МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1985

УДК 539.374

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЫ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПОЛОСЫ С ОТВЕРСТИЕМ

СУЗДАЛЬНИЦКАЯ Л. И.

В конструкциях, содержащих перфорированные элементы, при достаточно больших напряжениях вокруг отверстий возникают пластические течения. Ставится задача, называемая обратной, об определении границы, разделяющей области, в одной из которых среда подчиняется уравнениям теории упругости, а в другой – условию пластичности [1]. Иная постановка задачи с неизвестной границей состоит в поиске формы отверстия, при которой оно является равнопрочным [2]. Накоплено значительное число исследований в обратных задачах для плоскости с отверстием или группой отверстий: новые результаты и ссылки на ранее опубликованные работы приведены в [3]. В классе двумерных задач с неизвестной границей кроме плоскости рассматривалась также труба с эксцентрическим отверстием [4].

В публикуемой работе предлагается метод определения неизвестного контура в случае, когда отверстие расположено внутри полосы. Метод иллюстрируется решением упругопластической задачи и задачи о равнопрочном отверстии.

1. Рассматривается изотропная полоса ширины $2h$, ограниченная прямолинейными границами $L_1^\pm$ и симметрично расположенным отверстием L_0. Ось x направлена вдоль оси симметрии полосы, ось y ей ортогональна, начало координат в центре L_0; r, θ – полярные координаты с тем же началом и полярной осью, совпадающей с x.

На границах полосы заданы нормальные и касательные усилия

$$\sigma_y^\pm=p_1(x),\ \tau_{xy}^\pm=p_2(x)\quad(-\infty<x<\infty,\ y=\pm h)\ \text{ на } L_1^\pm$$
$$\sigma_n=p_0(\theta),\ \tau_{nt}=0\ \text{ на } L_0 \tag{1.1}$$

Предполагается, что при $x\to\pm\infty$ напряжения исчезают.

В упругой области компоненты напряжений могут быть определены с помощью функций Колосова – Мусхелишвили соотношениями $\sigma_x+\sigma_y=4\operatorname{Re}\Phi(z)$, $\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar z\Phi'(z)+\Psi(z)]$, $z=x+iy$ или выражаться через функцию напряжений U в виде

$$\sigma_x=\partial^2U/\partial y^2,\ \sigma_y=\partial^2U/\partial x^2,\ \tau_{xy}=-\partial^2U/\partial x\partial y$$

Полагая $\Phi(z)=\Phi_0(z)+\Phi_1(z)$, $\Psi(z)=\Psi_0(z)+\Psi_1(z)$ и, следовательно, $U(x,y)=U_0(x,y)+U_1(x,y)$, причем следующие представления для разыскиваемых функций:

$$\Phi_0(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^{-2n},\quad \Psi_0(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^{-2n} \tag{1.2}$$

$$U_1(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{2}[(x-t)f_{1,n}(t)+(y-\nu_nh)f_{2,n}(t)]\times$$
$$\times\ln[(x-t)^2+(y-\nu_nh)^2]dt\quad(\nu_1=1,\ \nu_2=-1) \tag{1.3}$$

где $f_{1,n}(t)$, $f_{2,n}(t)$ — неизвестные функции, подлежащие определению из краевых условий.

Выражение U_1 в виде (1.3) является частным случаем интегрального представления [5] решения бигармонического уравнения, полученного в связи с решением задачи о криволинейном разрезе в плоскости. Оно позволяет учесть особенности при удовлетворении решения краевым условиям на $L_1^{\pm}$. Для симметричной полосы из (1.3) следует

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(z^2-s^2)^{-1}f(t)\,dt$$

$$\Psi_1(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\bar{s}f(t)(z^2+s^2)+s\overline{f(t)}(z^2-s^2)](z^2-s^2)^{-2}dt$$

$$f=f_1+if_2,\quad s=t+ih$$

Удовлетворяя Φ, Ψ условиям (1.1) на L_1^+, получим сингулярное интегральное уравнение

$$\sigma_y+i\tau_{xy}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\overline{f(t)}\left[\frac{1}{x-t}-\frac{x+t}{(x+t)^2+4h^2}\right]-\frac{2ihf(t)}{(x+t+2ih)^2}\right\}dt+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n+b_n}{(x+ih)^{2n}}+\frac{\bar{a}_n}{(x-ih)^{2n}}-\frac{2\,na_n(x-ih)}{(x+ih)^{2n+1}}\right]=p_1(x)+ip_2(x) \tag{1.4}$$

Решение (1.4) ищем в виде $f(x)=f^*(x)+f_p(x)$, где $f_p(x)$ — частное решение при ненулевой правой части и

$$f^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_{kn}(it-\varepsilon_k)+\gamma_{kn}}{(t+i\varepsilon_k)^{2n+1}}-\frac{\beta_{kn}(it+\varepsilon_k)+\delta_{kn}}{(t-i\varepsilon_k)^{2n+1}}\right\}$$

$$\varepsilon_k=(2k+1)h \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.4) и определив с помощью теории вычетов необходимые интегралы, получим рекуррентные формулы, связывающие коэффициенты функций (1.2) и (1.5):

$$\alpha_{k+1,n}=\beta_{k,n},\quad \beta_{k+1,n}=\alpha_{k,n}+4h(2n-1)\delta_{k,n-1}$$
$$\gamma_{k+1,n}=-\delta_{k,n},\quad \delta_{k+1,n}=-\gamma_{k,n}-8nh\beta_{k,n}$$
$$\alpha_{0,n}=\bar{a}_n,\quad \beta_{0,n}=(2n-1)a_n+b_n$$
$$\delta_{0,n}=-4nha_n,\quad \gamma_{0,n}=\delta_{k,-1}=0$$

Представив $p_1(x)+ip_2(x)$ в виде ряда по степеням $(x\pm ih)^{-n}$, аналогично найдем $f_p(x)$. Далее полагаем, что внешняя граница полосы свободна от нагрузки, т. е. $P(x)=f_p(x)$, и нагрузка прикладывается лишь на контуре L_0.

Отметим, что при $|z|<h$ имеют место разложения

$$\Phi_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^{2n},\quad \Psi_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nz^{2n} \tag{1.6}$$

$$A_n=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)s^{-(2n+1)}dt$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[sf(t)(n+1)s^{-(2n+2)}-\overline{f(t)}s^{-(2n+1)}]dt$$

2. Пусть отверстие имеет форму круга радиуса λ, к контуру L_0 которого приложено нормальное напряжение

$$\sigma_r=-\sigma_0,\quad \tau_{r\theta}=0 \tag{2.1}$$

Величина σ_0 предполагается такой, что вокруг отверстия возникает область пластического течения, подчиняющегося условию $(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k_0^2$, целиком охватывающая отверстие, но не достигающая границы полосы. Упругая и пластическая области обозначены, соответственно, через D_1 и D_2, разделяющая их граница – через L.

Функции Колосова – Мусхелишвили для D_2 имеют вид [1]

$$\Phi_2(z)={}^1/_2(k_0-\sigma_0)+k_0\ln z/\lambda,\quad \Psi_2(z)=0$$

Сопрягая на L решения для D_1 и D_2, получим краевую задачу

$$\begin{gathered}2\mathrm{Re}[\Phi_0+\Phi_1]=k_0-\sigma_0+k_0\ln|z|/\lambda\\ \bar z(\Phi_{01}'+\Phi_1')\Psi_0+\Psi_1=k_0\bar z/z\end{gathered} \tag{2.2}$$

Пусть функция

$$z=w(\zeta)=\zeta-\sum_{k=1}^{\infty}c_{-k}\zeta^{-2k+1} \tag{2.3}$$

реализует конформное отображение внешности круга $|\zeta|=\mu$ на область вне L и $\zeta=g(z)$ – обратная функция. Тогда [1]

$$\Phi_0(z)+\Phi_1(z)={}^1/_2(k_0-\sigma_0)+k_0\ln z(\lambda-k_0\ln g(z)/\lambda \tag{2.4}$$

В этом случае второе уравнение (2.2) принимает вид

$$\Psi_0(z)+\Psi_1(z)=k_0\bar z g'(z)/g(z) \tag{2.5}$$

Для определения зависимости между коэффициентами разложений (2.3) и правой части уравнения (2.5) при $z\in L$:

$$F(z)=k_0\bar z g'(z)/g(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k z^{2k} \tag{2.6}$$

используем методику [6]. Вводя в уравнение (2.4) разложения (1.2), (1.6) для функций Ψ_0, Ψ_1 и (2.6), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^{-2k}+\sum_{k=0}^{\infty}B_k z^{2k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k z^{2k}$$

откуда следует $B_0=F_0$, $b_k=F_{-k}$, $B_k=F_k$ $(k=1, 2,\ldots)$. Вводя далее эти разложения в (2.4), аналогично установим зависимости между коэффициентами (1.2), (2.3), а также соотношение $\sigma_0/k_0=1+\ln(\mu/\lambda)$, связывающее основные физические и геометрические параметры задачи.

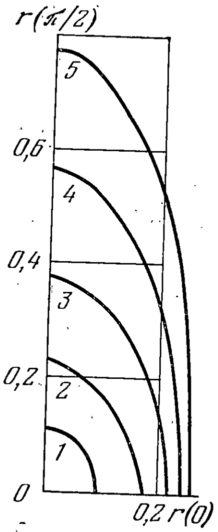
Установленных соотношений, часть которых приведена выше, достаточно для решения задачи. При вычислениях на ЭВМ ЕС-1022 во всех разложениях удерживалось по четыре коэффициента. Сохранялись результаты, удовлетворяющие условию $\lambda<|w(\zeta)|<1$, т. е. тому случаю, когда пластическая область полностью охватывает отверстие, но не достигает границы полосы. Граница L, разделяющая упругую и пластическую области, определялась из уравнения $r(\theta)=|w(\mu e^{i\theta})|$. Величины радиусов

μ	δ	c_{-1}	c_{-2}	c_{-3}	c_{-4}
0,05	0,4978	0,0081	0	0	0
0,1	0,4911	0,0324	0,0001	0	0
0,2	0,4657	0,1274	0,0011	0	0
0,3	0,4288	0,2700	0,0055	0,0003	0
0,4	0,3886	0,4259	0,0157	0,0016	0,0001
0,55	0,4044	0,4590	0,0289	0,0077	0,0003

контура L в зависимости от параметра μ для различных значений угла θ аппроксимируются функциями $r(0)=6{,}72\mu^2-3{,}18\mu+0{,}69$, $r(\pi/4)=-1{,}78\mu^2+2{,}26\mu-0{,}21$, $r(\pi/2)=-0{,}52\mu^2+0{,}94$, $0{,}2\leqslant\mu\leqslant0{,}55$.

С ростом радиуса отверстия и величины приложенной к нему нагрузки пластическая область вытягивается вдоль продольного сечения полосы ($\theta=0$).

3. Описанный метод был применен к определению формы равнопрочного отверстия в полосе. Предполагается, что к контуру отверстия приложены усилия (2.1) и форма его определяется из условия равнопрочности, согласно которому тангенциальное напряжение на контуре отверстия L_0 должно быть постоянным $\sigma_t=\sigma=\text{const}$.



Краевая задача на L_0 имеет вид

$$\operatorname{Re}\Phi(w(\zeta))=0{,}5(\sigma-\sigma_0)$$

$$\frac{\zeta^2 w'(\zeta)}{\mu^2\overline{w'(\zeta)}}\left[\frac{w(\zeta)}{w'(\zeta)}\Phi'(\zeta)+\Psi(\zeta)\right]=0{,}5(\sigma+\sigma_0)$$

где $z=w(\zeta)$ — функция, выполняющая конформное отображение внешности круга $|\zeta|=\mu$ на внешность области, ограниченной контуром L_0.

Повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно установить соотношения, достаточные для решения задачи. В таблице приведены результаты вычислений $\delta=\sigma/\sigma_0$ и первых четырех коэффициентов функции (2.3). На фигуре показана форма четверти отверстия для значений μ, равных 0,1–0,5(0,1) (кривые *1*–*5*). Равнопрочное отверстие имеет форму, близкую к эллипсу, вытянутому вдоль поперечного сечения полосы ($\theta=\pi/2$). С увеличением нагрузки эксцентриситет эллипса растет. Для значений $\mu>0{,}55$ итерационный процесс, с помощью которого вычислялись коэффициенты разложений искомых функций в обеих задачах, становился расходящимся.

Автор благодарит И. Д. Суздальницкого за постановку задачи и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Плоская упругопластическая задача.– ПММ, 1946, т. 10, вып. 3, с. 367–386.
2. *Черепанов Г. П.* Обратные задачи плоской теории упругости.– ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 963–979.
3. *Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.* Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.
4. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
5. *Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д.* Напряженное состояние плоскости с криволинейным разрезом.– Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1, с. 177–180.
6. *Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д.* Влияние жестких включений на распространение пластических зон в двоякопериодической упругопластической задаче.– Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 2, с. 76–82.

Новосибирск

Поступила в редакцию 3.IV.1984