

УДК 539.3

РАСЧЕТ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК

АСТАХОВА А. Я.

Рассматриваются тонкие изотропные оболочки вращения постоянной толщины h под действием суперпозиции конечного числа сосредоточенных и распределенных по поверхности нагрузок, симметрично расположенных относительно нулевого меридиана, методом упругих решений с дискретной ортогональной прогонкой. Оболочки могут быть длинные и короткие, замкнутые и кольцевые, а края их — свободными, либо иметь различные виды защемления или шарнирного опирания.

1. Постановка задачи и метод решения. Пусть срединная поверхность оболочки является поверхностью вращения относительно оси Z правой декартовой ортогональной системы координат (x, y, z) без особых точек, за исключением граничных, где особенность допускается. Будем предполагать, что образующая является достаточно гладкой кривой, кривизна которой мала по сравнению с h^{-1} , θ — азимутальный угол плоскости, проведенной через точку M срединной поверхности и ось вращения Z , s — длина дуги вдоль меридиана, отсчитываемая от граничной точки M_0 , ξ — расстояние от точки M по нормали к срединной поверхности оболочки, а k_s и k_θ — величины главных кривизн в меридиональном и азимутальном направлениях.

Полагаем, что для расчета напряженно-деформированного состояния оболочек применима линейная теория, т. е. относительные деформации малы по сравнению с единицей и справедливы гипотезы Кирхгофа — Лява. Представляя деформации рассматриваемой оболочки в виде первых двух членов разложения по степеням ξ , пренебрегая величинами выше второго порядка малости, общие геометрические соотношения и уравнения равновесия срединной поверхности в проекциях на оси ортогональной системы координат (s, θ, ξ) относительно срединной поверхности оболочки записываются аналогично [1]. Согласно теории малых упруго-пластических деформаций, метода упругих решений [2, 3], представим усилия и моменты оболочки, работающей за пределом упругости, в виде разности усилий и моментов, возникающих в линейно-упругом теле [1] N^0 и некоторых поправок Δ , учитывающих физическую нелинейность материала

$$N = N^0 - \Delta \quad (1.1)$$

С учетом гипотезы о несжимаемости материала, т. е. полагая коэффициент Пуассона $\nu = 1/2$, аналогично [3, 4] записываются физические соотношения. Таким образом получаем систему из 17 уравнений в частных производных с 17 неизвестными. При задании соответствующих граничных условий, компонент нагрузки (распределенных некоторым образом по поверхности сил q_s, q_θ, q_ξ и моментов m_s^0, m_θ^0) получим краевую задачу, описывающую напряженно-деформированное состояние рассматриваемой оболочки вращения.

Разложим компоненты нагрузки и переменные напряженно-деформированного состояния оболочки в ряды Фурье по окружной координате θ .

Следуя [5], несложными преобразованиями получим систему из восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно восьми неизвестных при $r=0$ (индексы коэффициентов рядов Фурье n опущены):

$$\begin{aligned} N' &= A(s)N + f(s) + B(s)\Delta & (1.2) \\ N &= (N_r, N_z, S, M_s, u_r, u_z, v, \vartheta_s) \\ A(s) &= \|a_{ij}\|, \quad B(s) = \|b_{ik}\| \\ \Delta &= (\Delta N_s, \Delta N_\theta, \Delta M_s, \Delta M_\theta, \Delta S, \Delta H) \\ f(s) &= (f_1, f_2, f_3, f_4, 0, 0, 0, 0) \\ f_1 &= -(q_r + nk_\theta m_\theta^0), \quad f_2 = -[q_z - n(r'/r)m_\theta^0] \\ f_3 &= -(q_\theta - k_\theta m_\theta^0), \quad f_4 = m_s^0 \end{aligned}$$

Деформации при этом явно выражаются через неизвестные N в следующем виде ($r=0$):

$$\begin{aligned} E &= C(s)N + D(s)\Delta & (1.3) \\ E &= (\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{s\theta}, \kappa_s^0 n, \kappa_\theta^0 n, \kappa_{s\theta}^0) \\ \kappa_s^0 &= \kappa_s + k_s \varepsilon_s, \quad \kappa_\theta^0 = \kappa_\theta + k_\theta \varepsilon_\theta \\ \kappa_{s\theta}^0 &= (1/2) [\kappa_{s\theta} + (k_s + k_\theta) \varepsilon_{s\theta}] \\ C(s) &= \|c_{ij}\|, \quad D(s) = \|d_{ik}\| \quad (i, j=1, 2, \dots, 8; k, l=1, 2, \dots, 6) \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов ряда Фурье деформаций при $r=0$ получим из геометрических соотношений, применяя для раскрытия неопределенности вида $0/0$ при $r \rightarrow 0$ правило Лопиталя с учетом условий неразрывности оболочки и симметрии параметров напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины. Элементы матриц $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $D(s)$ опущены в силу громоздкости.

Здесь все линейные величины — радиальная координата r , длина образующей оболочки s , коэффициенты ряда Фурье перемещений u_r , u_z , v (тангенциального) — отнесены к толщине оболочки h . Коэффициенты ряда Фурье усилий N_r , N_z , S отнесены к произведению модуля упругости E на толщину оболочки h , изгибающих моментов M_s , m_s^0 , m_θ^0 — к произведению Eh^2 , компонент нагрузки q_r , q_z , q_θ — к E , ϑ_s — коэффициенты ряда Фурье угла поворота нормали в радианах. Коэффициенты ряда Фурье поправок, учитывающих физическую нелинейность материала, обезразмерены аналогично: поправки к усилиям ΔN_s , ΔN_θ , ΔS отнесены к Eh , а поправки к моментам ΔM_s , ΔM_θ , ΔH — к Eh^2 ; ε_s , ε_θ — коэффициенты ряда Фурье относительных деформаций растяжения, $\varepsilon_{s\theta}$ — сдвига, κ_s , κ_θ — коэффициенты ряда Фурье деформаций изгиба и $\kappa_{s\theta}$ — кручения срединной поверхности. Индексами r , z , θ , s обозначены горизонтальная, вертикальная, тангенциальная и меридиональная составляющие.

В отличие от [5] в правую часть системы для изотропных оболочек входят коэффициенты рядов Фурье $B(s)\Delta$, учитывающие физическую нелинейность материала, и включены дополнительные члены с кривизной оболочки. Разрешающая система уравнений (1.2) состоит из восьми уравнений с восьмью неизвестными. Поэтому на левом (при $s=0$) и правом (при $s=s_0$) концах образующей необходимо задать всего также восемь граничных условий.

Условия опирания краев оболочки могут быть различными. Например, при жестком защемлении $v = u_r = u_z = \vartheta_s = 0$, в случае шарнирного опирания на жесткую опору $v = u_r = u_z = M_s = 0$, а при шарнирном опирании, свободном в окружном направлении, $u_r = u_z = 0$, $rk_\theta N_r - r'N_z = 0$, $M_s = 0$, для свободного края $N_r = N_z = S = M_s = 0$.

Для замкнутых оболочек из условий симметрии и антисимметрии функций в окрестности $r=0$, а также из уравнений, получающихся с помощью предельного перехода при $r \rightarrow 0$ в геометрических соотношениях и уравнениях равновесия, на правом конце образующей получим следую-

щие граничные условия: $v=u_r=0$, $N_z=0$, $\vartheta_s=0$ для $n=0$; $v+u_r=0$, $u_z=0$, $N_z=0$, $M_s=0$ для $n=1$; $v=u_r=u_z=0$, $\vartheta_s=0$ при четных n , $M_s=0$ при нечетных n ($n \geq 2$).

Итак, поставленная задача после разделения переменных с помощью метода последовательных приближений на каждой итерации сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с линейными однородными граничными условиями при $s=0$ и $s=s_0$ относительно N . В первом приближении коэффициенты ряда Фурье поправок Δ , учитывающих физическую нелинейность материала, полагаются равными нулю. Интегрируя (1.2) с заданными граничными условиями, находим неизвестные коэффициенты ряда Фурье N . Далее из (1.3) получаем коэффициенты ряда Фурье компонент деформаций E (также в предположении $\Delta=0$), а затем и сами деформации. По значениям деформаций определяются жесткости (аналогично [4]), а затем нелинейные члены. Раскладывая их в ряды Фурье, находим поправки Δ для следующего приближения η .

В силу краевых и локальных эффектов, имеющих место в тонких оболочках вращения, в особенности при действии кольцевых, либо сосредоточенных нагрузок, решение N обладает большими градиентами. Поэтому для численной реализации поставленной краевой задачи воспользуемся методом прогонки с дискретной ортогонализацией [6], использованной в [5] для расчета упругих оболочек вращения. Причем, интегрирование уравнений при прямой прогонке будем производить методом Рунге - Кутты с равномерным шагом интегрирования вдоль образующей оболочки. Поправки находятся лишь в узлах ортогонализации. В промежуточных точках они определяются с помощью двухточечного многочлена Эрмита.

Используемый численный метод позволяет задавать граничные условия на правом конце образующей для замкнутых оболочек при $r=0$. При этом, так как уравнения (1.2) содержат устраняемую особенность при $r \rightarrow 0$, то при интегрировании их на последнем шаге (около правой границы) воспользуемся явной схемой - предыдущим приближением метода Рунге - Кутты, не используя значений функций на правой границе участка интегрирования. А для нахождения производных применим также трехточечную разностную схему с постоянным шагом с интерполяцией по Лагранжу по значениям функций в узлах ортогонализации.

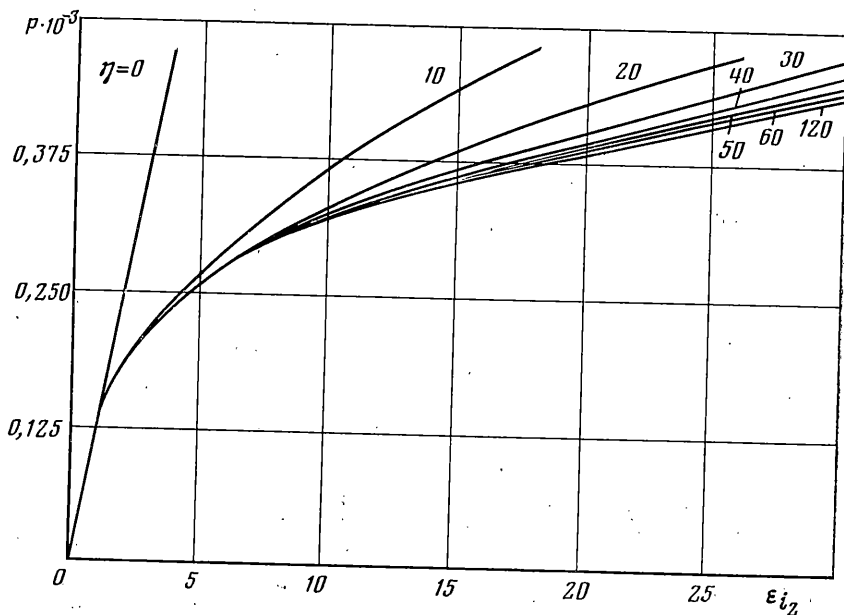
Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6 с транслятором с языка БЭСМ-АЛГОЛ. Для осесимметричных нагрузок расчет напряженно-деформированного состояния упругопластических оболочек на относительно большую нагрузку занимает 2-3 ч (100 итераций). Для сосредоточенных несимметричных нагрузок время счета зависит от выбираемого количества коэффициентов рядов Фурье и требует для расчета 50 приближений порядка 6-10 ч на каждые 10 коэффициентов ряда Фурье. Немного большее время, необходимое для расчета оболочек, находящихся под действием осесимметричных нагрузок, объясняется общностью алгоритма.

Как показали расчеты, результаты для $m=50$ точек ортогонализации при $t=250$ и $t=500$ точек интегрирования с точностью 0,05% совпадают между собой, а при 250 точках интегрирования и $m=50$, а также при $m=25$ совпадают с точностью 0,1%. Поэтому большинство задач рассчитывалось при 250 точках интегрирования и 50 точках ортогонализации.

В публикуемой работе проведено исследование сходимости получаемых решений. В качестве критерия сходимости решения использовался общепринятый критерий, в котором сравниваются каждые десятые приближения для всех разрешающих функций N по всем точкам ортогонализации s . Обнаружена хорошая сходимость данного метода. Однако для диапазона нагрузок, близких к областям, в которых теория малых упругопластических деформаций становится не справедливой; метод упругих решений сходится слишком медленно. С ростом нагрузки необходимое число итераций для достижения требуемой точности возрастает. Так, для оболочки с углом полураствора $\alpha_0=90^\circ$ с отношением радиуса к толщине $R/h=100$, материал которой имеет модуль упругости $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа и коэффициент линейного упрочнения $\lambda=0,95$ при среднем уровне кольцевой нагрузки (отнесенной к Eh) $P=0,4 \cdot 10^{-3}$, приложенной в середине образующей для достижения точности 0,1%, требуется порядка 120 итераций.

На фиг. 1 для данной оболочки в сечении, расположенном под силой, представлена диаграмма $P-\varepsilon_2$ (нагрузка - интенсивность деформаций на внешней поверхности оболочки) в зависимости от числа приближений n_0 . Упругое решение пригодно до $P=0,15 \cdot 10^{-3}$. При больших нагрузках до $P=0,2 \cdot 10^{-3}$ требуется лишь 10 итераций, а уже при $P=0,25 \cdot 10^{-3}$ приходится вычислять 20-30 приближений. В случае больших нагрузок $P \geq 0,35 \cdot 10^{-3}$ необходимо не менее 100 итераций.

Проведенные исследования показали, что при $P=0,2862 \cdot 10^{-3}$ наиболее быстро сходящаяся функция - горизонтальное перемещение u_r - мало отличается от итерации к итерации уже при $n_0=20-30$, а наиболее медленно сходящаяся функция -

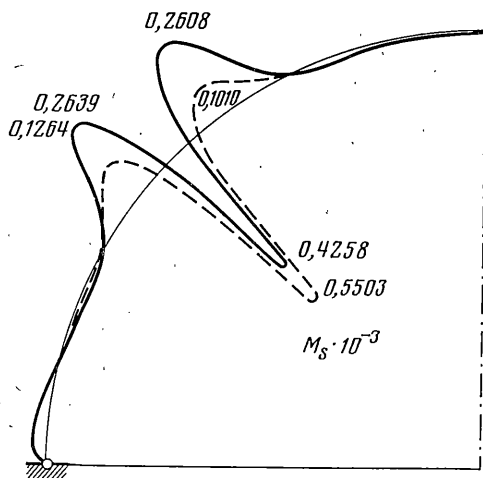


Фиг. 1

изгибающий момент M_s — лишь при $n_0=80-90$. Причем с ростом коэффициента линейного упрочнения материала оболочки λ сходимость уменьшается. Так, для этой же нагрузки при $\lambda=0,95$ требуется 40 итераций, при $\lambda=0,992$ — 100 итераций, а при $\lambda=1-n_0=150$. В случае сосредоточенных сил сходимость метода упругих решений

ускоряется. Для рассматриваемой оболочки с модулем упрочнения материала $\lambda=0,95$ сравнение с кольцевой нагрузкой показывает, что начиная с 20-й итерации сходимость резко возрастает. Число приближений, необходимое для получения подходящего решения, по сравнению с кольцевой нагрузкой уменьшается примерно в два раза.

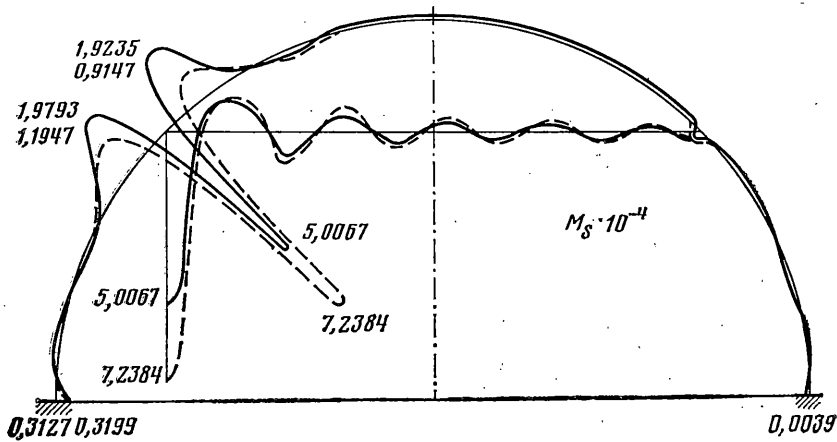
2. Результаты расчетов. На фиг. 2 представлена эпюра меридиональных изгибающих моментов для оболочки, рассмотренной выше, с шарнирным опиранием по краю на действие кольцевой нагрузки, приложенной в середине меридиана. Видно, что наибольшее значение изгибающих моментов, растягивающих внутренние волокна оболочки, в упругом решении (здесь и далее показанном штриховыми линиями) находится под точкой приложения нагрузки. Величины этих моментов в 4,5 раза больше максимальных значений моментов, растягивающих верхние волокна оболочки и расположенных по обе стороны от места приложения нагрузки. В результате появления пласти-



Фиг. 2

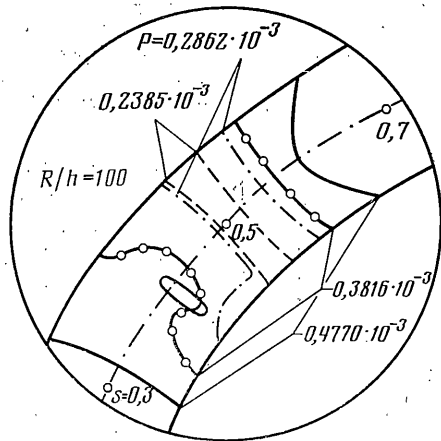
ческих деформаций в оболочке в области приложения нагрузки происходит перераспределение изгибающего момента M_s по сравнению с упругим решением. Момент под силой уменьшается на 25%. В соседних же областях значения локальных максимумов увеличиваются более чем в два раза.

Аналогично ведет себя кольцевой изгибающий момент M_θ , ординаты которого примерно в два раза меньше. Отметим, что для меридионального усилия N_s отличие упругого решения от упругопластического составляет всего 2%, а для окружного усилия N_θ — в пределах 10–30%. При этом значение горизонтальной и вертикальной составляющих перемещения под точкой приложения нагрузки увеличилось примерно в пять раз и составляет около половины толщины оболочки. Такое изменение усилий и перемещений происходит при величине интенсивности деформаций на внешней поверхности оболочки в точке приложения силы, равной $33,5 \epsilon_s$ ($\epsilon_s = 10^{-3}$ — интенсивность деформаций, соответствующая началу текучести материала)..



Фиг. 3

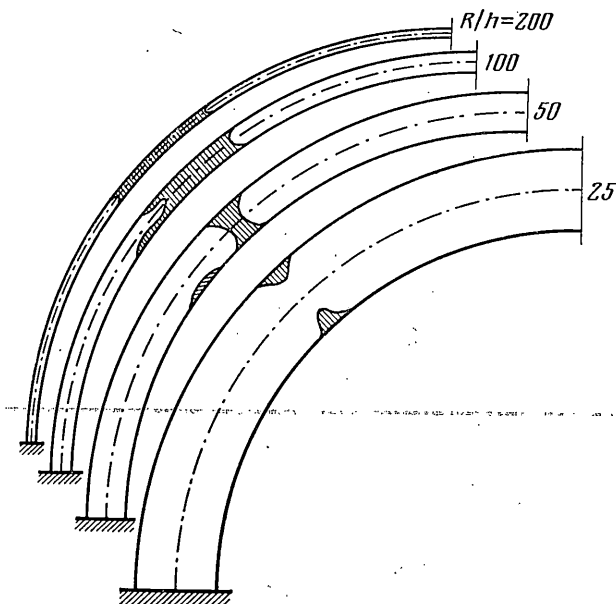
Для этой же оболочки, но с жестким защемлением по контуру, на фиг. 3 показана эпюра меридиональных изгибающих моментов в случае нагружения ее сосредоточенной силой $P/(Eh) = 0,3816 \cdot 10^{-3}$, приложенной в середине меридиана $s = 0,5 s_0$. Результаты приведены для меридиональной плоскости и плоскости параллели, проходящих через точку приложения силы. Отметим, что наибольший изгибающий момент находится под точкой приложения силы и в семь раз больше соседних экстремумов для упругого решения. В результате перераспределения моментов за счет появления упругопластических областей максимальное значение уменьшается примерно в полтора раза, а значения максимумов в соседних областях возрастают в два раза. При удалении от точки приложения силы вдоль параллели изгибающий момент уменьшается и в точке с координатами $\theta = 10^\circ$, $s = 0,5 s_0$ он меньше максимального примерно в два раза как в упругом, так и в упругопластическом решении. Наибольшее смещение по параллели составляет около 0,1 от толщины оболочки h , в то время как для составляющих u_r и u_z оно равно примерно 0,25 h . Для окружной компоненты v наибольшее отличие упругого от упругопластического решений составляет 15%, значения же перемещений u_r и u_z под точкой приложения силы увеличиваются в упругопластическом случае в два раза.



Фиг. 4

Область появления пластических деформаций и их развитие показано на фиг. 4 при различных кольцевых нагрузках, действующих на оболочку в середине меридиана. При нагрузках, меньших $P = 0,477 \cdot 10^{-3}$, пластические деформации возникают только в области приложения внешнего усилия. При жестком защемлении по контуру для нагрузки $P = 0,477 \cdot 10^{-3}$ пластические деформации порядка $1,2 \epsilon_s$ возникают и в сечении, близком к опоре. В этом случае длина зоны пластических деформаций под нагрузкой составляет $\sim 0,3$ длины меридиана. Значения интенсивностей деформаций, по которым можно судить о величине пластических деформаций, на внутренней ϵ_{i1} и внешней ϵ_{i2} поверхностях оболочки близки между собой. В точке $s = 0,5$ соответственно возрастанию представленных на фиг. 4 нагрузок они равны $\epsilon_{i1}/\epsilon_s = 2,8; 5,4; 18; 33$, $\epsilon_{i2}/\epsilon_s = 3; 6,2; 21; 36$. Эти функции быстро затухающие для $P = 0,477 \cdot 10^{-3}$ при $s = 0,4; 0,6$; $\epsilon_{i1}/\epsilon_s = 4,6; 2,2$, $\epsilon_{i2}/\epsilon_s = 2; 4$.

На фиг. 5 показано развитие пластических деформаций от действия кольцевой нагрузки $P = 0,3816 \cdot 10^{-3}$ в сферических оболочках разной толщины. При малых толщинах оболочки наблюдается довольно большая область пластических деформаций. С увеличением толщины оболочки эта область сокращается за счет появления сечений с упругопластическими деформациями. Это наблюдается в оболочках уже с $R/h = 100$. При еще больших толщинах область с пластическими деформациями разделяется на две. Наряду с пластической областью, занимающей всю толщину оболочки и простирающейся на длину, равную толщине оболочки h , со стороны внут-



Фиг. 5

ренней поверхности ближе к опоре для $R/h=50$ появляется местная пластическая зона. Отметим, что линии, отделяющие область пластичности, занимающую все поперечное сечение оболочки под нагрузкой, выпуклы внутрь этой области. С увеличением толщины оболочки расстояние между ними сокращается. Затем они смыкаются и область пластичности разрывается на две, прилегающие к внешней и внутренней поверхностям оболочки (при $R/h=25$).

η	$\varepsilon \cdot 10^{-3}$	κ	$\varepsilon \cdot 10^{-3}$	κ
0	1,327	1,002	1,327	1,000
4	1,488	1,195	1,469	1,171
8	1,501	1,212	1,498	1,202

Было также проведено сравнение с данными [7] по расчету сферической оболочки, жестко заземленной по контуру с углом полураствора 30° , под действием внутреннего давления $q=0,11077 \cdot 10^{-4}$; первые столбцы таблицы соответствуют результатам из [7], η – номер итерации метода упругих решений. Наибольшее отличие для функций $\varepsilon=(\varepsilon_s+\varepsilon_\theta)$, $\kappa=R(\kappa_s+\kappa_\theta)$ составляет 2%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.–Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
3. Цурков И. С. К вопросу об интегрировании уравнений теории неупругих тонких оболочек.– Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-та, 1965, № 47, с. 5–16.
4. Цурков И. С. Определение жесткостей упругопластической оболочки.– Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-та, 1965, № 47, с. 17–23.
5. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Василенко А. Т. Численное решение краевых задач статики ортотропных слоистых оболочек вращения на ЭВМ типа М-220. Киев: Наук. думка, 1971. 151 с.
6. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.– Успехи матем. наук, 1961, т. 16, вып. 3, с. 171–174.
7. Азмедьянов И. С. Малые упругопластические деформации сферической оболочки при осесимметричном нагружении.– Тр. Куйбышев. авиац. ин-та, 1968, вып. 39, с. 45–58.

Москва

Поступила в редакцию
17.V.1984.