

УДК 539.375

К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТИВНЫХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА С ТРЕЩИНАМИ

ДЫСКИН А. В.

Материалы с дефектами и горные породы в определенных случаях моделируют упругими телами с большим числом трещин. При этом важно располагать простыми и надежными методами расчета их эффективных деформационных характеристик. Эта задача является предельным случаем общей задачи об эффективных характеристиках микронеоднородных тел и состоит в отыскании эквивалентной сплошной среды, элементарные объемы которой при однородном нагружении деформируются, в среднем, так же, как элементарные объемы исходного тела, содержащие большое число трещин или неоднородностей.

Когда трещины расположены достаточно редко, так, что их взаимодействием можно пренебречь, задача решается независимым суммированием эффектов от трещин, причем каждая из них рассматривается как одиночная в исходном материале; однородно нагруженном на бесконечности заданными напряжениями. Это — приближение малой концентрации (см. [1], там же обзор более ранних работ). Под концентрацией трещин здесь понимается концентрация областей возмущения вокруг них, т. е. величина порядка куба (для плоской задачи — квадрата) отношения среднего размера трещин к среднему расстоянию между ними.

При более плотном расположении трещин необходимо учитывать их взаимодействие. Если трещины расположены в узлах правильной решетки, то решение облегчается периодичностью полей напряжений и деформаций (см., например, [2, 3], где рассматривалась плоская задача о двоякопериодической системе параллельных щелей).

В общем случае расположения трещин используют приближенные методы, из которых наиболее предпочтительны методы самосогласования. В них эффективные характеристики вычисляются на основе решения задачи об изолированной трещине в безграничной однородной среде и в однородном поле напряжений, а взаимодействие трещин учитывается изменением либо поля напряжений [4], либо характеристик среды [4, 5–10].

В первом случае вводится эффективное однородное поле напряжений, учитывающее влияние остальных трещин, а свойства среды предполагаются совпадающими со свойствами материала (см., например, [4], где дополнительно принято, что эффективное поле одинаково для всех трещин). При этом для равномерно и независимо распределенных трещин результат получился такой же, как если бы они не взаимодействовали.

В [4, 5–10] вводится эффективная среда, учитывающая взаимодействие трещин. Ранние варианты этого метода, предложенные в [5, 6] для вычисления эффективных характеристик микронеоднородных тел, основаны на предположении, что в теле с данной концентрацией неоднородностей каждая из них находится в одной и той же (искомой) эффективной среде. При этом, как отмечается в [6], если неоднородности представляют собой объемные поры или жесткие включения и находятся в несжимаемом материале, то эффективная среда оказывается, соответственно, абсолютно податливой или абсолютно жесткой при умеренных концентрациях неоднородностей, вполне допускающих еще их изолированное взаиморасположение. Применение этого варианта метода самосогласования к хаотически ориентированным трещинам в изотропном материале [7] привело к тому, что с ростом концентрации трещин эффективный коэффициент Пуассона становился отрицательным.

Преодоление указанных трудностей было достигнуто отказом от предположения, что все неоднородности находятся в одинаковой эффективной среде [4, 8–10]. В [4] эта идея была применена для случая широкого распределения трещин по размерам, когда всю их совокупность можно разбить на группы, такие, что в каждую группу попадают трещины близких размеров, равномерно и редко расположенные. Поэтому, если в материале есть только одна группа трещин (любая), то для определения эффективных характеристик можно воспользоваться приближением малой концентрации. Размеры трещин разных групп отличаются очень сильно, так что трещины каждого следующего размера допустимо считать находящимися в эффек-

гивной сплошной среде с характеристиками, определяемыми всеми трещинами меньших размеров. Внося в материал последовательно группы трещин, начиная с самых маленьких, можно вычислить эффективные характеристики материала с полным набором трещин. В пределе эта процедура сводится к решению некоторой системы дифференциальных уравнений. Та же дифференциальная процедура была распространена в [8, 9] на случай произвольного распределения трещин по размерам, вплоть до одинаковых, а также на материалы с порами и жесткими включениями и материалы с различными комбинациями этих неоднородностей. Отмечено, что при отсутствии широкого распределения неоднородностей по размерам важно только, чтобы их взаиморасположение было достаточно неупорядоченным и равномерным. Тем самым ограничиваются концентрации, до которых возможно применение метода. Сопоставление расчетов с экспериментами подтвердило применимость этого метода вплоть до концентрации трещин (неоднородностей), соответствующих изменению деформируемости примерно на порядок.

К аналогичной дифференциальной процедуре пришли авторы работы [10], отметившие также недостатки подхода [7]. Соответственно, выражения из [10] для эффективных модулей изотропного материала с хаотически ориентированными взаимодействующими дискообразными трещинами сводятся к выражениям, полученным в [1].

Вычисление эффективных характеристик материала с взаимодействующими трещинами или дискретными неоднородностями, такими, как изолированные поры, жесткие включения и т. д., возможно путем разложения их в ряд по степеням концентрации, как по малому параметру. Этот подход развит в [11–13]. В принципе таким путем можно получить точный результат, если суметь вычислить все члены ряда и просуммировать его. Первое приближение (линейный член ряда) представляет собой приближение невзаимодействующих трещин (малой концентрации), и для его вычисления достаточно знать функцию распределения трещин по размерам и ориентациям и располагать решением задачи о раскрытии трещины в безграничном материале. Второе приближение (квадратичный член) учитывает парные взаимодействия трещин. Для его вычисления нужно знать функцию распределения пар трещин и располагать решением задачи о двух произвольно расположенных трещинах. Аналогично вычисляются остальные приближения.

Естественно попытаться сопоставить этот путь решения с методом самосогласования, основанным на пошаговой дифференциальной процедуре [1, 8–10]. При этом надо в первом методе принять допущения о характере расположения трещин, соответствующие второму.

Такая задача решается в публикуемой работе в плоской постановке для равномерно распределенных взаимно параллельных трещин, сильно различающихся по размерам. Вычислено второе приближение (квадратичные члены в разложении эффективных характеристик в ряд по степеням концентрации) и показано их совпадение с квадратичными членами, получаемыми методом самосогласования [9].

1. Рассмотрим изотропную упругую пластину с взаимно параллельными трещинами (щелями) сильно различающихся размеров, нагруженную на бесконечности напряжениями σ_{ij}^0 . Ее деформация складывается из деформации материала и дополнительной деформации, обусловленной раскрытием трещин; для определения последней необходимо, как следует из [1], вычислить распределение скачка смещения на каждой трещине, проинтегрировать по ее длине (т. е. посчитать площади раскрытия), результаты сложить и отнести к единице площади. Распределение скачка смещения однозначно определяется распределением напряжений, которое возникло бы в сплошном материале на месте трещины вследствие внешнего нагружения и взаимодействия трещин.

Рассмотрим вначале случай, когда в пластине имеются трещины двух размеров $l_1 \ll l_2$, причем трещины каждого размера расположены редко, и их можно считать невзаимодействующими. Тогда нужно учитывать взаимодействие только между каждой большой трещиной и окружающими ее маленькими.

Свяжем с центром выделенной большой трещины систему координат x_1, x_2 , направив ось x_1 вдоль трещины (см. фигуру, где показана большая трещина в окружении маленьких). Закрепим берега окружающих ее маленьких трещин и приложим нагрузку. Напряжения на месте маленькой трещины можно ввиду ее малости считать однородными, они равны

$$\sigma_{ij}^{l_1, \alpha} = \sigma_{ij}^0 + T_{ijkn}^{l_2}(x_1^\alpha, x_2^\alpha) \sigma_{kn}^0 \quad (1.1)$$

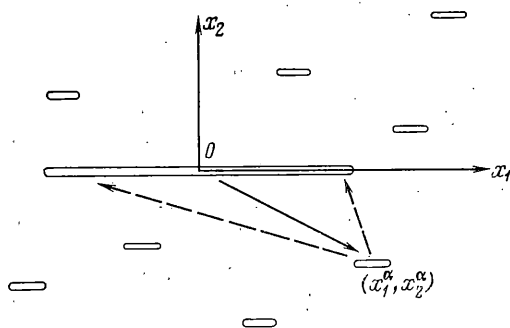
где (x_1^α, x_2^α) — координаты центра маленькой трещины с номером α , а тензор $T_{ijkn}^l(x_1, x_2)$ означает соответствующее решение для изолированной трещины (его вид будет дан ниже). Здесь и далее подстрочные латинские индексы принимают значения 1, 2. Этот шаг на фигуре показан сплошной линией со стрелкой.

Закрепим смещенные берега большой трещины и освободим маленькие. Они создадут на закрепленных берегах большой трещины дополнительные напряжения, так что если большую трещину освободить, то ее раскрытие будет вызываться распределением напряжений

$$\sigma_{ij}^{l_2}(\xi) = \sigma_{ij}^\circ + \sum_{\alpha} T_{ijkn}^{l_1}(\xi - x_1^\alpha, -x_2^\alpha) \sigma_{kn}^{l_1, \alpha} \quad (1.2)$$

$$\xi \in (-1/2 l_2, 1/2 l_2)$$

суммирование ведется по всем маленьким трещинам. Этот шаг показан на фигуре штриховыми линиями.



Прежде чем использовать полученное приближение (1.1) и (1.2) для вычисления распределений скачков смещения, заметим, что каждое распределение нужно будет проинтегрировать по длине трещины, а затем полученные результаты просуммировать. Ввиду линейности сначала просуммируем напряжения для одинаковых трещин, а вычислять скачки смещения и интегрировать по длине будем потом. Кроме того, если предположить, что распределение центров трещин обладает свойством эргодичности, то достаточно найти значения напряжений, усредненные по всевозможным расположениям трещин, и умножить на их количество.

Предположим, что большая трещина окружена эллиптической областью с осями $l_1 + l_2$ и $[l_1(l_1 + 2l_2)]^{1/2}$, свободной от малых трещин; вне этой области малые трещины распределены равномерно (с ростом отношения l_2/l_1 введенное распределение приближается к обычному равномерному распределению). Тогда средние напряжения имеют вид

$$\langle \sigma_{ij}^{l_1} \rangle = \sigma_{ij}^\circ + \int T_{ijkn}^{l_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \sigma_{kn}^\circ \quad (1.3)$$

$$\langle \sigma_{ij}^{l_2} \rangle = \sigma_{ij}^\circ + N_1 \int T_{ijkn}^{l_1}(\xi - x_1, -x_2) dx_1 dx_2 \sigma_{kn}^\circ + N_1 \int T_{ijkn}^{l_1}(\xi - x_1, -x_2) T_{knfq}^{l_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \sigma_{fq}^\circ \quad (1.4)$$

Здесь $\langle \sigma_{ij}^l \rangle$ — средние напряжения для трещины длины l , N_1 — количество маленьких трещин в единице площади (интегрирование ведется по части плоскости, расположенной вне окружающей большую трещину эллиптической области).

Тензор $T_{ijkn}^l(x_1, x_2)$, симметричный по первой и второй паре индексов, связывает поле напряжений в бесконечной пластине с трещиной с одно-

родными напряжениями на ее берегах (т. е. если напряжения на берегах равны $-\sigma_{kn}$, то поле напряжений вокруг трещины $\sigma_{ij}(x_1, x_2) = -T_{ijkn}(x_1, x_2)\sigma_{kn}^0$). Он вычисляется на основе известного решения этой задачи (см., например, [14]); его ненулевые компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} T_{1112}(x_1, x_2) &= 2 \operatorname{Im} Q(z) + y \operatorname{Re} Q'(z) \\ T_{1122}^l(x_1, x_2) &= T_{1212}^l(x_1, x_2) = \operatorname{Re} Q(z) - y \operatorname{Im} Q'(z) \\ T_{1222}^l(x_1, x_2) &= T_{2212}^l(x_1, x_2) = -y \operatorname{Re} Q'(z) \\ T_{2222}^l(x_1, x_2) &= \operatorname{Re} Q(z) + y \operatorname{Im} Q'(z) \\ Q(z) &= z(z^2 - l^2/4)^{-1/2} - 1, \quad Q'(z) = dQ/dz, \quad z = x_1 + ix_2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

При $|z| \rightarrow \infty$ тензор $T_{ijkn}^l \sim z^{-2}$, поэтому интеграл в (1.3) и первый интеграл в (1.4) являются условно сходящимися; это связано с тем, что пластина изначально принята бесконечной. Для определения значений этих интегралов рассмотрим конечную пластину с трещиной, берега которой однородно нагружены, а края пластины свободны от нагрузок. Тогда можно показать, что вследствие условий равновесия аналогичные интегралы по площади пластины равны нулю независимо от размеров пластины. Устремляя их к бесконечности, получим, что искомые интегралы в (1.3) и (1.4) также равны нулю.

Второй интеграл в (1.4) вычисляется в эллиптической системе координат (подстановка $z = l_2/2(w + w^{-1})$; область интегрирования имеет вид $|w| > 1 + a + La(2+a)^{1/2}$, $a = l_1/l_2$), причем в $T_{ijkn}^l(x_1, x_2)$ удерживаются только члены порядка l_1^2 . В результате интеграл имеет вид $l_1^2 \Lambda_{ijpq}$, где тензор Λ_{ijpq} , симметричный по первой и последней паре индексов, равен

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij11} &= \Lambda_{1112} = \Lambda_{1222} = \Lambda_{2212} = 0 \\ \Lambda_{1122} &= 1/8\pi, \quad \Lambda_{1212} = 1/16\pi, \quad \Lambda_{2222} = 3/8\pi \end{aligned} \quad (1.6)$$

Окончательно, с точностью до членов, линейных по концентрации маленьких трещин ($\Delta\Omega = N_1 l_1^2$), будем иметь

$$\langle \sigma_{ij}^{l_1} \rangle = \sigma_{ij}^0, \quad \langle \sigma_{ij}^{l_2} \rangle = \sigma_{ij}^0 + \Delta\Omega \Lambda_{ijpq} \sigma_{pq}^0 \quad (1.7)$$

Таким образом, средние напряжения однородны, поэтому для определения интегралов от средних скачков смещения можно использовать решение задачи об изолированной трещине (см., например, [1]):

$$A_i^{l_1} = 1/2(\pi/E_0) l_1^2 \sigma_{i2}^0, \quad A_i^{l_2} = 1/2(\pi/E_0) l_2^2 [\sigma_{i2}^0 + \Delta\Omega \Lambda_{ijpq} \sigma_{pq}^0] \quad (1.8)$$

где A_i^l — проинтегрированная по длине трещины l i -я компонента скачка смещения, E_0 — модуль Юнга материала.

Осталось воспользоваться общим соотношением для деформации материала с трещинами [9]; в данном случае оно имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + 1/2 N_1 (\delta_{i2} A_j^{l_1} + \delta_{j2} A_i^{l_1}) + 1/2 N_2 (\delta_{i2} A_j^{l_2} + \delta_{j2} A_i^{l_2}) \quad (1.9)$$

где ε_{ij}^0 — деформация материала без трещин, N_2 — количество больших трещин в единице площади. Полагая, что их концентрация такая же, как и концентрация маленьких трещин, т. е. $N_2 l_2^2 = \Delta\Omega$, и подставляя (1.8) в (1.9), окончательно получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^0 + 1/2(\pi/E_0) \Delta\Omega [\delta_{i2} \sigma_{j2}^0 + \delta_{j2} \sigma_{i2}^0 + \\ &+ 1/2 \Delta\Omega (\delta_{i2} \Lambda_{j2pq} + \delta_{j2} \Lambda_{i2pq}) \sigma_{pq}^0] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Отметим, что продолжение описанного процесса закрепления и открепления берегов трещин дает члены более высокого порядка, чем $\Delta\Omega^2$ в выражении для деформации (1.10). Поэтому, если ограничиваться пар-

ными взаимодействиями, то в выражениях для средних напряжений достаточно удерживать члены, линейные по концентрации трещин. Члены более высокого порядка необходимы, если наряду с парными взаимодействиями учитываются более сложные, например тройные.

2. Описанная процедура учета парных взаимодействий обобщается на произвольное количество размеров трещин $l_1 \ll l_2 \ll l_3 \ll \dots$. При этом предполагается, что трещины разных размеров распределены независимо, т. е. можно пренебречь введенным выше ограничением на распределение трещин данного размера, вызванным наличием трещин больших размеров. Полагая концентрацию трещин каждого размера одинаковой и равной $\Delta\Omega$, получим, что для трещин длины l_m средние напряжения равны

$$\langle \sigma_{ij}^{l_m} \rangle = \sigma_{ij}^{\circ} + (m-1) \Delta\Omega \Lambda_{ijpq} \sigma_{pq}^{\circ} \quad (m=1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

Сделаем замечание относительно предположений, принятых в [4]. Соотношение (2.1) показывает, что гипотеза об однородности эффективного поля напряжений верна, по крайней мере с точностью $\Delta\Omega$, а гипотеза о его одинаковости для всех трещин не подтверждается.

Компоненты скачка смещения, проинтегрированные по длине трещины, равны

$$A_i^{l_m} = 1/2 (\pi/E_0) l_m^2 [\sigma_{i2}^{\circ} + (m-1) \Delta\Omega \Lambda_{i2pq} \sigma_{pq}^{\circ}] \quad (2.2)$$

Введем суммарную концентрацию трещин Ω . В соответствии с определением [1] $\Omega = M \Delta\Omega$, где M — количество групп трещин разных размеров. Вычисляя на основе (2.2) деформацию (так же, как это сделано в п. 1) и устремляя $\Delta\Omega$ к нулю при фиксированном Ω , получим

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\circ} + 1/4 (\pi/E_0) \Omega [\delta_{i2} \sigma_{j2}^{\circ} + \delta_{j2} \sigma_{i2}^{\circ} + 1/2 \Omega (\delta_{i2} \Lambda_{j2pq} + \delta_{j2} \Lambda_{i2pq}) \sigma_{pq}^{\circ}] \quad (2.3)$$

Отсюда видно, что изотропная пластина с взаимно параллельными трещинами становится ортотропной. Осталось, следуя [9], ввести эффективные податливости, следующим образом связывающие средние деформации и напряжения:

$$\varepsilon_{11} = a_{11} \sigma_{11}^{\circ} + a_{12} \sigma_{22}^{\circ}, \quad \varepsilon_{22} = a_{12} \sigma_{11}^{\circ} + a_{22} \sigma_{22}^{\circ}, \quad \varepsilon_{12} = 1/2 a_{66} \sigma_{12}^{\circ} \quad (2.4)$$

Тогда из (2.3) и (2.4) следует (ν_0 — коэффициент Пуассона материала):

$$\begin{aligned} E_0 a_{11} &= 1, & E_0 a_{12} &= -\nu_0 \\ E_0 a_{22} &= 1 + 1/2 \pi \Omega + 3/32 \pi^2 \Omega^2 \\ E_0 a_{66} &= 2(1 + \nu_0) + 1/2 \pi \Omega + 1/32 \pi^2 \Omega^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Трещины изменяют только податливости a_{22} и a_{66} ; податливости a_{11} и a_{12} совпадают с соответствующими константами материала.

Сравним (2.5) с результатом, полученным в [9] методом самосогласования (в формуле (1.5) работы [9] перед $\{M_{(1)}\}$ вместо $1/8\pi$ должно быть $1/4\pi$; после исправления получаются формулы (2.6)):

$$\begin{aligned} E_0 a_{11} &= 1, & E_0 a_{12} &= -\nu_0, & E_0 a_{22} &= (1 + 1/8 \pi \Omega)^4 \\ E_0 a_{66} &= 2(1 + \nu_0) + 1/2 \pi \Omega + 1/32 \pi^2 \Omega^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Видно, что (2.5) и (2.6) совпадают с точностью Ω^2 .

Таким образом показано, что выражения для эффективных податливостей пластины с равномерно и независимо распределенными взаимно параллельными трещинами сильно различающихся размеров, полученные методом разложения в ряд по степеням концентрации трещин и методом самосогласования [9], совпадают по крайней мере до квадратичных членов включительно. Для получения квадратичного члена нет необходимости полностью учитывать парные взаимодействия; обусловленные ими средние напряжения достаточно знать с точностью только до линейных членов.

На основе учета парных взаимодействий могут быть также вычислены

(с точностью Ω) средние по всевозможным расположениям трещин значения коэффициентов интенсивности напряжений вблизи концов самой большой трещины (в областях, свободных от малых трещин). Используя (2.1), получим

$$\langle K_I \rangle = \sqrt{\pi l} / 2 [\sigma_{22}^{\circ} + \Omega \Lambda_{22pq} \sigma_{pq}^{\circ}]$$

$$\langle K_{II} \rangle = \sqrt{\pi l} / 2 [\sigma_{12}^{\circ} + \Omega \Lambda_{12pq} \sigma_{pq}^{\circ}]$$

Здесь $\langle K_I \rangle$ и $\langle K_{II} \rangle$ — средние значения коэффициентов интенсивности напряжений нормального отрыва и поперечного сдвига соответственно, l — длина наибольшей трещины, Ω — концентрация трещин меньших размеров, σ_{ij}° — нагрузка на бесконечности; Λ_{ijpq} определяется соотношением (1.6).

Автор выражает признательность Р. Л. Салганику за ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салганик Р. Л. Механика тел с большим числом трещин. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 149–158.
2. Ержанов Ж. С., Кайдаров К. К., Матвеева В. П. Математическое обоснование расчетной модели горного массива с упорядоченной системой трещин. — В кн.: Современные проблемы механики горных пород. Л.: Наука, 1972, с. 45–50.
3. Ержанов Ж. С., Тусунов М. Т. Модель сжимаемого горного массива. — В кн.: Проблемные вопросы механики горных пород. Алма-Ата: Наука, 1972, с. 3–26.
4. Канаун С. К. Пуассоновское множество трещин в упругой сплошной среде. — ПММ, 1980, т. 4, вып. 6, с. 1129–1139.
5. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. — J. Mech. and Phys. Solids, 1965, v. 13, No. 4, p. 213–222.
6. Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials. — J. Mech. and Phys. Solids, 1965, v. 13, No. 4, p. 223–227.
7. Budiansky B., O'Connell R. J. Elastic moduli of a cracked solid. — Internat. J. Solid. and Structure, 1976, v. 12, No. 2, p. 81–97.
8. Вавакин А. С., Салганик Р. Л. Об эффективных характеристиках неоднородных сред с изолированными неоднородностями. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 65–75.
9. Вавакин А. С., Салганик Р. Л. Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2, с. 95–107.
10. Heryey F. S., Pomphrey N. Self-consistent elastic moduli of a cracked solid. — Geophys. Res. Lett., 1982, v. 9, No. 8, p. 903–906.
11. Batchelor G. K. Transport properties of two-phase materials with random structure. — In: Annal. Review of Fluid Mechanics. Palo Alto, Calif., Ann. Rev. Inc., 1974, v. 6, p. 227–255.
12. Jeffrey D. J. Group expansion for the bulk properties of a statistically homogeneous, random suspension. — Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1974, v. 338, No. 1615, p. 503–516.
13. Willis J. R., Acton J. R. The overall elastic moduli of a dilute suspension of spheres. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1976, v. 29, No. 2, p. 163–177.
14. Мушелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.IV.1984