

УДК 539.3

МЕТОД УПРУГИХ РЕШЕНИЙ
В ТЕОРИИ ДВУЗВЕННЫХ ЛОМАНЫХ

ШЕШЕНИН С. В.

Рассматривается частный вариант теории пластичности, справедливый для траекторий деформации в пятимерном пространстве деформаций А. А. Ильюшина в виде двузвенных ломаных [1, 2]. В определяющие соотношения входят две материальные функции, определяемые экспериментально. Доказано, что итерационный метод типа метода упругих решений является сходящимся. Численно решена трехмерная краевая задача об осадке куба жесткими плитами при наличии бокового равномерного давления. Исследованы траектории деформации, возникающие в этой задаче, и показана их близость к двузвенным ломаным.

1. Краевая квазистатическая задача механики деформируемого твердого тела в перемещениях для тела, занимающего объем V с границей Σ , записывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) + X_i = 0 \quad (x \in V), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_* \quad (x \in \Sigma_1) \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j = S_{*i} \quad (x \in \Sigma_2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где σ — тензор напряжений, X , S_* , \mathbf{n} , \mathbf{u} — соответственно, вектора объемных и поверхностных сил, внешней нормали к Σ , перемещений. Выражение $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$ означает, что напряжения с использованием определяющих соотношений и формул Коши выражены через перемещения. Все напряжения, деформации и перемещения являются функциями координат x и параметра прослеживания процесса нагружения тела t .

Будем предполагать, что в пятимерном пространстве деформаций E_5 [1], в котором девяторы напряжений s и деформаций e представляются пятимерными векторами σ и ε :

$$\varepsilon_1 = \sqrt{3/2} e_{11}, \quad \varepsilon_2 = e_{11}/\sqrt{2} + \sqrt{2} e_{22}, \quad \varepsilon_3 = \sqrt{2} e_{12} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_4 = \sqrt{2} e_{13}, \quad \varepsilon_5 = \sqrt{2} e_{23}, \quad \sigma_1 = \sqrt{3/2} s_{11}, \quad \sigma_2 = s_{11}/\sqrt{2} + \sqrt{2} s_{22} \quad (1.3)$$

$$\sigma_3 = \sqrt{2} s_{12}, \quad \sigma_4 = \sqrt{2} s_{13}, \quad \sigma_5 = \sqrt{2} s_{23} \\ s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{ii} \delta_{ij}, \quad e_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) - 1/3 \theta \delta_{ij}$$

траектории деформаций имеют вид двузвенных ломаных или близки к ним.

Определяющие соотношения теории пластичности для процессов деформации в виде двузвенных ломаных имеют вид [2]:

$$s_{ij} = N e_{ij} + \left(\frac{\sigma_u \sin \alpha}{s_0 \sin \alpha_0} - N \right) e_{ij}^0, \quad N = \frac{\sigma_u \sin(\alpha_0 - \alpha)}{\Delta s \sin \alpha_0} \quad (1.4)$$

$$\sigma = K\theta, \quad \theta = u_{i,i} \quad (1.5)$$

$$\alpha = \arccos [s_{ij} \Delta e_{ij} / (\sigma_u \Delta s)], \quad \Delta e_{ij} = e_{ij} - e_{ij}^0 \\ \Delta s = (\Delta e_{ij} \Delta e_{ij})^{1/2}, \quad \sigma_u = (s_{ij} s_{ij})^{1/2}, \quad s_0 = (e_{ij}^0 e_{ij}^0)^{1/2}$$

Здесь α — угол между векторами σ и $\Delta \varepsilon$, s_0 — длина первого звена траектории деформации, Δs — длина второго звена, σ_u — модуль вектора σ , α_0 , e_{ij}^0 — значения соответствующих величин в точке излома траектории деформации.

В соотношение (1.4) входят две материальные функции $\alpha = \alpha(\alpha_0, s_0, \Delta s)$ и $\sigma_u = \sigma_u(\alpha_0, s_0, \Delta s)$, для которых используем аппроксимационные выражения¹. В безразмерном виде для ст. 38ХА они имеют вид

$$\alpha = \alpha_0 / [f(s_0) \Delta s + 1] \quad (1.6)$$

$$\sigma_u = F \varepsilon_u \sin \alpha_0 / [(\varepsilon_u - \Delta s) \sin \alpha / s_0 + \sin(\alpha_0 - \alpha)] \quad (1.7)$$

$$f = 3,27 - 0,47s_0 + 0,023s_0^2, \quad F = 1,7 / (0,7 + \varepsilon_u), \quad \varepsilon_u = (e_{ij} e_{ij})^{1/2}$$

Величины, имеющие физический смысл деформации, отнесены к пределу текучести $\varepsilon_s = 2 \cdot 10^{-3}$, а величины с размерностью напряжений — к удвоенному модулю сдвига 2μ . Функция F представляет удвоенный текущий модуль сдвига на диаграмме $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ при простом процессе деформации.

2. Соотношение (1.4) справедливо после точки излома траектории деформации. До точки излома девиаторы напряжений и деформаций связаны соотношением теории малых упругопластических деформаций

$$s_{ij} = F(\varepsilon_u) e_{ij} \quad (2.1)$$

Функция $s_{ij}(e_{ij})$, определяемая соотношениями (1.4), (2.1), является непрерывной при $e_{ij} = e_{ij}^0$. Действительно, из (1.4), (1.7) следует $s_{ij} \rightarrow F e_{ij}^0$ при $e_{ij} \rightarrow e_{ij}^0$ ($\varepsilon_u \rightarrow s^0 + 0$). При $\alpha_0 \rightarrow 0$ соотношение (1.4) переходит в (2.1): $s_{ij} \rightarrow F e_{ij}$ при $\alpha_0 \rightarrow 0$.

Для дискретизации краевой задачи (1.1), (1.4), (1.5), (2.1) используется дискретизация по параметру t : $t_l = l\tau$ ($l = 0, 1, 2, \dots$). Схема решения состоит в следующем. Пусть для $l \leq l_0$ траектории деформаций в теле близки к прямым, т. е. углы между векторами $\varepsilon^l(x)$ и $\Delta \varepsilon^l(x) = \varepsilon^l - \varepsilon^{l-1}$ меньше заданного значения α_* . Тогда при $l \leq l_0$ задача решается по теории малых упругопластических деформаций (используется соотношение (2.1)). Если для $l > l_0$ угол между векторами ε^l и $\Delta \varepsilon^l = \varepsilon^l - \varepsilon^{l-1}$ больше α_* , то используется соотношение (1.4). (Здесь для простоты предполагается, что траектории деформаций во всем теле терпят изломы при одном значении параметра $l = l_0$.)

Таким образом, на каждом шаге по параметру t для $l > l_0$ имеем краевую задачу (1.1), (1.4), (1.5), которую запишем в виде уравнения в некотором функциональном пространстве

$$N^*(u_l) + F_l = 0 \quad (2.2)$$

Для ее решения используем итерационный метод линейных приближений

$$L^*(u_l^{(n+1)} - u_l^{(n)}) + \beta(N^*(u_l^{(n)}) + F_l) = 0 \quad (2.3)$$

где L^* — линейный оператор, соответствующий линейной изотропной теории упругости, β — итерационный параметр. На каждом шаге решается краевая задача (1.1), (2.4):

$$s_{ij}^l = 2\mu e_{ij}^l, \quad \sigma^l = K\theta^l \quad (2.4)$$

Для сходимости метода (2.3) на шаге l достаточно, чтобы выполнялись неравенства [3]:

$$c_1[-L^*w, w] \leq [-(N^*)'(v_l^{(n)})w, w] \leq c_2[-L^*w, w] \quad (2.5)$$

¹ См.: Давранов Ю. Численные эксперименты в методе СН — ЭВМ: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1983. 12 с.

$$(N^\sim)'(v)w \equiv \frac{d}{d\xi} \{N^\sim(v+\xi w)\}_{\xi=0}$$

$$v_i^{(n)} = u_i^{(n)} + \xi(u_i - u_i^{(n)}), \quad \xi \in [0, 1]$$

для произвольной функции w , принадлежащей пространству, в котором определено уравнение (2.2). В выражениях (2.5) $[w, v]$ — скалярное произведение функций w и v , $(N^\sim)'$ — производная Гато оператора N^\sim , u_i — решение уравнения (2.2).

Учитывая квазилинейность уравнений (1.1), можно получить достаточное условие сходимости итерационного процесса (2.3) в виде неравенств [4]:

$$0 \leq c_1 2\mu h_{ij} h_{ij} \leq (\partial s_{ij} / \partial e_{km}) h_{ij} h_{km} \leq c_2 2\mu h_{ij} h_{ij} \quad (2.6)$$

где h — произвольный тензор-девиатор. При этом сходимость будет иметь место для $\beta < 2/c_2$, а наилучшее значение $\beta = 2/(c_1 + c_2)$. Для него скорость сходимости итераций определяется по формулам $\|u_i^{(n)} - u_i\| \leq \rho^n \|u_i^{(0)} - u_i\|$, $\rho = (1 - \xi)/(1 + \xi)$, $\xi = c_1/c_2$. Одновременно при выполнении неравенств (2.5) или (2.6) имеет место сильная монотонность оператора N^\sim и единственность решения краевой задачи (1.1), (1.4), (1.5) на шаге l [3].

Прежде чем перейти к вычислению производной $\partial s_{ij} / \partial e_{km}$, покажем, что из постулата пластичности А. А. Ильюшина

$$\oint_{e_{ij}} s_{ij} de_{ij} \geq 0 \quad (2.7)$$

следует $c_2 = 1$. В качестве замкнутого по деформациям контура выберем контур, состоящий из малого отрезка AB в пространстве E_5 длины Δs , проходящего в прямом и обратном направлениях. Пусть процесс деформации AB активный, тогда процесс BA будет разгрузкой. Вычислим интеграл, входящий в неравенство (2.7), пренебрегая членами порядка $(\Delta s)^2$ в разложении функции в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \int_{AB} s_{ij} de_{ij} &= s_{ij}^A \Delta e_{ij} + \frac{1}{2} (\partial s_{ij} / \partial e_{km})^A \Delta e_{ij} \Delta e_{km} \\ \int_{BA} s_{ij} de_{ij} &= -s_{ij}^B \Delta e_{ij} + \frac{1}{2} (\partial s_{ij} / \partial e_{km})^B \Delta e_{ij} \Delta e_{km} \\ s_{ij}^B &= s_{ij}^A + (\partial s_{ij} / \partial e_{km})^A \Delta e_{km}, \quad \Delta e_{ij} = e_{ij}^B - e_{ij}^A \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.7), (2.8), учитывая, что при разгрузке $\partial s_{ij} / \partial e_{km} = \mu (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk})$, будем иметь

$$(\partial s_{ij} / \partial e_{km})^A \Delta e_{ij} \Delta e_{km} \leq 2\mu \Delta e_{ij} \Delta e_{ij} \quad (2.9)$$

Поскольку поверхность нагружения в точке A выпуклая, то направление активного процесса AB имеет достаточный произвол, чтобы из (2.9) следовало второе неравенство (2.6) с константой $e_2 = 1$.

Таким образом, для любого операторного соотношения $s_{ij}(e_{km})$, для которого справедливо неравенство (2.7), будет иметь место сходимость метода упругих решений с $\beta < 2$ при условии $c_1 > 0$. Производную $\partial s_{ij} / \partial e_{km}$ следует в общем случае понимать в смысле функциональной производной [4]. Для теории двузвенных ломаных, использующей соотношения (1.4), (1.5), (1.6), (1.7), производная $\partial s_{ij} / \partial e_{km}$ — обычная частная производная функция $s_{ij} = s_{ij}(e_{km})$.

Константу c_1 для теории двузвенных ломаных можно получить численно. Запишем соотношение (1.4) в виде

$$s_{ij} = \sigma_u [\sin \alpha \omega_{ij}^0 + \sin(\alpha_0 - \alpha) \omega_{ij}^1] / \sin \alpha_0 \quad (2.10)$$

$$\omega_{ij}^0 = e_{ij} / s_0, \quad \omega_{ij}^1 = (e_{ij} - e_{ij}^0) / \Delta s$$

Используя (2.10), найдем

$$W'' = \partial s_{ij} / \partial e_{km} h_{ij} h_{km}, \quad W'' = N h_{ij} h_{ij} + [\partial \sigma_u / \partial (\Delta s) (\sin \alpha h_0 h_1 + \sin(\alpha_0 - \alpha) h_1^2) + \sigma_u \partial \alpha / \partial (\Delta s) (\cos \alpha h_0 h_1 - \cos(\alpha_0 - \alpha) h_1^2)] / \sin \alpha_0 - N h_1^2, \quad (2.11)$$

$$h_0 = \omega_{ij}^0 h_{ij}, \quad h_1 = \omega_{ij}^1 h_{ij}$$

Для удобства исследования квадратичной формы (2.11) введем новый ортонормированный базис векторов $\mathbf{k}_{(\gamma)}$ в пространстве E_5 . Тензоры-девиаторы $\mathbf{a}^{(\gamma)}$, соответствующие векторам $\mathbf{k}_{(\gamma)}$ по формулам (1.2), выберем следующим образом:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \omega^1, \quad \mathbf{a}^{(2)} = (\omega^0 - \cos \alpha_0 \omega^1) / \sin \alpha_0 \quad (2.12)$$

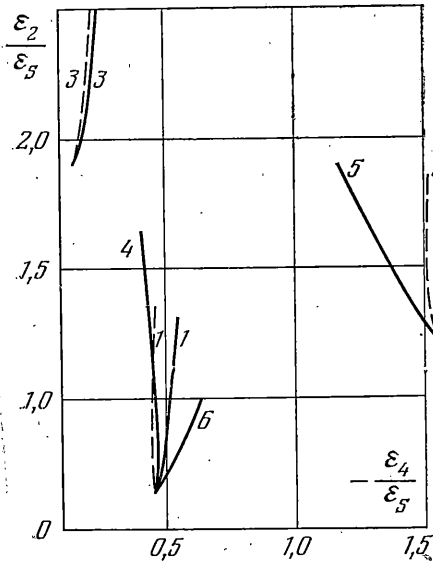
где $\mathbf{a}^{(\gamma)}$ ($\gamma = 3, 4, 5$) — произвольные тензоры-девиаторы, удовлетворяющие условию $a_{ij}^{(\gamma)} a_{ij}^{(\beta)} = \delta_{\gamma\beta}$. Тензор-девиатор \mathbf{h} представим в базисе $\mathbf{a}^{(\gamma)}$: $\mathbf{h} = h_k \mathbf{a}^{(k)}$, тогда $h_{ij} h_{ij} = h_i h_i$, $h_0 = h_1 \cos \alpha_0 + h_2 \sin \alpha_0$. В результате выражение для W'' преобразуется к виду

$$(2.13)$$

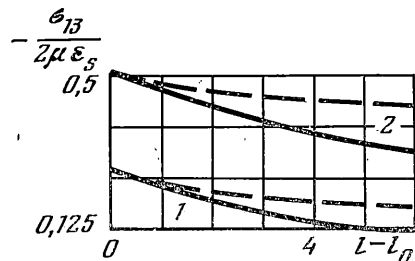
$$W'' = A h_1^2 + 2B h_1 h_2 + N h_2^2 + N \sum_{\gamma=3}^5 h_\gamma^2$$

$$A = \frac{\partial \sigma_u}{\partial (\Delta s)} - \sigma_u \frac{\partial \alpha}{\partial (\Delta s)} \sin \alpha$$

$$2B = \frac{\partial \sigma_u}{\partial (\Delta s)} \sin \alpha + \sigma_u \frac{\partial \alpha}{\partial (\Delta s)} \cos \alpha$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Учитывая, что $W^L = 2\mu h_{ij} h_{ij} = 2\mu h_i h_i$, для определения константы c_1 получаем задачу: найти максимальное c_1 , такое, что квадратичная форма $W'' - c_1 W^L$ положительно определена. Константа c_1 определялась численно для материальных функций (1.6), (1.7) в широком диапазоне значений $\alpha_0, s_0, \Delta s$. Для всех рассмотренных значений $\alpha_0, s_0, \Delta s$ константа c_1 оказалась положительной, что доказывает сходимость итерационного процесса (2.3).

На шаге l по параметру t для решения краевой задачи (1.1), (1.4), (1.5) можно использовать дискретизацию по пространственным переменным x . Здесь соответствующая разностная задача для параллелепипеда была получена методом, описанным в [5, 6].

3. Сходимость итерационного метода (2.3) подтверждена численно на примере решения краевой задачи для куба $0 \leq x_1 \leq d$ с граничными условиями: $\mathbf{u}=0$ при $x_3=d$; $u_1=u_2=0$, $u_3=w^0 l$ при $x_3=d$; $\mathbf{S}_*=-P\mathbf{n}(l-l_0)$ ($l>l_0$) при $x_3=0$, $x_3=d$; $\mathbf{S}_*=0$ ($l \leq l_0$) при $x_3=0$, $x_3=d$; ($w^0=0,2\varepsilon_s d$, $P=p2\mu$, $\gamma=1, 2, 3$, $\beta=1, 2$).

На фиг. 1 изображены проекции на координатную плоскость $\varepsilon_2\varepsilon_4$ траекторий деформации после точки излома в рассмотренной задаче для некоторых точек куба. Штриховыми линиями показаны аналогичные траектории, возникающие при решении задачи по теории малых упругопластических деформаций.

Траектории 1, 2, 3 соответствуют точкам $x_1=x_2=0,25$, $x_3=0$; $x_1=x_3=0$, $x_2=0,25$; $x_2=x_3=0,25$, $x_1=0$ при $l_0=10$, $p=0,2\varepsilon_s$; траектории 4, 5 получены для $p=0,3\varepsilon_s$, траектория 6 — для $p=0,1\varepsilon_s$.

На фиг. 2 изображена зависимость компоненты тензора напряжений σ_{13} от параметра l (штриховые кривые соответствуют теории малых упругопластических деформаций) для точки $x_1=0,25$, $x_2=0,25$, $x_3=0$ при $p=0,2\varepsilon_s$. Кривая 1 соответствует $l_0=10$, кривая 2 — $l_0=20$. Для касательных напряжений σ_{13} , σ_{23} расхождение в расчетах по обеим теориям максимально. Нормальные компоненты напряжений разнятся не более чем на 10%.

Вторые звенья траекторий деформации аппроксимировались отрезками прямых. В таблице приведены величины, характеризующие отклонения траекторий деформаций от аппроксимирующих прямых. Первые строчки показывают угол в градусах между аппроксимирующей прямой и $\Delta\varepsilon^i$. Вторые строчки — расстояние точки на траектории от прямой, отнесенное к $|\Delta\varepsilon^i|$. Расчеты приведены для траекторий деформаций 1–6, изображенных на фиг. 1.

$l-l_0$	1	2	3	4	5	6
1	9,6 0,17	11,8 0,21	7,0 0,12	10,6 0,18	—	0,2 0,004
2	4,3 0,08	4,5 0,08	2,6 0,05	4,6 0,08	4,8 0,08	3,2 0,05
3	1,9 0,03	2,2 0,04	1,5 0,03	3,0 0,05	2,8 0,05	2,2 0,04

Из таблицы и графиков фиг. 1 следует, что в теле при неоднородном напряженно-деформированном состоянии возможно возникновение траекторий с точкой излома, вторые звенья которых близки к прямым. Установить степень точности расчета по теории двузвенных ломаных для траекторий такого типа можно экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. Васин Р. А. О связи напряжений и деформаций для траекторий деформаций в виде двузвенных ломаных. — Прикл. механика, 1965, т. 1, вып. 11, с. 89–94.
3. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.
4. Победра Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
5. Победра Б. Е., Шешенин С. В. Некоторые задачи о равновесии упругого параллелепипеда. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 1, с. 74–86.
6. Победра Б. Е., Шешенин С. В. Численное решение задачи Ламе об упругом параллелепипеде. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, № 5, с. 61–71.

Москва

Поступила в редакцию
27.II.1984