МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1985

УДК 531.383

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМОГО МАЯТНИКОВОГО ГИРОКОМПАСА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗМУЩАЕМОМ ОСНОВАНИИ

КУЗНЕЦОВ В. М., СКОРОХОД Б. А., ШЕРВАШИДЗЕ В. В.

Получены условия существования у сингулярно возмущенной системы, описывающей управляемый маятниковый гирокомпас в окрестности начала координат асимптотически устойчивого по Ляпунову периодического решения, представимого в виде асимптотического ряда по малому параметру.

1. Объектом исследования является управляемый маятниковый гирокомпас [1] с системой подвеса, обеспечивающей перемещение чувствительного элемента только по углам Эйлера — Крылова, но не допускающей поступательных перемещений относительно корпуса [2]. Для составления дифференциальных уравнений движения чувствительного элемента воспользуемся представлениями для кинетической энергии (W), потенциальной энергии (П) и диссипативной функции (Ф):

$$2W=I_x[\gamma^{\cdot}+\omega_n\cos(K+\alpha)\cos\beta+(\alpha^{\cdot}+\omega_v)\sin\beta]^2+$$
$$+I_y\{(\alpha^{\cdot}+\omega_v)\cos\beta\cos\gamma+\beta^{\cdot}\sin\gamma+\omega_h[\sin(K+\alpha)\sin\gamma-$$
$$-\cos(K+\alpha)\cos\gamma\sin\beta]\}^2+I_z\{\beta^{\cdot}\cos\gamma-(\alpha^{\cdot}+\omega_v)\cos\beta\sin\gamma+$$
$$+\omega_h[\sin(K+\alpha)\cos\gamma+\cos(K+\alpha)\sin\gamma\sin\beta]\}^2+H^2/I$$
$$\Pi=-mgl\{(1+n_\eta)\cos\beta\cos\gamma+$$
$$+n_\zeta[\cos(K+\alpha)\sin\gamma+\sin(K+\alpha)\cos\gamma\sin\beta]+$$
$$+n_\xi[\sin(K+\alpha)\sin\gamma-\cos(K+\alpha)\cos\gamma\sin\beta]\}-{}^1/_2 S\alpha^2$$
$$\Phi=-{}^1/_2(R_\alpha\alpha^{\cdot 2}+R_\beta\beta^{\cdot 2}+R_\gamma\gamma^{\cdot 2})$$

Здесь α — угол отклонения чувствительного элемента относительно корпуса компаса вокруг вертикальной оси, β — угол подъема оси ротора гироскопа компаса над плоскостью горизонта, γ — угол поворота чувствительного элемента вокруг оси собственного вращения ротора, ω_h, ω_v — горизонтальная и вертикальная составляющие угловой скорости вращения Земли, n_ξ, n_ζ, n_η — линейные перегрузки, соответственно, в направлениях норд, ост и зенит, I_y, I_z, I_x — моменты инерции чувствительного элемента относительно осей географической системы координат, проходящих через точку подвеса, H — кинетический момент гироскопа компаса, R_γ — коэффициенты демпфирования, R_α — коэффициент электрического демпфирования, S — жесткость упругой связи по азимутальной координате, l — расстояние между центром масс чувствительного элемента и точкой подвеса, m — масса чувствительного элемента, K — азимутальное отклонение корпуса прибора от плоскости меридиана, подлежащее определению, I — осевой момент инерции ротора гироскопа.

Полагая, что

$$H\omega_h / I_y=\lambda_1\varepsilon, \quad H\omega_v / I_y=\lambda_2\varepsilon, \quad n_\xi=n_\xi'\varepsilon$$
$$n_\zeta=n_\zeta'\varepsilon, \quad n_\eta=n_\eta'\varepsilon, \quad H\omega_h / I_z=\lambda_3\varepsilon$$
$$H\omega_v / I_z=\lambda_4\varepsilon, \quad \omega_h=\lambda_5\varepsilon^2, \quad \omega_v=\lambda_6\varepsilon^2$$
$$\sin K\approx K, \quad \cos K\approx 1$$

(ε — малый параметр, λ_i $(i=1,\ldots,5)$ — некоторые числа), из уравнений Лагранжа 2-го рода получим систему уравнений

$$\begin{gathered}A_{11}\alpha^{\cdot\cdot}+A_{12}\beta^{\cdot\cdot}+A_{13}\gamma^{\cdot\cdot}=-H\beta^{\cdot}+u+f_1+\varepsilon\varphi_1\\ A_{21}\alpha^{\cdot\cdot}+A_{22}\beta^{\cdot\cdot}=H\alpha^{\cdot}-mgl\beta-R_\beta\beta^{\cdot}+f_2+\varepsilon\varphi_2\\ A_{31}\alpha^{\cdot\cdot}+A_{33}\gamma^{\cdot\cdot}=-mgl\gamma-R_\gamma\gamma^{\cdot}+f_3+\varepsilon\varphi_3\\ u=-S\alpha-R_\alpha\alpha^{\cdot}=-(k_1\alpha+k_2\alpha^{\cdot}) / \mu\\ A_{11}=I_x\sin^2\beta+I_y\cos^2\beta\cos^2\gamma+I_z\cos^2\beta\times\sin^2\beta\\ A_{12}=(I_y-I_z)\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma, \quad A_{13}=I_x\sin\beta\\ A_{21}=(I_y-I_z)\cos\beta\cos\gamma\sin\gamma\\ A_{22}=I_y\sin^2\gamma+I_z\cos^2\gamma, \quad A_{31}=I_x\sin\beta, \quad A_{33}=I_x\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь k_1, k_2 — некоторые числа, μ — положительный малый параметр, $f_i=f_i(t, \mathrm{x})$, $\mathrm{x}=\|\alpha, \alpha^{\cdot}, \beta, \beta^{\cdot}, \gamma, \gamma^{\cdot}\|^T$ $(i=1, 2, 3)$ — периодические по t с периодом T аналитические функции x в окрестности точки $\mathrm{x}=0$, разложения которых по степеням x начинаются с членов не ниже второго порядка, $\varphi_i=\varphi_i(t, \varepsilon, \mathrm{x})$ $(i=1, 2, 3)$ — периодические по t с периодом T аналитические функции x, ε в окрестности точки $\mathrm{x}=0$, $\varepsilon=0$, такие, что $\varphi_1(t, \varepsilon, 0)=\varepsilon\varphi_{10}(t, \varepsilon)$, $\varphi_2(t, \varepsilon, 0)=-mgl(n_\xi'-Kn_\zeta')+\lambda_4$, $\varphi_3(t, \varepsilon, 0)=-mgl\times(n_\zeta'+Kn_\xi')$.

Требуется получить условия, при которых система (1.1) имеет асимптотически устойчивое по Ляпунову периодическое решение при всех $\mu\in(0, \mu_0)$, где μ_0 — достаточно малое положительное число, и получить представление этого решения в виде асимптотического ряда по положительным степеням μ.

2. Сводя (1.1) к системе Коши, получим

$$\begin{gathered}x_1^{\cdot}=x_2, \quad x_2^{\cdot}=a_{24}x_4+u / I_y+\varepsilon\varphi_4+uf_4+f_5\\ x_3^{\cdot}=x_4, \quad x_4^{\cdot}=a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4+\varepsilon\varphi_5+f_6\\ x_5^{\cdot}=x_6, \quad x_6^{\cdot}=a_{65}x_5+a_{66}x_6+\varepsilon\varphi_6+f_7\\ u=-(k_1x_1+k_2x_2) / \mu, \quad a_{24}=-H / I_y, \quad a_{42}=H / I_z\\ a_{43}=-mgl / I_z, \quad a_{44}=-R_\beta / I_z \quad a_{65}=-mgl / I_x, \quad a_{66}=-R_\gamma / I_x\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $f_4=f_4(t, \mathrm{x})$, $f_5=f_5(t, \mathrm{x})$ — периодические по t с периодом T аналитические функции x в окрестности точки $\mathrm{x}=0$, разложения которых по степеням x начинаются с членов не ниже первого порядка, $f_i=f_i(t, u, \mathrm{x})$ $(i=6, 7)$ — периодические по t с периодом T аналитические функции относительно величин x, u в окрестности точки $\mathrm{x}=0$, $u=0$, разложения которых по степеням x, u начинаются с членов не ниже второго порядка, $\varphi_i=\varphi_i(t, \varepsilon, x)$ $(i=4, 5, 6)$ — периодические по t с периодом T аналитические функции относительно величин x, ε в окрестности точки $\mathrm{x}=0$, $\varepsilon=0$, такие, что $\varphi_4(t, \varepsilon, 0)=\varepsilon\varphi_{40}(t, \varepsilon)$, $\varphi_5(t, \varepsilon, 0)=-(mgl/I_z)(n_\xi'-Kn_\zeta')+\lambda_4$, $\varphi_6(t, \varepsilon, 0)=(mgl / I_x)(n_\zeta'+Kn_\xi')$.

Введем замену переменных

$$x_1=y_1\mu, \quad x_2=y_2\mu, \quad x_i=y_i \quad (i=3,\ldots, 6) \tag{2.2}$$

Функции y_i $(i=1,\ldots, 6)$ будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{gathered}y_1^{\cdot}=y_2, \quad \mu y_2^{\cdot}=a_{24}y_4+u / I_y+\varepsilon\varphi_4+uf_4+f_5\\ y_3^{\cdot}=y_4, \quad y_4^{\cdot}=\mu a_{42}y_2+a_{43}y_3+a_{44}y_4+\varepsilon\varphi_5+f_6\\ y_5^{\cdot}=y_6, \quad y_6^{\cdot}=a_{65}y_5+a_{66}y_6+\varepsilon\varphi_6+f_7\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
u=-k_1y_1-k_2y_2, \quad f_i=f_i(t, \mu y_1, \mu y_2, y_3, \ldots, y_6) \quad (i=4, 5) \\
\varphi_i=\varphi_i(t, \varepsilon, \mu y_1, \mu y_2, y_3, \ldots, y_6) \quad (i=4, 5, 6) \\
f_i=f_i(t, u, \mu y_1, \mu y_2, y_3, \ldots, y_6) \quad (i=6, 7)
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

Для выяснения вопроса о существовании периодического решения системы (2.3) воспользуемся теоремой Вазова [3, с. 375]. Полагая в (2.3) $\mu=0$, рассмотрим вырожденную систему

$$
\begin{gathered}
y_1^{\bullet}=y_2, \quad 0=a_{24}y_4+u / I_y+\varepsilon\varphi_4+uf_4+f_5 \\
y_3^{\bullet}=y_4, \quad y_4^{\bullet}=a_{43}y_3+a_{44}y_4+\varepsilon\varphi_5+f_6 \\
y_5^{\bullet}=y_6, \quad y_6^{\bullet}=a_{65}y_5+a_{66}y_6+\varepsilon\varphi_6+f_7 \\
u=-k_1y_1-k_2y_2, \quad \varphi_i=\varphi_i(t, \varepsilon, 0, 0, y_3, \ldots, y_6) \quad (i=4, 5, 6)
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

$$f_i=f_i(t, 0, 0, y_3, \ldots, y_6) \quad (i=4, 5); \quad f_i=f_i(t, u, 0, 0, y_3, \ldots, y_6) \quad (i=6, 7)$$

В силу свойств функции f_4 алгебраическое уравнение в (2.4) однозначно разрешимо относительно u:

$$u=F(t, \varepsilon, y_3, \ldots, y_6) \tag{2.5}$$

В (2.5) F – периодическая по t периода T аналитическая функция аргументов y_i $(i=3, \ldots, 6)$, ε в окрестности точки $y_i=0$, $\varepsilon=0$ $(i=3, \ldots, 6)$.

Исключая с помощью (2.5) u из четырех последних уравнений системы (2.4) и y_2 из первого, получим

$$
\begin{gathered}
y_1^{\bullet}=-(k_1/k_2)y_1-F/k_2 \\
y_3^{\bullet}=y_4, \quad y_4^{\bullet}=a_{43}y_3+a_{44}y_4+\varepsilon\varphi_5+f_7 \\
y_5^{\bullet}=y_6, \quad y_6^{\bullet}=a_{65}y_5+a_{66}y_6+\varepsilon\varphi_6+f_8
\end{gathered} \tag{2.6}
$$

В (2.6) $f_i=f_i$ $(t, \varepsilon, y_3, \ldots, y_6)$ $(i=7, 8)$ – периодические по t с периодом T аналитические функции y_i, ε в окрестности точки $y_i=\varepsilon=0$, разложения которых по степеням y_i $(i=3, \ldots, 6)$ начинаются с членов не ниже второго порядка.

Пусть выполняются неравенства $k_1>0$, $k_2>0$ и линейная система с постоянными коэффициентами

$$
\begin{gathered}
y_3^{\bullet}=y_4, \quad y_4^{\bullet}=a_{43}y_3+a_{44}y_4, \quad y_5^{\bullet}=y_6 \\
y_6^{\bullet}=a_{65}y_5+a_{66}y_6
\end{gathered} \tag{2.7}
$$

асимптотически устойчива.

При выполнении этих условий в окрестности точки $y_1=0$, $y_i=0$ $(i=3, \ldots, 6)$ нелинейная система (2.6) будет иметь периодическое решение $y_{1H}(t)$, $y_{iH}(t)$ $(i=3, \ldots, 6)$ периода T при достаточно малом ε [4]. Остальные предположения, оговариваемые в теореме Вазова, являются следствием приведенных условий, так как при их выполнении будет асимптотически устойчивой линейная сингулярно возмущенная система, которая получается из (2.3), если в ней положить равными нулю нелинейные члены [5]. Следовательно, при сделанных предположениях система (2.3) при достаточно малых μ и ε имеет периодическое решение, которое при $\mu\to 0$ допускает асимптотическое разложение

$$\mathbf{y}(t, \mu) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{y}^r(t)\,\mu^r \tag{2.8}$$

Исследуем устойчивость построенного периодического решения. Система в отклонениях z_1, z_2 относительно этого решения может быть представлена в виде

$$
\begin{gathered}
\mathbf{z}_1^{\bullet}=B_{11}\mathbf{z}_1+\mathbf{B}_{12}z_2+\mathbf{R}_1, \quad \mu z_2^{\bullet}=\mathbf{B}_{21}\mathbf{z}_1+B_{22}z_2+R_2 \\
\mathbf{z}_1=\|y_1-y_{1H}, y_3-y_{3H}, \ldots, y_6-y_{6H}\|^T, \quad z_2=y_2-y_{24}
\end{gathered} \tag{2.9}
$$

$$B_{11}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{61} & a_{66} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{B}_{12}=\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{21}=\|-k_1/I_y\ 0\ a_{24}\ 0\ 0\|^T, \quad B_{22}=-k_2/I_y$$

Здесь $\mathbf{R}_1$, R_2 — непрерывные функции, такие, что $\|\mathbf{R}_1\|+|R_2|<M(\|\mathbf{z}_1\|+$ $+|z_2|)$, где $M\to 0$ при стремлении к нулю величин μ, ε, $\mathbf{z}_1$, z_2.

Составим определенно-положительную форму вида

$$V=V_1(z_1)+\mu V_2(\mathbf{z}_1, z_2), \quad V_1=\mathbf{z}_1^T L\mathbf{z}_1, \quad LQ+Q^TL=-I$$
$$Q=B_{11}-\mathbf{B}_{12}\cdot\mathbf{B}_{21}/B_{22}, \quad V_2={}^1/_2(y-Ta)^2P$$
$$P=-1/(2B_{22}), \quad y=z_2+\mathbf{B}_{21}\cdot\mathbf{z}_1/B_{22}$$
$$Ta=-4(L\mathbf{B}_{12})^T\mathbf{z}_1, \quad a=Q\mathbf{z}_1$$

При выполнении неравенств $k_1>0$, $k_2>0$ и условия для системы (2.7) матрица Q будет иметь собственные числа с отрицательными действительными частями.

Для производной от V в силу (2.9) имеем (λ — некоторое положительное число)

$$V^\cdot=V_*^\cdot+\frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{z}_1}\mathbf{R}_1+\mu\frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{z}_1}\mathbf{R}_1+\frac{\partial V_2}{\partial z_2}R_2\leqslant V_*^\cdot+\lambda M(\|\mathbf{z}_1\|^2+z_2^2),$$

$$V_*^\cdot=-\mathbf{z}_1^T\mathbf{z}_1-{}^1/_2y^2+\mu(y-Ta)PR(a+B_{12}y)\leqslant-\lambda_2(\|\mathbf{z}_1\|^2+z_2^2)$$

$$R=[\mathbf{B}_{21}-2(L\mathbf{B}_{12})^T/P]/B_{22} \tag{2.10}$$

Из оценки (2.10) следует, что $V^\cdot$ является определенно-отрицательной функцией при достаточно малых значениях величин μ, ε, $\mathbf{z}_1$, z_2. Асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2.9) вытекает из теоремы Ляпунова [4].

Положим $x_i(0)=\mu x_{i0}$ $(i=1, 2)$, $x_i(0)=x_{i0}$ $(i=3, \ldots, 6)$. Тогда из соотношения (2.2) следует асимптотическая устойчивость периодического решения исходной системы (1.1), которое определяется в соответствии с (2.2) по формулам $x_{iн}=\mu y_{iн}$ $(i=1, 2)$, $x_{iн}=y_{iн}$ $(i=3, \ldots, 6)$.

Заметим, что в рассматриваемой задаче основной интерес представляют решения, удовлетворяющие начальным условиям вида $x_1(0)=x_2(0)=$ $=0$, $|x_i(0)|\leqslant h$ $(i=3, \ldots, 6)$, поскольку можно полагать, что в начальный момент ось чувствительного элемента неподвижна и совпадает с началом отсчета установленного на корпусе прибора. Для исследования таких решений системы (1.1) на любом конечном интервале времени может быть использована теорема Тихонова [6]. Действительно, покажем, что решения системы (2.3) $y(t, \mu)$, начинающиеся в области $S=\{y: y_1,\ y_2\in R^1,$ $|y_i|\leqslant h$ $(i=3, \ldots, 6)\}$, удовлетворяют условию (t_k — любое конечное число, $\mathbf{y}(t)=(y_1, \ldots, y_6)$ — решение вырожденной системы (2.6))

$$\mathbf{y}(t)=\lim_{\mu\to 0}\mathbf{y}(t, \mu) \qquad (0<t\leqslant t_k) \tag{2.11}$$

Докажем асимптотическую устойчивость присоединенной системы

$$dy_2/d\tau=F(y_2, t, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z}=\|y_1, y_3, \ldots, y_6, \mu, \varepsilon\|^T$$

$$F=a_{24}y_4+u/I_y+\varepsilon\varphi_4+uf_4+f_5 \tag{2.12}$$

Положением равновесия (2.12) $y_2=\varphi(t, \mathbf{z})$ является корень уравнения $F(y_2, t, \mathbf{z})=0$, где φ — аналитическая функция переменной $\mathbf{z}$ в окрестности точки $\mathbf{z}=0$, такая, что $\varphi(t, 0)=0$. Из уравнения для $x=y_2-\varphi(t, \mathbf{z})$, используя формулу конечных приращений, получим

$$dx/d\tau=[-k_2/I_y+\varphi_1(\mu x,t,\mathbf{z})]x \tag{2.13}$$

В (2.13) $\varphi_1(u_1,t,u_2)$ — непрерывная функция, такая, что $\varphi_1\to0$ при $u_i\to0$ $(i=1,2)$ равномерно по $t\in(0,\infty)$. Из вида уравнения (2.13) следует, что для любого $p\in R^1$ можно указать $\rho(p)$, такое, что $x(\tau)\to0$ при $\tau\to\infty$, если $x_0<p$, $\|z\|<\rho$. Существование решений вырожденной системы (2.6) при $0<t<t_k$ следует из линейности по y_1 первого уравнения и асимптотической устойчивости системы (2.7), тем самым применимость теоремы Тихонова доказана. Для уточнения полученного приближения может быть использовано асимптотическое разложение для решений [6].

Перейдем к исследованию систематической погрешности гирокомпаса. Пусть система (1.1) имеет периодическое решение. Тогда из уравнений Лагранжа выводим

$$\langle\partial W/\partial\alpha-\partial\Pi/\partial\alpha+\partial\Phi/\partial\alpha^{\bullet}\rangle=0 \tag{2.14}$$

В (2.14) и далее $\langle\ \rangle$ означает операцию осреднения вдоль периодического решения. Из представлений для W, Π, Φ находим

$$\partial W/\partial\alpha=-I_x\omega_h\gamma^{\bullet}(K+\alpha)+I_y\omega_h\alpha^{\bullet}\gamma+I_z\omega_h(\beta^{\bullet}-\omega_h\alpha^{\bullet}\gamma)-H\omega_h(K+\alpha)+O(x^3)$$

$$\partial\Pi/\partial\alpha=mgl\{n_\zeta[\sin\alpha-K\cos\alpha)\sin\gamma+$$
$$+(-K\sin\alpha+\cos\alpha)\cos\gamma\sin\beta]+n_\xi[(-K\sin\alpha+\cos\alpha)\sin\gamma+$$
$$+(\sin\alpha+K\cos\alpha)\cos\gamma\sin\beta]-S_\alpha,\quad \partial\Phi/\partial\alpha^{\bullet}=-R_\alpha\alpha^{\bullet}$$

Подставляя полученные производные в (2.14) и используя разложения периодического решения системы (2.1) в ряд по положительным степеням малого параметра ε, получим

$$K=(1/H\omega_h)(S-H\omega_h)\langle\alpha\rangle+D \tag{2.15}$$
$$D=-\frac{mgl}{H\omega_h}\varepsilon^2<(-Kn_\zeta'+n_\xi')\gamma_1+(n_\zeta'+n_\xi'K)\beta_1>+O(\varepsilon^3)$$

Периодические функции γ_1 и β_1 определяются из системы уравнений

$$\begin{gathered}I_y\alpha_1^{\bullet\bullet}+H\beta_1^{\bullet}-u+KI_y\lambda_1=0\\ I_z\beta_1^{\bullet\bullet}-H\alpha_1^{\bullet}+mgl\beta_1+R_\beta\beta_1^{\bullet}+mgl(n_\xi'-Kn_\zeta')=0\\ I_x\gamma_1^{\bullet\bullet}+mgl\gamma_1+R_\gamma\gamma_1^{\bullet}-mgl(n_\zeta'+n_\xi'K)=0\\ u=-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_1^{\bullet})/\mu\end{gathered} \tag{2.16}$$

Исследуем поведение величины D при малых μ. Вводя в (2.16) замену $\alpha_1=\mu y$ и полагая затем $\mu=0$, получим вырожденную систему

$$\begin{gathered}y^{\bullet}+k_1y/k_2+H\beta_1^{\bullet}/k_2+KI_y\lambda/k_2=0\\ I_z\beta_1^{\bullet\bullet}+R_\beta\beta_1^{\bullet}+mgl\beta_1+mgl(n_\xi'-Kn_\zeta')=0\\ I_x\gamma_1^{\bullet\bullet}+R_\gamma\gamma_1^{\bullet}+mgl\gamma_1-mgl(n_\zeta'+Kn_\xi')=0\end{gathered} \tag{2.17}$$

Пусть $n_\xi'=n_{\xi0}'\sin\omega t$, $n_\zeta'=n_{\zeta0}'\sin\omega t$, тогда получим

$$D=-{}^1/_2\frac{mgl}{H\omega_h}(n_{\zeta_0}'+Kn_{\xi_0}')(n_{\xi_0}'-Kn_{\zeta_0}')(l_1-l_2)+O(\varepsilon^3)$$

$$l_1=(mgl-\omega^2I_z)/\Delta_1,\quad \Delta_1=I_z[(mgl-\omega^2I_z)^2+\omega^2R_\beta]$$
$$l_2=(mgl-\omega^2I_x)/\Delta_2,\quad \Delta_2=I_x[(mgl-\omega^2I_x)^2+\omega^2R_\gamma]$$

В частном случае, когда $I_z=I_x$, $R_\beta=R_\gamma$, величина D с точностью до членов порядка ε^3 равна нулю. Поскольку $S\gg H\omega_h$, а величина $S\langle\alpha\rangle$ измеряется, то и систематическая ошибка управляемого маятникового гирокомпаса с точностью до членов ε^3 равна нулю.

Таким образом доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть выполняются неравенства $k_1>0$, $k_2>0$ и условия асимптотической устойчивости решения системы (2.7). Тогда существуют числа $\varepsilon_0>0$, $\mu_0>0$, такие, что система (1.1) имеет асимптотически устойчивое по Ляпунову периодическое решение периода T при любых $\mu\leqslant\mu_0$, $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, которое представимо в виде асимптотического ряда по положительным степеням μ при $\mu\to 0$.

Теорема 2. Пусть дополнительно к условиям предыдущего пункта $R_\gamma=R_\beta$, $I_x=I_z$, $n_\xi=\varepsilon n_{\xi_0}\sin\omega t$, $n_\zeta=\varepsilon n_{\zeta_0}\sin\omega t$. Тогда при стремлении μ к нулю систематическая погрешность управляемого маятникового гирокомпаса с точностью до членов порядка ε^3 стремится к нулю.

3. Исследуем упрощенные модели рассматриваемого гирокомпаса, которые могут быть использованы в задачах численного моделирования, анализа и синтеза. Пренебрегая в (2.1) членами, порядок которых выше двух, можно получить систему уравнений второго порядка

$$\begin{gathered}
\alpha^{\cdot\cdot}+(H/I_y)\beta^{\cdot}+(u/I_y)+\lambda_1\varepsilon\alpha+[(I_y-I_z)\lambda_2/I_z-\\
-(mgl/I_z)(n_\xi'-Kn_\zeta')]\varepsilon\gamma+\lambda_1K\varepsilon+\varepsilon^2\varphi_1+f_1=0\\
\beta^{\cdot\cdot}-(H/I_z)\alpha^{\cdot}+(R_\beta/I_z)\beta^{\cdot}+(mgl/I_z)\beta+[\lambda_3+(n_\eta'/I_z)]\varepsilon\beta-\\
-(mgl/I_z)(n_\zeta'+Kn_\xi')\varepsilon\alpha-\lambda_1K\varepsilon\gamma[(I_y-I_z)/I_z]-\lambda_4\varepsilon+\\
+(mgl/I_z)(n_\xi'-Kn_\zeta')\varepsilon+\varepsilon^2\varphi_2+f_2=0\\
\gamma^{\cdot\cdot}+(R_\gamma/I_x)\gamma^{\cdot}+(mgl/I_x)(1+n_\eta'\varepsilon)\gamma-(mgl/I_x)(n_\xi'+Kn_\zeta')\varepsilon\alpha-\lambda_1K\varepsilon\beta-\\
-(mgl/I_x)(n_\zeta'+n_\xi'K)\varepsilon+\varepsilon^2\varphi_3+f_3=0 \qquad (3.1)\\
u=(k_1\alpha+k_2\alpha^{\cdot})/\mu\\
f_1=\frac{I_x+I_y-I_z}{I_y}\beta^{\cdot}\gamma^{\cdot}-\frac{I_y-I_z}{I_yI_z}\gamma(-H\alpha^{\cdot}+R_\beta\beta^{\cdot})-\frac{mglI_y}{I_z}\beta\gamma-\frac{R_\gamma}{I_y}\beta\gamma^{\cdot}\\
f_2=-\frac{I_x-I_y+I_z}{I_z}\alpha^{\cdot}\gamma^{\cdot}+\frac{I_y-I_z}{I_yI_z}H\gamma\beta^{\cdot}-\frac{I_y-I_z}{I_yI_z}\gamma u\\
f_3=-\frac{I_y-I_z-I_x}{I_x}\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}+\frac{H}{I_y}\beta\beta^{\cdot}-\frac{1}{I_y}\beta u,\qquad \varphi_i=\varphi_i(t,\varepsilon,x)
\end{gathered}$$

$(i=1,2,3)$ — периодические по t с периодом T аналитические функции относительно x, такие, что $\varphi_i(t,\varepsilon,0)=\varepsilon\varphi_i'(t,\varepsilon)$ $(i=1,2,3)$, $\mathbf{x}=\|\alpha,\alpha^{\cdot},\beta,\beta^{\cdot},\gamma,\gamma^{\cdot}\|^{\mathrm{T}}$.

Пусть выполняются условия доказанных теорем. Покажем, что при уменьшении μ систематическая ошибка в определении азимута по уравнениям (3.1) с точностью до членов ε^3 будет стремиться к нулю. Делая в (3.1) замену $y=\mu\alpha$ и полагая в преобразованной системе $\mu=0$, получим

$$\begin{gathered}
y^{\cdot}+\{H\beta^{\cdot}+k_1y+I_y[(I_y-I_z)\lambda_2/I_z-(mgl/I_z)(n_\xi'-Kn_\zeta')]\varepsilon\gamma+\\
+I_y\lambda_1K\varepsilon+I_y\varepsilon^2\varphi_1'+I_yf_4\}k_2^{-1}=0\\
\beta^{\cdot\cdot}+\{R_\beta\beta^{\cdot}+mgl\beta+(\lambda_3I_z+n_\eta')\varepsilon\beta+\\
+mgl(n_\xi'-Kn_\zeta')\varepsilon\}I_z^{-1}+\varepsilon^2\varphi_2'=0\\
\gamma^{\cdot\cdot}+[R_\gamma\gamma^{\cdot}+mgl(1+n_\eta'\varepsilon)\gamma-mgl(n_\zeta'+n_\xi'K)\varepsilon]I_x^{-1}+\varepsilon^2\varphi_3'=0 \qquad (3.2)\\
f_4=\frac{I_y+I_x-I_z}{I_y}\beta\gamma^{\cdot}-\frac{I_y-I_z}{I_zI_y}R_\beta\gamma\beta^{\cdot}-\frac{mgl}{I_y}\beta\gamma-\frac{R_\gamma}{I_y}\beta\gamma^{\cdot}
\end{gathered}$$

Здесь $\varphi_i'=\varphi_i'(t,\varepsilon,\mathbf{x})$ $(i=1,2,3)$ — функции того же типа, что и функции φ_i $(i=1,2,3)$ в системе (3.1).

Осредняя первое уравнение в (3.2) вдоль периодического решения, получим

$$K=\frac{k_1}{H\omega_v}\langle y\rangle+D \tag{3.3}$$

$$D=\frac{I_y}{H\omega_v I_z}\varepsilon mgl\langle(n_\xi{}'-Kn_\zeta{}')\gamma\rangle-\frac{I_y}{H\omega_v}\langle f_4\rangle-\frac{I_y}{H\omega_v}\varepsilon^2\langle y_1\rangle$$

Определим теперь из (3.2) γ, β с точностью до членов ε^2 и подставим полученные выражения в (3.3). Тогда непосредственно проверяется, что величина D с точностью до членов порядка ε^3 обращается в нуль.

Для уточнения значений величины систематической ошибки при конкретных значениях параметра μ кроме нулевого члена в асимптотическом разложении (2.8) должны быть использованы члены более высокого порядка. Трудности в определении линейных дифференциальных уравнений, которым они удовлетворяют, связаны с громоздкостью вычисления частных производных от правых частей системы (3.1) и последущим численным определением периодических решений. Достаточно эффективным численным методом определения постоянного ухода гирокомпаса оказался также метод последовательных приближений в следующей форме. Запишем систему (2.1) в виде

$$\mathbf{x}^{\bullet}=A\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)\varepsilon+\mathbf{F}(t,\mathbf{x},\varepsilon) \tag{3.4}$$

Полагая в (3.4) $\mathbf{x}=\varepsilon\mathbf{y}$, получим

$$\mathbf{y}^{\bullet}=A\mathbf{y}+\mathbf{f}(t)+\varepsilon\mathbf{F}_0(t,\mathbf{y},\varepsilon),\quad \mathbf{F}_0(t,\mathbf{y},\varepsilon)=\mathbf{F}(t,\varepsilon y,\varepsilon)/\varepsilon \tag{3.5}$$

Тогда последовательность периодических функций, удовлетворяющих уравнениям

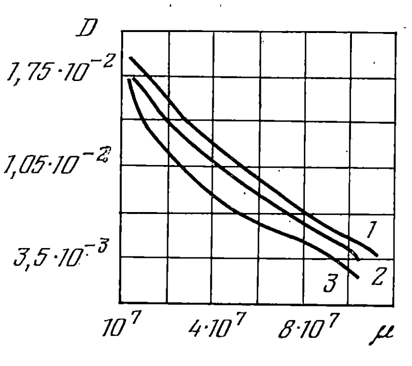
$$\mathbf{y}^{\bullet\circ}=A\mathbf{y}^{\circ}+\mathbf{f}(t) \tag{3.6}$$

$$\mathbf{y}^{\bullet p+1}=A\mathbf{y}^{p+1}+\mathbf{f}(t)+\varepsilon\mathbf{F}_0(t,\mathbf{y}^p,\varepsilon),\quad p\geqslant 1$$

сходится при достаточно малых ε к периодическому решению системы (3.5) [4].

Пример. Пусть в системе (1.1) $I_y=9{,}81\cdot10^{-4}$ нмс², $I_z=I_x=1{,}96\cdot10^{-2}$ нмс², $H=3{,}92\cdot10^{-1}$ нмс, $\omega_h=\omega_3\cos\varphi$, $\omega_v=\omega_3\sin\varphi$, $\omega_3=7{,}28\cdot10^{-5}$ с⁻¹, $\varphi=7{,}85\cdot10^{-1}$ рад, $m=1{,}45$ кг, $l=0{,}17$ м, $R_\beta=R_\gamma=2{,}45\cdot10^{-2}$ нмс, $K=0$, $n_\xi=n_{\xi_0}\sin\omega t$, $n_\zeta=n_{\zeta_0}\sin\omega t$, $n_\eta=0$, $n_{\xi_0}=-n_{\zeta_0}=0{,}01$, $\omega=2\pi$, $k_1=1$, $k_2=0{,}1$, $\alpha(0)=\alpha^\circ(0)$, $\beta(0)=\gamma(0)=0{,}01$ рад, $\gamma^{\bullet}(0)=\beta(0)=0$.

Приведенные значения параметров удовлетворяют условиям доказанных теорем. На фиг. 1 показаны зависимости систематического ухода D от интенсивности управляющего воздействия μ, построенного по формуле (2.15) для полной модели (кривая *1*), для упрощенной модели (3.1) методом последовательных приближений (кривая *2*) и на основе использования второго слагаемого в асимптотическом разложении (2.8) (кривая *3*). На фиг. 1 величина ухода приведена в радианах. Заметим, что оценка погрешности компаса по системе первого приближения приводит к качественно другой зависимости. Действительно, можно показать, что в этом случае



$$D=\frac{1}{H\omega_h}\frac{I_y}{I_z}mgl\langle n_\xi\gamma\rangle=$$

$$=\frac{1}{H\omega_h}\frac{I_y}{I_z}(mgl)^2\frac{mgl-\omega^2 I_x}{\Delta}(n_{\xi_0}n_{\zeta_0})\approx$$

$$\approx 8{,}73\cdot10\ \text{рад}$$

$$\Delta=(mgl-\omega^2 I_x)^2+\omega^2 R_\gamma{}^2$$

т. е. уход не зависит от управления. Численное моделирование на основе неявных разностных схем [7] показало, что время переходного процесса для значений $\mu<10^{-5}$ не превышает для указанных значений параметров 20 с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воробьев В. М., Шервашидзе В. В.* О влиянии управления движением чувствительного элемента на систематические погрешности гирокомпаса, работающего в условиях вибраций.– Автоматика, 1980, № 1, с. 81–84.
2. *Сергеев М. А.* Наземные гирокомпасы. Л.: Машиностроение, 1969. 231 с.
3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
4. *Зубов В. И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судостроение, 1962. 631 с.
5. *Климушев А. И., Красовский Н. Н.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных.– ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 680–690.
6. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 231 с.
7. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. / Под ред. *Дж. Холла и Дж. Уотта.* М.: Мир, 1979. 312 с.

Киев

Поступила в редакцию
23.XI.1983