

УДК 539.375

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

БЕРКУН В. Б., ПРОЦЕНКО А. М.

Рассматривается приближенный метод определения коэффициентов интенсивности при сингулярных составляющих поля напряжений в окрестности входящего угла произвольного раствора. За основу взяты метод конечных элементов и гладкая срезка сингулярных членов. При этом аналитически вычисляется оператор, учитывающий взаимную энергию сингулярных составляющих.

Предлагается связь между критическими значениями коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины и произвольного угла.

1. Пусть Ω — замкнутая двумерная область, заполненная однородной упругой средой. Граница области Γ состоит из конечного числа отрезков Γ_i , пересекающихся в точках O_i под углами $2\omega_i$ ($i=1, \dots, N$). На отрезках Γ_i задаются граничные условия в напряжениях. Область Ω закреплена в двух или более точках.

Равновесие упругой области Ω описывается классическими уравнениями Ламе

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

где λ и μ — константы Ламе, соответствующие плоскому напряженному состоянию и плоской деформации; \mathbf{u} — вектор декартовых перемещений. На отрезках Γ_i рассматриваются краевые условия

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{u}) = 2\mu \partial \mathbf{u} / \partial n_i + \lambda n_i \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\mathbf{n}_i \times \operatorname{rot} \mathbf{u}) = \mathbf{g}_i \quad (1.2)$$

где \mathbf{n}_i — вектор внешней нормали к Γ_i .

Оператор задачи (1.1), (1.2) является сильно эллиптическим, поэтому слабое энергетическое решение задачи с кусочно-гладкой границей всегда существует и единственно [1].

В [2, 3] доказано, что главный член асимптотики решения задачи (1.1), (1.2) в окрестности i -го угла совпадает с главным членом асимптотического решения этой же задачи в «модельной» области. Модельной называется область $\mathbf{K} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq r < +\infty, -\omega_i \leq \theta \leq \omega_i\}$ с краевыми условиями, соответствующими условиям на отрезках Γ_i и Γ_{i+1} . Здесь θ — полярный угол, а $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ — полярный радиус в системе координат с началом в вершине угла, $0 < \omega_i \leq \pi$. Предполагается также, что краевые условия в вершине угла согласованы.

Асимптотическое решение модельной задачи в окрестности вершины угла имеет вид

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n c_j r^{i\lambda_j} \varphi_j(\lambda_j, \theta) + \mathbf{w}(r, \theta) \quad (1.3)$$

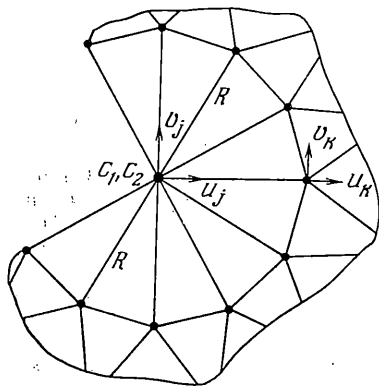
Здесь c_j — коэффициенты, зависящие от геометрии области, вектора правых частей (нагрузок) и физических постоянных материала, а также от типа напряженного состояния, \mathbf{w} — регулярная составляющая, образующая ограниченные напряжения в окрестности вершины угла, i —

мнимая единица, φ_j — собственные вектор-функции краевой задачи с параметром на дуге единичной окружности с центром в вершине угла.

В представлении (1.3) λ_j — собственные значения (показатели сингулярности), определяемые как корни характеристического уравнения

$$\operatorname{sh}^2 2\lambda\omega = -\lambda^2 \operatorname{sh}^2 2i\omega \quad (1.4)$$

лежащие в полосе $-1 < \operatorname{Im} \lambda_j < 0$. Как известно, в интервале $\pi \leq 2\omega < \eta$ ($\operatorname{tg} \eta = \eta$) существует один сингулярный чисто мнимый корень λ_1 уравнения (1.4) (в (1.3) $n=1$), а в интервале $\eta \leq 2\omega \leq 2\pi$ уравнение (1.4) имеет два сингулярных чисто мнимых корня λ_1 и λ_2 , причем $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ (в (1.3) $n=2$). Отметим также, что φ_1 соответствует симметричному напряженному состоянию, а φ_2 — кососимметричному.



Фиг. 1

Определение коэффициентов c_j является важной задачей механики хрупкого разрушения, так как через коэффициенты при сингулярных составляющих определяются коэффициенты интенсивности напряжений

$$k_1 = (2\omega r)^{1-i\lambda_1} \max_{-\omega \leq \theta \leq \omega} |\sigma_{\theta\theta}|,$$

$$k_2 = (2\omega r)^{1-i\lambda_2} \max_{-\omega \leq \theta \leq \omega} |\sigma_{r\theta}|$$

где $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ — соответствующие сингулярные ($\sigma_{ij} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$) составляющие тензора напряжений, зависящие от c_1 и c_2 (см., например, [4]). Отметим, что максимум в приведенных выражениях достигается на биссектрисе угла $\theta=0$.

2. Аналитическое определение коэффициентов c_1 и c_2 возможно только в случае модельной области, поэтому для вычисления коэффициентов при сингулярных составляющих упругого решения в произвольных областях предлагается использовать метод конечных элементов, введя специальные угловые конечные элементы, функции формы которых точно описывают поведение особенностей в малой окрестности вершины угла. Предполагается, без ограничения общности, что в области содержится только один входящий угол раствором $\eta < 2\omega \leq 2\pi$. Для реализации изложенного подхода используется представление

$$s = \sum_{j=1}^2 c_j z_j + v \quad (2.1)$$

где z_j — сингулярные функции из (1.3), удовлетворяющие однородным краевым условиям на сторонах угла, c_j — неизвестные коэффициенты, v — неизвестное регулярное решение, имеющее кусочно-линейную аппроксимацию.

Очевидно, что сингулярные функции формы необходимо распространить из окрестности вершины угла на всю область, однако этот подход очень осложняется необходимостью интегрировать каждую сингулярную функцию с функциями форм всех конечных элементов в области и, как следствие, с неленточной глобальной матрицей жесткости. Чтобы упростить задачу, предлагается локализовать выделенные сингулярные функции в некотором секторе радиуса R в окрестности вершины угла. Сектор локализации радиуса R разбивается на некоторое количество треугольных конечных элементов, в узлах которых задаются неизвестные перемещения (фиг. 1). Таким образом, в вершине угла кроме обычных неизвестных

u_j, v_j существуют еще два обобщенных неизвестных c_1 и c_2 . Остальная часть области разбивается на треугольные или другие конечные элементы, сопряжение которых с сингулярным конечным элементом осуществляется в узлах, расположенных на границе сектора локализации (см. фиг. 1).

Результатирующее решение задачи (1.1), (1.2) в области с угловыми точками не должно содержать разрывов в перемещениях, поэтому функции сингулярных составляющих в секторе локализации срезаются следующим образом: $z_j = (r^{iM} - R^{iM-1}r)\varphi_j(\lambda_j, \theta)$. Тогда на границе локализации $z_j(R, \theta) = 0$ и сопряжение сингулярного конечного элемента с остальными конечными элементами осуществляется в узлах через регулярную часть. Величину радиуса локализации следует выбирать из условия равенства ошибки аппроксимации в зоне сингулярного элемента ошибке аппроксимации в остальной области.

Для получения обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) воспользуемся функционалом полной энергии

$$U(\xi) = 1/2 (a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\xi), \varepsilon_{ij}(\xi))_{\Omega} - (g, \xi)_{\Gamma} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.2)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}(\xi)$ — тензор деформации, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, ξ — вектор перемещений, g — вектор нагрузок, $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ — скалярное произведение в Ω , $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ — линейная форма на Γ . Искомый вектор перемещений s является решением задачи

$$U(s) = \inf_{\xi \in M} U(\xi) \quad (2.3)$$

$M = \{\xi : \xi \in W_2^1(\Omega)^2 \text{ на закрепленной части } \xi = 0\}$, где $W_2^1(\Omega)^2$ — энергетическое пространство задачи. Подставляя (2.1) в (2.2), воспользуемся условиями стационарности функционала $\partial U / \partial \xi = 0$, $\partial U / \partial c = 0$ в задаче (2.3), где c — вектор неизвестных коэффициентов. Тогда условия стационарности приобретают вид

$$K_{rr}v + K_{rs}c = g, \quad K_{ss}c + K_{rs}^T v = 0 \quad (2.4)$$

$$K_{rr} = (B^T N^T D B N)_{\Omega}, \quad K_{ss} = (B^T W^T D B W)_{\Omega_R}, \quad K_{rs} = (B^T W^T D B N)_{\Omega_R}$$

Здесь K_{rr} — глобальная матрица жесткости регулярных конечных элементов, N — матрица функций форм регулярных конечных элементов, B — матрица градиентов, D — матрица упругих характеристик, T — символ транспонирования, K_{ss} — матрица жесткости сингулярных конечных элементов, W — матрица сингулярных функций форм, Ω_R — сектор локализации, K_{rs} — матрица жесткости сингулярных и регулярных конечных элементов. Решение системы матричных уравнений (2.4) имеет вид $c = -(K_{ss} + K_{rs}^T K_{rr}^{-1} K_{rs})^{-1} K_{rs}^T K_{rr}^{-1} g$, $v = K_{rr}^{-1} g - K_{rr}^{-1} K_{rs} c$, где (-1) — символ обратной матрицы. Здесь необходимо отметить, что матрица K_{rr} — ленточная симметричная матрица метода конечных элементов размером $2n \times 2n$ (n — количество узлов). Единожды разложив K_{rr} на треугольные матрицы, можно в дальнейшем легко обращаться ее требуемое количество раз. Матрица K_{ss} в данном случае имеет размер 2×2 , причем внедиагональные элементы ее нулевые, так как симметричная и коссимметричная сингулярные формы энергетически ортогональны. Матрица K_{rs} имеет размер $2 \times 2n$, причем большинство ее элементов нулевые.

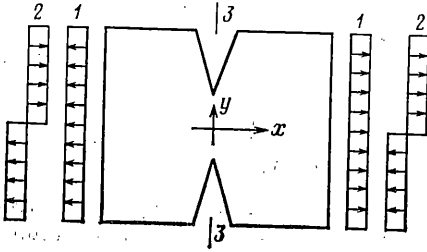
При решении системы (2.4) в качестве промежуточного получается обычное решение регулярного метода конечных элементов $\xi_0 = K_{rr}^{-1} g$, которое в дальнейшем подправляется. Вычисление коэффициентов матриц K_{rr} , K_{rs} , K_{ss} удобно осуществлять по аналитическим формулам, так как их формирование при этом происходит наиболее эффективно и исключаются ошибки, возникающие при численном интегрировании.

Предложенный метод является методом конечных элементов с аддитивным выделением особенностей в окрестности угловых точек границы. В отличие от ряда аналогичных методов используемый метод обладает необходимым порядком аппрок-

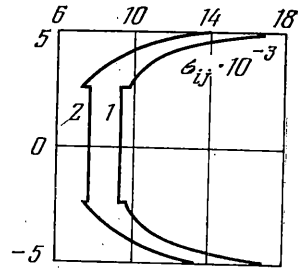
симации в зоне концентраторов и полной совместностью конечных элементов, что обеспечивает такой же порядок аппроксимации приближенного решения, как и для задачи с гладкой границей. Так как в методе учитываются обе сингулярные составляющие, существует возможность определять коэффициенты интенсивности напряжений для симметричного и кососимметричного состояний.

Подход, изложенный в настоящем разделе, практически ничем не отличается, если на сторонах угла задавать смешанные краевые условия или в перемещениях.

В качестве примера, иллюстрирующего метод решения задачи (1.1), (1.2) при помощи конечных элементов на ЭВМ, приведем задачу о деформации образца с двумя угловыми вырезами (фиг. 2). Отношение ширины образца к длине $1/2$, отношение глубины выточки к ширине $1/3$, раствор угла выточки 30° , модуль Юнга материала $2,06 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона 0,3. К образцу прикладывались два вида нагрузок единичной интенсивности: симметричная 1 и кососимметричная 2 (фиг. 2).



Фиг. 2



Фиг. 3

Область разбивалась на 432 треугольных конечных элемента, общее число неизвестных — 506. В вершине каждого входящего угла располагался сингулярный конечный элемент. При расчете на симметричную нагрузку коэффициент $c_1 = -0,7472 \cdot 10^{-7}$, а коэффициент при кососимметричной форме $c_2 = 0,4732 \cdot 10^{-12}$. Как видно, коэффициент при кососимметричной форме c_2 пренебрежимо мал. Распределение напряжений вдоль прямой 3-3 (фиг. 2) изображено на фиг. 3, где кривая 1 — напряжения σ_{xx} , а кривая 2 — напряжения σ_{xy} . При расчете на кососимметричную нагрузку коэффициент $|c_1| = 0,1449 \cdot 10^{-9}$, а $c_2 = -0,1573 \cdot 10^{-6}$. В этом случае главной становится кососимметричная форма.

3. Критические значения коэффициентов интенсивности при сингулярных членах оценивается только для трещины ($\omega = \pi$). Тем не менее в других ситуациях ($\omega < \pi$) также существуют сингулярные составляющие, коэффициенты интенсивности для которых можно получить численным способом, как показано. Но эти коэффициенты имеют другую размерность, что не позволяет их сравнивать с величинами k_{1c} и k_{2c} .

Это обстоятельство можно преодолеть следующим образом. Введем величины: $\gamma = (1 - i\lambda_1)^{-1}$, $a(\varepsilon)$ — однородная функция второй степени от компонентов тензора деформаций. В простейшем случае $a(\varepsilon) = e \cdot e$, где e — девиатор деформации, тогда $a(\varepsilon)$ — второй инвариант девиатора. Зададим дугу окружности с центром в вершине угла, радиусом ρ и раствором 2ω так, чтобы концы этой окружности располагались на противоположных сторонах угла. Определим величину e_ω , которую условно назовем «раскрытием угла»

$$e_\omega(\rho) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\omega\delta} \int_{\rho-\delta}^{\rho+\delta} \int_{-\omega}^{\omega} a(\varepsilon)^{1/2} d\theta dr \right)^{1/7} \quad (3.1)$$

С учетом (3.1) получим

$$e_\omega(\rho) = e_\omega^7 + O(\rho^*) \quad (3.2)$$

$$e_\omega^7 = \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} a(c_1 \Phi_1)^{1/2} d\theta, \quad \kappa = \frac{|\lambda_2| - |\lambda_1|}{1 - i\lambda_1}$$

При $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ для $e_\omega(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$ существует конечный предел, определяемый $c_1 \Phi_1$, который равен e_ω . Величина e_ω^7 имеет размерность «дли-

ны», что дает основание назвать эту величину «раскрытием угла». Для $\omega = \pi$ предел e_{π^2} есть величина раскрытия трещины.

Отметим, что если интеграл (3.1) брать по любой спрямляемой дуге, концы которой лежат на противоположных сторонах угла, то его асимптотическое значение не изменится. Таким образом, e_{ω} — асимптотически инвариантный интеграл. Для e_{π^2} можно определить критическое значение, связав его с k_{1c} .

Пусть $a(\varepsilon)$ — второй инвариант девиатора деформаций, а решение для трещины относительно девиатора напряжений такое: $s_{ij} = k_1 / (2\pi r)^{1/2} \psi_{ij}(\theta)$, $e_{ij} = s_{ij} / \mu$. Пусть для угла раствором 2ω имеет место аналогичное выражение $s_{ij} = k_{1\omega} / (2\omega r)^{1/2} g_{ij}(\theta)$, $e_{ij} = s_{ij} / \mu$. Критические величины раскрытия трещины и угла введем аналогично $e_{\omega c}$:

$$e_{\pi c} = \frac{k_{1c}}{\mu} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{ij}(\theta) \psi_{ij}(\theta) d\theta \right)^{1/2},$$

$$e_{\omega c} = \frac{k_{\omega c}}{\mu} \left(\frac{2}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} (g_{ij}(\theta) g_{ij}(\theta))^{1/2} d\theta \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

Исходя из принципа сохранения размерности запишем условия критичности раскрытий $e_{\omega c}^{\gamma} = e_{\pi c}^2$. Подставляя в это уравнение выражение (3.3) получим связь между критическими значениями коэффициентов интенсивности

$$k_{\omega c} = \mu b(\omega) (k_{1c}^2 / \mu^2)^{1/2} \quad (3.4)$$

$$b(\omega) = \left[\frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{ij}(\theta) \psi_{ij}(\theta) d\theta / \int_{-\omega}^{\omega} (g_{ij}(\theta) g_{ij}(\theta))^{1/2} d\theta \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{\omega}{8} / \int_{-\omega}^{\omega} (g_{ij}(\theta) g_{ij}(\theta))^{1/2} d\theta \right]^{1/2}$$

Отметим, что при $\omega = \pi$ величина $\gamma = 2$, а при $\omega \rightarrow \pi/2$ имеем $\gamma \rightarrow \infty$; при этом все рассуждения сохраняют математический смысл. Так, если (3.1) трактовать как норму в пространстве функций, суммируемых со степенью γ на отрезке $[-\omega, \omega]$ ($L^{\gamma}(-\omega, \omega)$), то при $\omega = \pi/2$ это будет норма в пространстве функций, суммируемых на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ с любой степенью ($L^{\infty}(-\pi/2, \pi/2)$). Одновременно (3.5) дает, что $k_{0,5\pi c} = \mu$ — теоретическое значение предела прочности бездефектного материала.

Другое обстоятельство заключается в том, что если имеет место общее решение вида (1.3), в котором $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, то асимптотическое значение (3.2) существует только при $\gamma = (1 - i\lambda_1)^{-1}$ и в формуле (3.2) фигурируют только функции при первом сингулярном члене. Принять $\gamma = (1 - i\lambda_2)^{-1}$ можно только при условии $c_1 = 0$. Однако это обстоятельство в случае трещин $\lambda_1 = \lambda_2 = -i/2$ снимается.

Отметим, что интерпретировать критерий $e_{\omega c}$ можно различными способами. Можно естественным образом связать его с величинами k_{1c} и k_{2c} по формуле (3.5), тогда это «силовой» критерий¹.

Большое значение критерий имеет для задачи пластичности [5]. Достоинством предлагаемого критерия является то, что он не оперирует с

¹ Критерий разрушения входящего угла $e_{\omega c}$ имеет такой же характер, как и критерий, предложенный Н. Ф. Морозовым (см. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин и острых вырезов. — Препринт № 193, Ин-та проблем механики АН СССР, М., 1982, № 193. 57 с.), с той только разницей, что для $\omega = \pi/2$ его величина конечна.

какими-либо характеристиками структуры материала типа «длина», хотя величина e_0^T и имеет размерность «длины». Если ввести плотность поверхностной энергии γ_0 по Гриффитсу, то величина $\gamma_0 e_0^T$ есть критическое значение энергии, приводящее к разрушению входящего угла или развитию трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миллин С. Г. Проблема квадратичного Функционала. М.—Л.: Гостехиздат, 1952. 216 с.
2. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с конечными или угловыми точками.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
3. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений краевых задач в конусе.— Зап. науч. семинаров Лен. отд. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1975, т. 52, с. 110—127.
4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
5. Проценко А. М. Напряжения и деформации в упруго-идеальнопластическом материале с трещиной.— В кн.: Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984, с. 98—109.

Москва

Поступила в редакцию
9.VII.1984