геометрических параметров гиперболических градиен при свободных колебаниях. — Строит. механика и расчет сооружений, 1982, № 4, с. 12–15.
7. Малков В. П., Угодчиков А. Г. Оптимизация упругих систем. М.: Наука, 1981. 288 с.
8. Ермолаев Н. В., Тарасов В. Л. Оптимизация оболочек вращения с заданной минимальной собственной частотой. — В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1983, с. 90–97.
9. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
10. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. — Успехи матем. наук, 1961, т. 16, № 3, с. 171–174.
11. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1974. 376 с.

Горький

Поступила в редакцию
9.I.1984