

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СЛОИСТОЙ ПРЕГРАДЕ ПРИ СОУДАРЕНИИ С ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ ВРАЩЕНИЯ

ПЕТРОВ И. Б.

Численно исследуется осесимметричная задача проникания абсолютно жесткого цилиндра в деформируемую преграду, имеющую слоистую структуру, реология которой описывается уравнениями, идеально упругопластической среды Прандтля — Рейсса. Задачи о распространении волн в слоистых средах рассматривались в [1–4].

Существенными особенностями такого рода задач являются ярко выраженный волновой характер решения и большие деформации преграды. Численное их решение позволяет получать детальную картину процессов взаимодействия ударников с различными деформируемыми преградами, однако сложный характер этих задач предьявляет жесткие требования к выбору численного метода их решения, а также используемых в расчетах независимых переменных.

В частности, при расчетах рассматриваемых процессов использование традиционных лагранжевых переменных приводит к сильному искажению (или к нарушению регулярности) разностной сетки и необходимости ее периодической перестройки, что может привести к заметному снижению точности; использование фиксированных в пространстве эйлеровых координат приводит к трудностям при расчете граничных точек и к необходимости выбора большого числа расчетных узлов для получения приемлемой точности решения. Указанные подходы использовались при численном решении подобных задач в [5–8].

В публикуемой работе используется подвижная лагранжево-эйлерова система координат (эйлерова по одному, лагранжева по второму направлениям) в рамках подхода, развитого в [9–11], и сеточно-характеристический метод [12], позволяющий наиболее естественно строить вычислительный алгоритм на границах области интегрирования, учитывать физику задачи и т. д. Используемая явная схема первого порядка точности относится к числу схем с положительной аппроксимацией (монотонные или мажорантные разностные схемы) и, как показано в [13], имеет минимальную аппроксимационную вязкость среди явных двухслойных схем такого рода, что является важным свойством при сквозном счете разрывных решений без явного выделения поверхностей разрывов.

1. Рассматривается распространение волн напряжений в идеальной упругопластической среде, описываемой уравнениями Прандтля — Рейсса при условии текучести Мизеса. Полная система уравнений записывается при отсутствии массовых сил в изотермическом приближении в виде [14, 15]:

$$\rho v^i - \nabla_j \sigma^{ij} = 0, \quad \sigma^{ij} = Q_{ij}^{kl} \nabla_k v_l \quad (1.1)$$

$$Q_{ij}^{kl} = \lambda \delta_j^i \delta_l^k + \mu (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_j^k \delta_i^l) - \mu H(f) S_{ij} S^{kl} / q^2$$

Здесь  $t$  — время,  $x^i$  — эйлерова система координат с метрическим тензором  $g_{ij}$ ,  $\rho$  — плотность материала,  $v^i$  — вектор скорости,  $\sigma^{ij}$  — тензор напряжений Коши,  $\nabla_k$  — ковариантная производная по  $x^k$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  — упругие константы Ламе,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{hh}$  — девиатор напряжений,  $\delta_j^i$  — символ Кронекера,  $q$  — предел текучести на сдвиг, входящий в условие Мизеса  $f = S_{ij} S_{ij} - 2q^2 = 0$  ( $q = \text{const}$ ),  $H(f)$  — функция Хэвисайда; точка означает производную по времени, точка с галочкой — производную Яумана.

Далее будем пользоваться безразмерными переменными, которые по написанию совпадают с размерными  $x_i/x_0$ ,  $tV_0/x_0$ ,  $v^i/V_0$ ,  $\sigma_{ij}/q$ ,  $\lambda/q$ ,  $\mu/q$ ,  $V_0 = (q/\rho_0)^{1/2}$ .

Система (1.1) в случае осевой симметрии запишется в виде

$$\partial u / \partial t + A^k \partial u / \partial x_k - f = 0 \quad (k=1, 2)$$

$$u = \{v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{33}\} \quad (1.2)$$

$$f = \left\{ \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\rho R}, \frac{\sigma_{12}}{\rho R}, Q_{11}{}^{33} \frac{v_1}{R}, Q_{12}{}^{33} \frac{v_1}{R}, Q_{22}{}^{33} \frac{v_1}{R}, Q_{33}{}^{33} \frac{v_1}{R} \right\} \quad (R \equiv x^1, z \equiv x^2)$$

Компоненты матриц имеют вид  $a_{ii}^k = v_k$ ,  $a_{31}^1 = a_{42}^1 = a_{41}^1 = a_{52}^1 = -1/\rho$ ,  $a_{k3}^k = -Q_{kk}{}^{11}$ ,  $a_{k4}^k = -Q_{kk}{}^{12}$ ,  $a_{k5}^k = -Q_{kk}{}^{22}$ ,  $a_{k6}^k = -Q_{kk}{}^{33}$  ( $k=1, 2$ );  $a_{i3}^k = -1/2(Q_{12}{}^{11} + Q_{21}{}^{11})$ ,  $a_{i4}^k = -1/2(Q_{12}{}^{12} + Q_{21}{}^{12})$ ,  $a_{i5}^k = -1/2(Q_{12}{}^{22} + Q_{21}{}^{22})$ ,  $a_{i6}^k = -1/2(Q_{12}{}^{33} + Q_{21}{}^{33})$ , ( $i, k=1, 2$ ;  $i \neq k$ ).

Начальные условия выбирались в форме  $u(x^k, 0) = 0$ , граничные условия на контактной части границы имеют вид  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = V_B(t)$ ,  $\sigma_N \leq 0$  ( $V_B(t)$  — скорость ударника),  $mdV/dt = \int \sigma_{22} dS$ ,  $V_B(0) = V_B^0$  ( $S$  — площадь ударника,  $V_B^0$  — скорость соударения). На свободной поверхности принималось условие  $\sigma_{n\tau} = \sigma_{nn}$ ; прилипание ударника к верхней границе преграды происходило при  $X_B \leq X_P$  (координаты основания ударника и верхней границы преграды). Тыльная поверхность полагалась свободной от нагрузок  $\sigma_{n\tau} = \sigma_{nn} = 0$ .

На правой границе  $x = \text{const}$ , которая полагалась неподвижной, ставились условия сноса  $\partial u / \partial x^1 = 0$ , на оси  $x^1 = 0$  использовались асимптотические уравнения при  $x^1 \rightarrow 0$  (при этом  $v_1 = 0$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ).

Для численных расчетов использовалась лагранжево-эйлерова система координат  $\{\eta^1, \eta^2, t\}$ , в которой  $\eta^1 = x^1$ ,  $\eta^2$  — лагранжева координата. Такой выбор независимых переменных позволяет проводить расчет преград, неоднородных в поперечном направлении без явного выделения контактного разрыва. В случае необходимости (например, значительное уменьшение шага по времени) можно провести несложную локальную перестройку узлов расчетной сетки вдоль нескольких лучей  $x^1 = \text{const}$  вблизи края ударника. При этом

$$x^i(\eta^m, 0) = x_0^i(\eta^m), \quad X^{B, N} = \int_{t_0}^t v_2 dt$$

где  $X^{B, N}$  — координаты верхней и нижней границ области интегрирования.

2. Численное решение ищется по слоям  $t = \text{const}$ , на которых вводится прямоугольная сетка с узлами, образованными плоскостями  $\eta^m = \text{const}$ . Каждый узел разностной сетки определен числами  $(l, m, n)$ , где  $\eta^1 = lh_1$ ,  $\eta^2 = mh_2$ ,  $h_i$  — шаг по пространственной координате,  $\tau_n$  — шаг по времени.

Не рассматривая подробно характеристические свойства системы (1.2) и получение разностной схемы (поскольку это сделано в [9]), представим окончательный вид используемых разностных соотношений:

$$u_{lm}^{n+1} = u_{lm}^n + \tau f_{lm}^n + \tau (b_{1lm}^n + b_{2lm}^n) \quad (2.1)$$

$$b_{1lm}^n = (\Omega_1^{-1} \Lambda_1 + \Omega_1)_{lm}^n (u_{l-1,m}^n - u_{lm}^n) / h_1 - (\Omega_1^{-1} \Lambda_1 - \Omega_1)_{lm}^n (u_{l+1,m}^n - u_{lm}^n) / h_1$$

$$b_{2lm}^n = (\Omega_2^{-1} \Lambda_2 + \Omega_2)_{lm}^n (u_{l,m-1}^n - u_{lm}^n) / h_2 - (\Omega_2^{-1} \Lambda_2 - \Omega_2)_{lm}^n (u_{l,m+1}^n - u_{lm}^n) / h_2$$

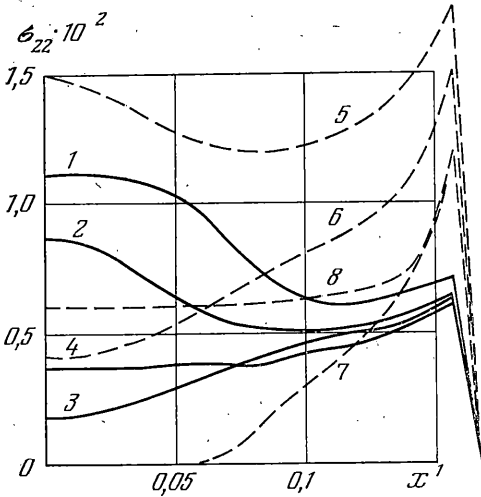
Здесь  $\Lambda_k$  — диагональные матрицы,  $\lambda_i^k$  — собственные числа матриц  $A^k$  ( $k=1, 2$ ), определяемые из характеристических соотношений  $\text{Det}(A^k - \lambda^k E) = 0$ ,  $\Omega_k = \{\omega_{ij}^k\}$  — неособенные матрицы, строками которых являются линейно-независимые левые собственные векторы матриц  $A^k$ , определяемые с точностью до их длины из совокупности линейных однородных систем уравнений  $(A^T - \lambda_i^k E) \omega_i^k = 0$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ),  $\Omega_k^{-1}$  — обратные к  $\Omega$  матрицы,  $A_k^T$  — транспонированные матрицы  $A^k$ .

Разностная схема, аппроксимирующая значения сеточных функций

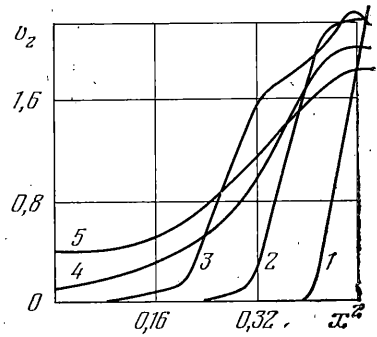
в узлах, принадлежащих верхней и нижней границам, имеет вид

$$(\omega_i^2)_{lm}^n u_{lm}^{n+1} = (\omega_i^2)_{lm}^n (u_{lm}^n + \tau f_{lm}^n + \tau b_{lm}^n) \pm \frac{\tau}{h_2} (\lambda_i^2 \omega_i^2)_{lm}^n (u_{l,m\mp 1}^n - u_{lm}^n) \quad (2.2)$$

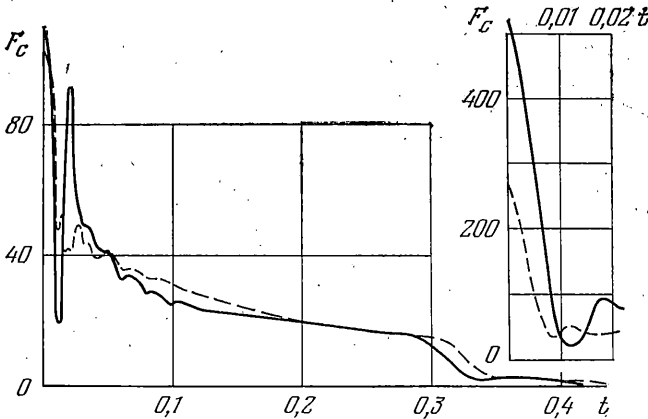
К уравнениям (2.2) добавляются граничные условия: на верхней границе при  $i=5, 6$ ; на нижней — при  $i=1, 2$ .



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Условие устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви, используемое в расчетах, записывается так:

$$\tau \leq (1/\tau_1 + 1/\tau_2)^{-1}, \quad \tau_k = h_k (\max |\lambda_i^k|) \quad (k=1, 2)$$

3. В изложенной постановке были проведены расчеты процессов соударения абсолютно жесткого цилиндрического ударника с деформируемыми двух и трехслойными преградами; свойства материалов преград близки к свойствам стали и алюминия, при этом  $\sigma_0 = 0,349 \cdot 10^7$  Па,  $V_0 = 113,7$  м/с,  $\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_0 = 2,33$ ,  $X_{1B} = 0,159$ ,  $X_2^H = 0$ ,  $X^B = 0,5$  ( $X_{1B}$  — радиус ударника).

Для стали  $\lambda_1 = 2647,6$ ,  $\mu_1 = 2250,0$ ,  $q_1 = 3,4$ ,  $\rho_1^0 = 2,89$ . Для алюминия  $\lambda_2 = 1925,5$ ,  $\mu_2 = 716,3$ ,  $q_2 = 1,0$ ,  $\rho_2^0 = 1,0$ .

Рассматривались двухслойные преграды с равными по толщине слоями (верхний слой — алюминий, нижний — сталь и наоборот; условно обозначим эти преграды символами  $AF$  и  $FA$ ), четыре двухслойные преграды, в которых третью часть по толщине занимает один слой и две трети — другой (условно обозначим преграду, две трети толщины которой занимает верхний алюминиевый слой и треть — нижний стальной,  $AAF$ ; одну треть — верхний алюминиевый и две трети — нижний стальной —  $FAA$ ; две трети — верхний стальной и треть — нижний алюминиевый —  $FAA$ );

треть – верхний стальной и две трети – нижний алюминиевый – *FAA*) и две трехслойные преграды с равными по толщине слоями (преграда, в которой нижний и верхний слой состоят из алюминия, средний – из стали, – *AFA*, преграда, в которой нижний и верхний слой состоят из стали, средний – из алюминия, – *FAF*).

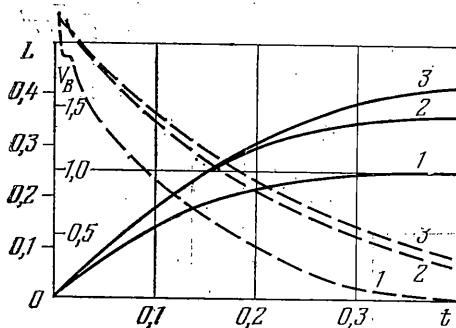
Характерной особенностью рассматриваемых процессов является наличие распространяющихся от краев контактной поверхности ударник – преграда к оси симметрии радиальных волн разгрузки (фиг. 1; кривые 1–8 соответствуют моментам времени  $1,64 \cdot 10^{-3}$ ;  $2,54 \cdot 10^{-3}$ ;  $4,3 \cdot 10^{-3}$ ;  $5,2 \cdot 10^{-2}$ ;  $1,63 \cdot 10^{-2}$ ;  $2,52 \cdot 10^{-2}$ ;  $3,4 \cdot 10^{-1}$ ;  $1,13 \cdot 10^{-1}$ ; сплошная линия соответствует трехслойной преграде типа *AFA*, штриховая – *FAF*) и поперечных, распространяющихся по толщине преграды (фиг. 2, преграда типа *AF*; кривые 1–5 соответствуют моментам времени  $1,2 \cdot 10^{-2}$ ;  $3,0 \cdot 10^{-3}$ ;  $4,83 \cdot 10^{-3}$ ;  $1,6 \cdot 10^{-2}$ ;  $3,4 \cdot 10^{-2}$ ).

Радиальные волны приводят к резкому падению силы сопротивления  $F$  в начале процесса (фиг. 3; сплошная линия соответствует преграде типа *FA*, штриховая – *AF*; скорость соударения  $V_0 = 2,33$ ); поперечные волны приводят в движение тыльную сторону преграды.

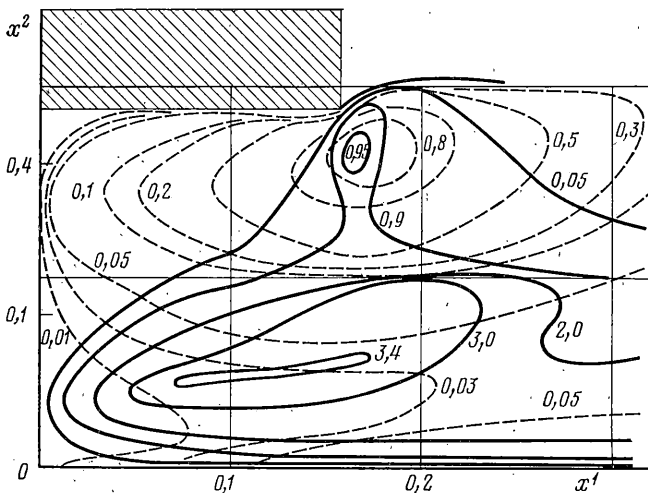
Процесс проникания, как видно из фиг. 3, условно можно разделить на три части: первая – волновая (она, в свою очередь, может быть разделена на две стадии – влияния радиальных волн и влияния поперечных волн; колебательный характер поведения силы сопротивления обусловлен многочисленными отражениями ударных волн от свободной и контактной границ); вторая часть – квазистационарная, для которой характерно слабое изменение по времени параметров процесса и их пространственных профилей; третья часть – конечная, которая характеризуется быстрым двухступенчатым падением силы сопротивления, что объясняется упругим поведением преграды в конце проникания. Следует отметить, что второй и третий участки процесса достаточно близки друг к другу и разность в конечных глубинах внедрения в преграды типа *FA* и *AF* ( $L_{FA}/L_{AF} \approx 1,4$ ,  $L_{FA}$  и  $L_{AF}$  – конечные глубины внедрения в преграды типа *FA* и *AF*) обусловлена, в основном, характером поведения силы сопротивления на первом участке.

Изменение глубины внедрения по времени имеет монотонный характер (фиг. 4, сплошные линии; кривые 1–3 соответствуют преградам типа *FFA*, *AFA*, *AAF*); кривые 1 и 3 соответствуют минимальной и максимальной глубинам проникания из рассматриваемых восьми случаев. Наиболее близко к кривой 1 лежит также кривая, соответствующая преграде типа *FA* (на фиг. 4 не показана). В поведении скорости ударника по времени имеется особенность: точка перегиба, обусловленная падением силы сопротивления за счет действия радиальных волн в начале процесса.

Изоповерхности  $\sigma_{12} = \text{const}$  и  $v_1 = \text{const}$  для преграды типа *FA* (сплошные и штриховые линии) в момент времени  $t = 1,4 \cdot 10^{-2}$  представлены на фиг. 5; видна концентрация сдвиговых напряжений вблизи края ударника и вблизи контактной



Фиг. 4



Фиг. 5

границы. Скорость материала преграды имеет положительный знак, т. е. материал вытесняется из-под ударника.

Для выяснения локализации областей разрушения ставились два критерия разрушения: по величине пластической работы и величине главных напряжений.

Эффект действия радиальных волн и, как его следствие, быстрое падение силы сопротивления имеют место и в случае изотропных преград; другие же, отмеченные в работе эффекты (немонотонность зависимости  $F_c(t)$ , обусловленная отражением волн от контактных поверхностей, различие в глубинах внедрения для преград разной компоновки, но одинаковой массы, приходящейся на единицу площади, наличие зоны концентраций сдвиговых напряжений вблизи контактной границы) характерны для преград слоистой структуры.

(4)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С., Чередниченко Р. А. Распространение в слоистом полупространстве упругих волн, вызванных поверхностной динамической нагрузкой.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1, с. 111–118.
2. Ананьева Л. А., Дорфман Г. Д., Никифоровский В. С., Тетенов Е. В. О разрушении многослойных пластин.— Физ. горения и взрыва, 1980, № 5, с. 97–102.
3. Римский В. К., Сабодаш П. Ф. Численное моделирование динамической контактной (смешанной) задачи об ударе тупым клином по слоистой плите.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 29–38.
4. Нестеренко В. Ф., Фомин В. М., Ческидов П. А. Затухание сильных ударных волн в слоистых материалах.— ПМТФ, 1983, № 4, с. 130–139.
5. Меньшиков Г. П., Одинцов В. А., Чудов Л. А. Внедрение цилиндрического ударника в конечную плиту.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1, с. 125–130.
6. Гриднева В. А., Корнеев А. И., Трушков В. Г. Численный расчет напряженного состояния и разрушения плиты конечной толщины при ударе бойками различной формы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 146–157.
7. Хорев И. Е., Захаров В. М., Коляев А. А., Горельский В. А., Чернышев С. И. Исследование больших деформаций и волновых явлений при динамическом нагружении материалов.— В кн.: Детонация. Матер. VI Всес. симп. по горению и взрыву. Черноголовка, 1980, с. 121–125.
8. Гулидов А. И., Фомин В. М. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды.— ПМТФ, 1980, № 3, с. 126–132.
9. Петров И. Б., Холодов А. С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984, т. 24, № 5, с. 722–739.
10. Кондауров В. И., Рой И. В. Исследование и применение одной разностной консервативной схемы для уравнений динамики деформируемой среды.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980, т. 11, № 2, с. 64–79.
11. Франк Р. М., Лазарус Р. Б. Смешанный метод, использующий переменные Эйлера и Лагранжа.— В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, с. 55–75.
12. Магомедов К. М., Холодов А. С. О построении расчетных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 2, с. 373–386.
13. Холодов А. С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 6, с. 1476–1492.
14. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973, т. 1. 536 с.; т. 2. 584 с.
15. Кондауров В. И., Кукуджанов В. Н. Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упругопластической среды с конечными деформациями.— В кн.: Численные методы в механике твердого деформируемого тела. М.: ВЦ АН СССР, 1978, с. 84–121.

Москва

Поступила в редакцию  
19.IV.1984