

УДК 539.375

**БОЛЬШАЯ АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ
НЕСЖИМАЕМОГО УПРУГОГО ТЕЛА
С ВЫРЕЗОМ И ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ**

ЛИТВИНЕНКОВА З. Н.

Рассматривается нелинейная антиплоская деформация тела из неогуковского материала с вырезом и жестким включением в виде симметричной лунки. Напряжения выражаются через основную комплексную функцию $\Psi(\xi)$, которая находится с применением конформного отображения. Выведены асимптотические формулы для напряжений у угла луночного выреза или включения. Анализируются предельные случаи, когда лунка переходит в разрез нулевой толщины и в круговое отверстие. Для тела с трещиной-разрезом получена формула, определяющая разрушающую нагрузку. Предложен критерий, объединяющий подход В. В. Новожилова с использованием главного максимального напряжения.

1. Рассмотрим неограниченное цилиндрическое тело из неогуковского материала, содержащее вырез в виде симметричной лунки и нагруженное на бесконечности равномерными касательными напряжениями $\sigma_{13}^\infty, \sigma_{23}^\infty$ (фиг. 1).

Положим, что координаты точек в деформированном (x_i) и недеформированном (x_i^0) состоянии связаны соотношениями (обобщенная антиплоская деформация [1]):

$$x_1 = \lambda x_1^0, \quad x_2 = \lambda x_2^0, \quad x_3 = \lambda^{-2} x_3^0 + w(\lambda x_1^0, \lambda x_2^0).$$

Постоянная λ определяет дополнительную однородную деформацию, сохраняющую объем.

Напряжения в каждой точке тела при условии отсутствия массовых сил выражаются через основную комплексную функцию $\Psi(\xi)$, где $\xi = x_1^0 + i x_2^0$, зависимостями [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} - i \sigma_{23} &= \mu \lambda \Psi, & \sigma_{33} &= \mu (\lambda^{-4} - \lambda^2 + \Psi \bar{\Psi}) \\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Функция $\Psi(\xi)$ определяется из граничного условия на контуре поперечного сечения цилиндрического тела (фиг. 1):

$$\Psi \exp(i\gamma^0) + \bar{\Psi} \exp(-i\gamma^0) = 2\sigma_{v3}(s)/\mu \tag{1.2}$$

Чтобы обеспечить конечность напряжений на «бесконечности», функция Ψ ищется в виде [2]:

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= a_0 + a_{-1}/\xi + \Psi_0(\xi), & \Psi_0(\xi) &= a_{-2}/\xi^2 + a_{-3}/\xi^3 + \dots \\ a_0 &= (\sigma_{13}^\infty - i \sigma_{23}^\infty)/\mu \lambda, & a_{-1} &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

С учетом (1.3) граничное условие (1.2) может быть переписано в виде

$$\Psi_0 \exp(i\gamma^0) + \bar{\Psi}_0 \exp(-i\gamma^0) = 2\sigma_{v3}/\mu - a_0 \exp(-i\gamma^0) - \bar{a}_0 \exp(i\gamma^0) \tag{1.4}$$

Пусть функция $\xi = \omega(\chi)$ реализует конформное отображение внешности единичного круга $|\chi| \geq 1$ на внешность лунки. Если $f_0(\chi) = \Psi_0[\omega(\chi)]$.

то граничное условие (1.4) переходит в следующее ($|\sigma|=1$):

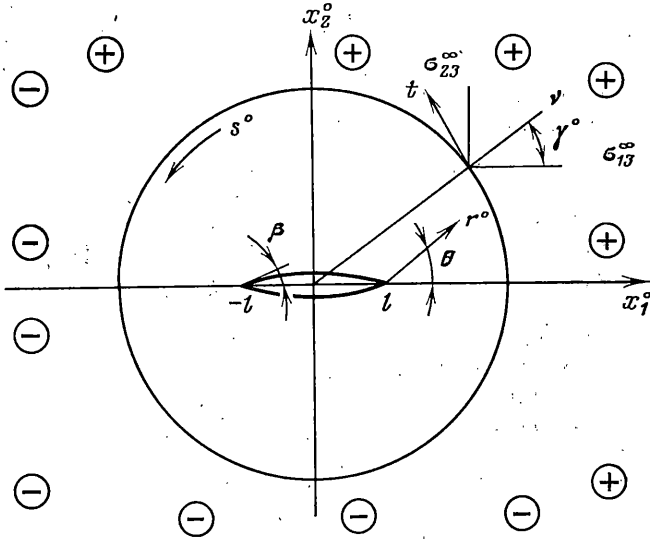
$$f_0(\sigma)\sigma\omega'(\sigma) + \overline{f_0(\sigma)\sigma\omega'(\sigma)} = 2\sigma_{23}(\sigma)|\omega'(\sigma)| / [\mu - a_0\sigma\omega'(\sigma) - \bar{a}_0\bar{\sigma}\bar{\omega}'(\sigma)] \quad (1.5)$$

Можно показать [3], что отображающая функция $\zeta = \omega(\chi)$ и обратная ей функция $\chi = \varphi(\zeta)$ имеют вид

$$\zeta = \omega(\chi) = (\chi_1^{1/k} + 1)l / (\chi_1^{1/k} - 1), \quad \chi = \varphi(\zeta) = (\zeta_1^k + 1) / (\zeta_1^k - 1) \quad (1.6)$$

$$\chi_k = (\chi + 1) / (\chi - 1), \quad \zeta_k = (\zeta + l) / (\zeta - l), \quad k = 4/2\pi / (\pi - \beta)$$

где β — угол раствора лунки (фиг. 1); значение $\beta=0$ отвечает разрезу, а $\beta=\pi/2$ — круговому отверстию.



Фиг. 1

Умножая обе части уравнения (1.5) на $d\sigma / [2\pi i(\sigma - \chi)]$ и интегрируя по окружности $|\sigma|=1$, получим

$$f_0(\chi) = [k\bar{a}_0 - a_0(1-k)] / (1-k-k\chi^2) \quad (1.7)$$

Для прежней переменной ζ в равенстве (1.7) с учетом формул (1.6) имеем

$$\Psi_0(\zeta) = \frac{[\bar{a}_0 - a_0(1/k - 1)] [(\zeta + l)^k - (\zeta - l)^k]^2}{(1/k - 1) [(\zeta + l)^k - (\zeta - l)^k]^2 - [(\zeta + l)^k + (\zeta - l)^k]^2} \quad (1.8)$$

При этом на основании представления (1.3):

$$\Psi(\zeta) = \frac{\bar{a}_0 [(\zeta + l)^k - (\zeta - l)^k]^2 - a_0 [(\zeta + l)^k + (\zeta - l)^k]^2}{(1/k - 1) [(\zeta + l)^k - (\zeta - l)^k]^2 + [(\zeta + l)^k + (\zeta - l)^k]^2} \quad (1.9)$$

Вводя у правого конца луночного выреза локальные полярные координаты r^0 и θ^0 (фиг. 1) и используя выражения (1.1) и (1.3), приходим к следующим асимптотическим представлениям:

$$\Psi \sim 2k(A + iB) / \mu\lambda(C + iD) \quad (1.10)$$

$$\sigma_{13} \sim 2k \frac{AC + BD}{C^2 + D^2}, \quad \sigma_{23} \sim -2k \frac{BC - AD}{C^2 + D^2}, \quad \sigma_{33} \sim \frac{4k^2(A^2 + B^2)}{\mu\lambda^2(C^2 + D^2)} \quad (1.11)$$

$$A = -2^{k+1} \sigma_{13}^\infty (r^0)^k l^k \cos k\theta^0$$

$$\begin{aligned} B &= \sigma_{23}^\infty (2l)^{2k} - \sigma_{13}^\infty 2^{k+1} (r^\circ)^k l^k \sin k\theta^\circ \\ C &= (1-2k) (2l)^{2k} - 2^{k+1} (r^\circ)^k l^k \cos k\theta^\circ \\ D &= -2^{k+1} (r^\circ)^k l^k \sin k\theta^\circ \end{aligned}$$

При $k=1/2$ формулы (1.11) переходят в выражения, полученные в [2] для разреза

$$\begin{aligned} \sigma_{13}/\sigma_{23}^\infty &\sim (l/2r^\circ)^{1/2} \sin 1/2\theta^\circ \\ \sigma_{23}/\sigma_{23}^\infty &\sim (l/2r^\circ)^{1/2} \cos 1/2\theta^\circ, \quad \sigma_{33}/\sigma_{23}^\infty \sim (\lambda^{-2}l/2\mu r^\circ) \sigma_{23}^\infty \end{aligned} \quad (1.12)$$

Для разреза [4, 5] получены формулы, совпадающие с выражениями (1.12) в частном случае $\lambda=1$.

Отличие формул (1.11) и (1.12) от аналогичных результатов линейной теории упругости состоит в появлении напряжения σ_{33} , имеющего более сильную особенность при $r^\circ \rightarrow 0$ по сравнению с другими компонентами.

Для тела с круговым вырезом ($k=1$) с учетом формул (1.1), (1.3) и (1.8) получаем, полагая $\xi = R \exp(i\gamma^\circ)$:

$$\Psi = a_0 - \bar{a}_0 l^2 / \xi^2 = E + iF \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \mu \lambda E, \quad \sigma_{23} = -\mu \lambda F, \quad \sigma_{33} = \mu (\lambda^{-4} - \lambda^2 + E^2 + F^2) \\ E &= [\sigma_{13}^\infty - (l^2/R^2) \sigma_{13}^\infty \cos 2\gamma^\circ - (l^2/R^2) \sigma_{23}^\infty \sin 2\gamma^\circ] / \mu \lambda \\ F &= [\sigma_{13}^\infty (l^2/R^2) \sin 2\gamma^\circ - (l^2/R^2) \sigma_{23}^\infty \cos 2\gamma^\circ - \sigma_{33}^\infty] / \mu \lambda \end{aligned} \quad (1.14)$$

2. Рассмотрим цилиндр с вырезом, в который вставлен скрепленный с материалом жесткий стержень с поперечным сечением в виде круговой луночки (фиг. 1). Цилиндр «на бесконечности» деформируется равномерными касательными напряжениями $\sigma_{13}^\infty, \sigma_{23}^\infty$.

При отсутствии массовых сил основная комплексная функция $\Psi(\xi)$ для такой задачи удовлетворяет деформационному условию жесткого края [6]:

$$\Psi \exp(i\gamma^\circ) - \bar{\Psi} \exp(-i\gamma^\circ) = 0 \quad (2.1)$$

Используя соотношения (1.3), (1.6), приходим к условию на контуре

$$f_0(\sigma) \sigma \omega'(\sigma) - \overline{f_0(\sigma) \sigma \omega'(\sigma)} = -a_0 \sigma \omega'(\sigma) + \bar{a}_0 \bar{\sigma} \bar{\omega}'(\bar{\sigma}) \quad (2.2)$$

Преобразуя (2.2), как и при решении предыдущей задачи, получаем

$$f_0(\chi) = [a_0(1-k) + \bar{a}_0 k] / (k\chi^2 + k - 1) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= a_0 + \Psi_0(\xi) = \\ &= \frac{k \{ a_0 [(\xi+l)^k + (\xi-l)^k]^2 + \bar{a}_0 [(\xi+l)^k - (\xi-l)^k]^2 \}}{k [(\xi+l)^k + (\xi-l)^k]^2 - (1-k) [(\xi+l)^k - (\xi-l)^k]^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Используя выражения (1.1) и локальные полярные координаты, приходим к следующим асимптотическим формулам ($\lambda=1$):

$$\Psi \sim 2k(G+iH) / [\mu(L+iM)] \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &\sim 2k(GL+HM) / (L^2+M^2) \\ \sigma_{23} &\sim -2k(HL-GM) / (L^2+M^2) \\ \sigma_{33} &\sim 4k^2(G^2+H^2) / [(L^2+M^2)\mu] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$G = \sigma_{13}^\infty (2l)^{2k} + \sigma_{23}^\infty 2^{k+1} (r^\circ)^k l^k \sin k\theta^\circ$$

$$H = \sigma_{23}^\infty 2^{k+1} (r^\circ)^k l^k \cos k\theta^\circ$$

$$L = (2k-1) (2l)^{2k} + 2^{k+1} (r^\circ)^k l^k \cos k\theta^\circ$$

$$M = 2^{k+1} (r^\circ)^k l^k \sin k\theta^\circ$$

В частном случае при $k=1/2$, когда в цилиндр вставлена скрепленная с материалом жесткая пластина, имеем

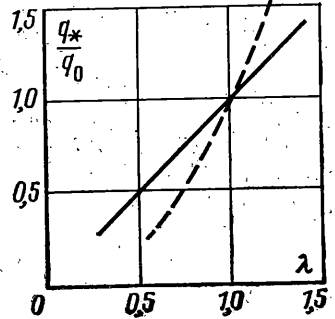
$$\begin{aligned} \sigma_{13}/\sigma_{13}^{\infty} &\sim (l/2r^{\circ})^{1/2} \cos \theta^{\circ}/2 \\ \sigma_{23}/\sigma_{13}^{\infty} &\sim (l/2r^{\circ})^{1/2} \sin \theta^{\circ}/2, \quad \sigma_{33}/\sigma_{13}^{\infty} \sim \sigma_{13}^{\infty} l/\mu 2r^{\circ} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для другого предельного случая $k=1$, когда в цилиндр вставлен жесткий стержень с круговым поперечным сечением, получим, пользуясь формулой (2.4)

$$\Psi = a_0 + \bar{a}_0 l^2/\zeta^2 \quad (2.8)$$

Из выражений (1.1) для напряжений в любой точке тела имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \mu N, \quad \sigma_{23} = -\mu T, \\ \sigma_{33} &= \mu [N^2 + T^2] \\ N &= [\sigma_{13}^{\infty} + (l^2/R^2) \sigma_{13}^{\infty} \cos 2\gamma^{\circ} + \\ &+ (l^2/R^2) \sigma_{23}^{\infty} \sin 2\gamma^{\circ}] / \mu \\ T &= [\sigma_{23} (l^2/R^2) \cos 2\gamma^{\circ} - \sigma_{23}^{\infty} - \\ &- \sigma_{13}^{\infty} (l^2/R^2) \sin 2\gamma^{\circ}] / \mu \end{aligned} \quad (2.9)$$



Фиг. 2

3. Используя соотношения п. 1, рассмотрим вопрос о разрушении тела с трещиной-разрезом. Для определения разрушающей нагрузки примем путь, объединяющий подход В. В. Новожилова [7] с использованием максимального главного напряжения. Найдем по формулам (1.12) максимальное главное напряжение σ_{\max} и осредним его по площади круга радиуса d (d — некоторый малый линейный размер, характеризующий структуру материала). Результат осреднения приравняем пределу прочности на разрыв σ_c :

$$\frac{1}{\pi d^2} \int_0^d \int_0^{2\pi} \sigma_{\max} r^{\circ} dr d\theta^{\circ} = \sigma_c \quad (3.1)$$

Используя формулы (1.12), получим

$$\sigma_{\max} = (\lambda^{-2}/\mu) (\sigma_{23}^{\infty})^2 (l/2r^{\circ}) \quad (3.2)$$

Подставляя выражения (3.2) в критерий (3.1), получим значение разрушающей нагрузки для тела с разрезом:

$$q_* = (\sigma_{23}^{\infty})^* = \lambda (\mu \sigma_c d/l)^{1/2} \quad (3.3)$$

Согласно оценке В. В. Новожилова [7], $\sigma_c d = p\gamma$, где γ — энергия, необходимая для создания единицы новой поверхности, а p — безразмерный множитель порядка единицы. Поэтому формулу (3.3) можно переписать в виде $q_* = \lambda (p\mu\gamma/l)^{1/2}$.

При $\lambda=1$ и $p=1,13^2$ эта формула совпадает с формулой, полученной для продольного сдвига на основе линейной теории [8]. Таким образом формулу

$$q_* = 1,13\lambda (\mu\gamma/l)^{1/2} \quad (3.4)$$

можно рассматривать как обобщение на случай больших деформаций полученного в [8] результата линейной теории разрушения.

Сопоставим значение разрушающей нагрузки, определяемое формулой (3.4) с результатом из [2]. На фиг. 2 штриховой линией показан результат [2], полученный при использовании энергетического критерия Си [8]. Сплошной линией показан результат, полученный здесь с помощью силового критерия (3.1).

Автор благодарит К. Ф. Черных за помощь, оказанную при работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965, с. 455.
2. Черных К. Ф., Литвищенко З. Н. Трещина продольного сдвига в нелинейно-упругом теле. — Проблемы прочности, 1983, № 4, с. 62–66.
3. Ханович И. Г. Пограничный слой и сопротивление. Л.— М.: ОНТИ. Глав. ред. судостроит. лит., 1936. 198 с.
4. Knowls I. K. The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids. — Intern. J. Fracture, 1977, v. 13, No. 5, p. 611–639.
5. Lo K. K. Finite deformation crack in an infinite body under anti-plane simple shear. — Intern. J. Solids and Structures, 1977, v. 13, No. 2, p. 1219–1223.
6. Черных К. Ф. Основные зависимости нелинейной теории упругости. — Актуальные проблемы нелинейной механики сплошных сред. Сб. статей. Л.: ЛГУ, 1977, с. 52–67.
7. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 2, с. 212–222.
8. Разрушение. Под ред. Либовица. Т. 2. М.: Мир, 1975. 764 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
21.IX.1983